602. Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 26/5/2018

1. (2μ) (α) Έστω H χώρος Hilbert. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $x, y \in H$ και $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\|x - y\| \geqslant \epsilon$ τότε $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta$.

Ισχύει το ίδιο σε κάθε χώρο Banach;

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ακολουθία (x_n) στον X τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ για κάθε $f \in X^*$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φραγμένη. Μπορείτε από αυτήν την υπόθεση να συμπεράνετε ότι $x_n \to 0$;

2. (2μ) (α) Θεωρώντας τον ταυτοτικό τελεστή $I : (\ell_1, \|\cdot\|_1) \to (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ αποδείξτε ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι χώρος Banach.

(β) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος Banach και ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Αποδείξτε ότι ο Y είναι χώρος Banach.

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε πρώτα ότι υπάρχει $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $T(x) = y$ και $\|x\| \leqslant M\|y\|$.]

3. (2μ) (α) Έστω H χώρος Hilbert πάνω από το $\mathbb{R}$ και $T : H \to H$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

(β) Έστω $y = (y_k)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (x_k) \in c_0$, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $y \in \ell_1$.

4. (2μ) (α) Έστω Y κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in Y^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $f_1 \in H^*$ τέτοιο ώστε $f_1|_Y = f$ και $\|f_1\|_{H^*} = \|f\|_{Y^*}$.

(β) Έστω H χώρος Hilbert, και (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

5. (2μ) (α) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Αν ο Y είναι διαχωρίσιμος, αποδείξτε ότι υπάρχει διαχωρίσιμος κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $T(Z) = Y$.

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ της B_Y και κατάλληλα $z_n \in X$ με $T(z_n) = y_n$. Αποδείξτε ότι $T(Z) = Y$, όπου $Z = \overline{\mathrm{span}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}$.]

(β) Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X με $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z.

6. (2μ) Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο $Y + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in Y + Z$ υπάρχουν $y \in Y$ και $z \in Z$ ώστε $x = y + z$ και $\|y\| + \|z\| \leqslant M\|x\|$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τον $T : Y \times Z \to Y + Z$ με $T(y, z) = y + z$.]

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\mathrm{dist}(x, Y \cap Z) \leqslant M\big(\mathrm{dist}(x, Y) + \mathrm{dist}(x, Z)\big)$.

Καλή Επιτυχία!