Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 1 Σεπτεμβρίου 2021

(Όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το $\mathbb{R}$)

1. (1+1 μον.) (α) Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X με $\mathrm{int}(Y) \neq \varnothing$. Αποδείξτε ότι $Y = X$.

(β) Έστω X, Y χώροι με νόρμα, ο X χώρος Banach, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ και το $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

2. (1.5+1.5 μον.) (α) Έστω $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \ell_\infty$ με $T(f) = (f(q_1), f(q_2), \ldots, f(q_n), \ldots)$. Αποδείξτε ότι ο T είναι γραμμική ισομετρία αλλά δεν είναι επί.

(β) Έστω $X = (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ και $\psi : X \to \mathbb{R}$ το γραμμικό συναρτησοειδές που ορίζεται από την

$$\psi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt.$$

Αποδείξτε ότι $\psi \in X^*$ αλλά δεν υπάρχει $f \in B_X$ τέτοια ώστε $|\psi(f)| = \|\psi\|$.

3. (1+1 μον.) (α) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ τέτοια ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(x_n^*) = \{0\}.$$

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Αποδείξτε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $x \in S_X$ τέτοιο ώστε $x^*(x) = \|x^*\|$.

4. (2 μον.) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, (e_m) ορθοκανονική βάση του H, και (x_n) ακολουθία στοιχείων του H. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $x \in H$, $\langle x, x_n \rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Η (x_n) είναι φραγμένη και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\langle e_m, x_n \rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

5. (1.5 μον.) Έστω X χώρος Banach και $T : X \to \ell_\infty$ γραμμικός τελεστής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\pi_n : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με $\pi_n(x) = x_n$, όπου $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν $g_n := \pi_n \circ T \in X^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. (1.5 μον.) Έστω X, Y και Z χώροι Banach. Υποθέτουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής και ο $S : Y \to Z$ είναι φραγμένος και 1-1 γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $S \circ T : X \to Z$ είναι φραγμένος.

Καλή Επιτυχία!