Αρμονική Ανάλυση (2017–2018) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

1. Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X)<+\infty$ και $1\leqslant p<q<+\infty$. Δείξτε ότι $L^p(X,\mathscr{A},\mu)\supseteq L^q(X,\mathscr{A},\mu)$ και ότι

$$\|f\|_p\leqslant[\mu(X)]^{1/p-1/q}\|f\|_q$$

για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f επί του X.

2. (α) Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου. Δείξτε ότι, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f επί του X,

$$\|f\|_\infty=\min\left\{t\geqslant 0\colon\ \mu\big(\{x\in X\colon\ |f(x)|>t\}\big)=0\right\}.$$

(β) Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση επί του X και έστω $\varphi(p):=\|f\|_p^p$ για $p>0$. Έστω επίσης $E:=\{p\in(0,\infty)\colon\ \varphi(p)<+\infty\}$ και έστω ότι $\|f\|_\infty>0$.
(i) Αν $r<p<q$ και $r,q\in E$, δείξτε ότι $p\in E$.
(ii) Δείξτε ότι $\ln\varphi$ είναι κυρτή συνάρτηση στο εσωτερικό του E και συνεχής στο E.
(iii) Από το (i) το E είναι διάστημα. Είναι πάντα ανοικτό; Κλειστό; Μπορεί το E να είναι μονοσύνολο;
(γ) Αν $r<p<q$ και f μετρήσιμη συνάρτηση επί του X, δείξτε ότι $\|f\|_p\leqslant\max\left\{\|f\|_q,\|f\|_r\right\}$. Συμπεράνατε ότι $L^q(X,\mathscr{A},\mu)\cap L^r(X,\mathscr{A},\mu)\subseteq L^p(X,\mathscr{A},\mu)$.
(δ) Δείξτε ότι, αν $f\in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ για κάποιο $p<\infty$, τότε

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty.$$

3. Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος πιθανότητας (δηλαδή $\mu(X)=1$). Δείξτε ότι αν $f\in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ για κάποιο $p>0$, τότε

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left(\int_X\ln|f|\,\mathrm{d}\mu\right).$$

4. Για f μετρήσιμη συνάρτηση επί του $\mathbb{R}^n$ και $y\in\mathbb{R}^n$, έστω f_y η συνάρτηση $f_y(x):=f(x-y)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι, αν $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, με $1\leqslant p<+\infty$, τότε $\lim_{y\to 0}\|f_y-f\|_p=0$.
[*Υπόδειξη*: Θεωρείστε πρώτα $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$.]

5. (Γενικευμένη ανισότητα Hölder) Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $p_1\geqslant 1,\ldots,p_m\geqslant 1$ τέτοιοι ώστε $\sum_{j=1}^m 1/p_j=1$. Αν $f_j\in L^{p_j}(X,\mathscr{A},\mu)$ για κάθε $j\in\{1,\ldots,m\}$, δείξτε ότι

$$\left\|\prod_{j=1}^m f_j\right\|_1\leqslant\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{p_j}.$$

6. (Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα) Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ και $(Y,\mathscr{B},\nu)$ σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου, $1\leqslant p\leqslant\infty$ και $f\colon X\times Y\to[0,+\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση ως προς την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$. Δείξτε ότι, αν $f_y(x):=f(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, τότε

$$\left\|\int_Y f_y\,\mathrm{d}\nu(y)\right\|_{L^p(X)}\leqslant\int_Y\|f_y\|_{L^p(X)}\,\mathrm{d}\nu(y),$$

υπό την έννοια ότι

$$\left[\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^p \mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int_Y\left(\int_X f(x,y)^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\mathrm{d}\nu(y).$$

7. (Ανισότητα Hardy) Έστω $1<p<+\infty$, $f\in L^p(0,+\infty)$ και

$$F(x):=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

(α) Δείξτε την ανισότητα του Hardy:

$$\|F\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_p\,.$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι ο μετασχηματισμός $f\mapsto F$ απεικονίζει τον $L^p(0,+\infty)$ στον $L^p(0,+\infty)$.
(β) Δείξτε ότι ισότητα στην παραπάνω ανισότητα ισχύει ανν f είναι η μηδενική συνάρτηση στον $L^p(0,+\infty)$ (δηλαδή $f=0$ σχεδόν παντού).
(γ) Δείξτε ότι η σταθερά $p/(p-1)$ είναι βέλτιστη, δηλαδή δεν μπορεί να αντικατασταθεί με μικρότερη.
(δ) Αν $f>0$ και $f\in L^1(0,+\infty)$ τότε $F\notin L^1(0,+\infty)$.
[*Υπόδειξη*: Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση $f\geqslant 0$. Ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει

$$\int_a^b F(x)^p\,\mathrm{d}x = bF(b)^p-aF(a)^p-p\int_a^b F(x)^{p-1}xF'(x)\,\mathrm{d}x$$

για κάθε $0<a<b<+\infty$ και συμπεράνατε ότι

$$\int_0^b F(x)^p\,\mathrm{d}x = bF(b)^p-p\int_0^b F(x)^{p-1}xF'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant -p\int_0^b F(x)^{p-1}xF'(x)\,\mathrm{d}x$$

για κάθε $b\in(0,\infty)$, όταν $f\in L^p(0,+\infty)$. Παρατηρείστε ότι $xF'(x)=f(x)-F(x)$ και χρησιμοποιείστε την ανισότητα Hölder. Εναλλακτικά για το (α), παρατηρείστε ότι $F(x)=\int_0^1 f(xy)\,\mathrm{d}y$ και χρησιμοποιείστε την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα. Για το (γ) θεωρείστε την $f(x)=x^{-1/p}\mathbf{1}_{[1,A]}(x)$.]

8. Για μετρήσιμες συναρτήσεις f,g στον $\mathbb{R}^n$, η συνέλιξη $f*g$ ορίζεται ως

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

(α) Αν $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, με $1\leqslant p\leqslant+\infty$, και $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, δείξτε ότι η συνάρτηση $y\mapsto f(x-y)g(y)$ είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη ως προς y, για σχεδόν κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, και άρα η $f*g$ είναι καλά ορισμένη, $f*g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ και

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_p\|g\|_1\,.$$

(β) Έστω $p,q>1$ με $p^{-1}+q^{-1}=1$ και $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$. Δείξτε ότι τότε $f*g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και

$$\|f*g\|_\infty\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\,.$$

Επιπλέον η $f*g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\lim_{|x|\to\infty} f*g(x)=0$.
[$|x|$ συμβολίζει την ευκλείδεια νόρμα του x στον $\mathbb{R}^n$.]

9. Έστω $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μη μηδενική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|^n} \qquad \forall\, |x| \geqslant 1$$

και επομένως η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

10. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|\,(\ln|x|)^2} & \text{αν } |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|\ln|x|} \qquad \text{για } |x| \leqslant \tfrac{1}{2}$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

11. Μια οικογένεια συναρτήσεων $\{K_\delta\colon \delta > 0\}$ στον $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται προσέγγιση της μονάδας αν: (i) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$ για κάθε $\delta > 0$· (ii) υπάρχει σταθερά $c < +\infty$ ώστε $|K_\delta(x)| \leqslant c/\delta^n$ για κάθε $\delta > 0$ και $y \in \mathbb{R}^n$· (iii) υπάρχει σταθερά $c < +\infty$ ώστε $|K_\delta(x)| \leqslant c\delta\,|y|^{-(n+1)}$ για κάθε $\delta > 0$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Αν $\{K_\delta\colon \delta > 0\}$ είναι μία προσέγγιση της μονάδας, δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C < +\infty$ τέτοια ώστε

$$\sup_{\delta>0} |K_\delta * f(x)| \leqslant C f^*(x)$$

για κάθε $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.

12. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ που έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $\lambda_1(I \cap E) \geqslant \alpha\lambda_1(I)$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $\lambda_1(E) = 1$.

13. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με (γνήσια) θετικό μέτρο. Υπάρχει πάντα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lambda_1\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A + x_n)\right) = 0;$$

14. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \leqslant \|f\|_2^2$.