Αρμονική Ανάλυση (2017–2018) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

1. (α) Δείξτε ότι αν $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη στο (a,b) με φραγμένη παράγωγο, τότε είναι απολύτως συνεχής.
(β) Έστω $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) := x^{-2}\sin(x^{-4})$, αν $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $[-1,1]$ αλλά δεν είναι απολύτως συνεχής.

2. Για $f \in L^1(\mathbb{T})$, δείξτε ότι η νόρμα του τελεστή $L^1(\mathbb{T}) \ni g \mapsto f * g \in L^1(\mathbb{T})$ είναι $\|f\|_1$.
[*Υπόδειξη*: $f * K_n \to f$ στον $L^1(\mathbb{T})$.]

3. Έστω $f_n \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία στον $L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|g - f_n * g\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι τότε $\widehat{f_n}(k) \to 1$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

4. Για $f \in L^1(\mathbb{T})$, έστω $f_n(t) := f(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{T}$, όπου θεωρούμε την f σαν 2π-περιοδική συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ για να αποκτήσει έννοια το $f(nt)$ για $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{T}$. Δείξτε ότι $\widehat{f_n}(k) = \widehat{f}(k/n)$, αν $n \mid k$, και $\widehat{f_n}(k) = 0$ αλλιώς, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.
[*Υπόδειξη*: $\int_0^{2\pi n} = \sum_{j=1}^{n} \int_{2\pi(j-1)}^{2\pi j}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική.]

5. (Λήμμα Fejér) Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t) g(nt)\,\mathrm{d}t = 2\pi \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

[*Υπόδειξη*: Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$.]

6. Έστω $n_1 < n_2 < \cdots$ αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και έστω A το σύνολο των σημείων $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\big(\sin(n_k x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι $\lambda_1(A) = 0$.
[*Υπόδειξη*: Για κάθε $B \subseteq [0,2\pi)$ μετρήσιμο, $\int_B \sin(n_k x)\,\mathrm{d}x \to 0$ $(k \to \infty)$ και επίσης $\int_A \sin^2(n_k x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_A [1 - \cos(2n_k x)]\,\mathrm{d}x \to \frac{1}{2}\lambda_1(A)$.]

7. Έστω $D_n\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ο πυρήνας Dirichlet: $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{int} = \sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)/\sin(t/2)$, $t \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
(α) Δείξτε ότι υπάρχουν δύο σταθερές $c > 0$ και $C < +\infty$ τέτοιες ώστε $c \ln n \leqslant \|D_n\|_1 \leqslant C \ln n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
(β) Δείξτε ότι $\|D_n\|_1 \sim (4/\pi^2)\ln n$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή ότι $\|D_n\|_1 / \ln n \to 4/\pi^2$ καθώς $n \to \infty$.
[*Υπόδειξη*: Για το (β) δείξτε πρώτα ότι $0 \leqslant 1/\sin t - 1/t \leqslant 1 - 2/\pi$ για $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.]

8. Δείξτε ότι αν για κάποια $f \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει ότι $n\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$ καθώς $n \to \infty$, τότε η f είναι σταθερή στον $L^1(\mathbb{T})$ (δηλαδή Lebesgue-σχεδόν παντού)[1].
[*Υπόδειξη*: Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της $\sigma_n(f) - f$ συναρτήσει αυτών της f και άρα της f συναρτήσει αυτών της $\sigma_n(f) - f$.]

9. Στα παρακάτω θεωρούμε μία $f \in L^1(\mathbb{T})$ ως μία 2π-περιοδική συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και δίνονται οι τιμές της συνάρτησης αυτής στο $(-\pi, \pi]$. Επίσης $0 < b < \pi$.
(α) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier των παρακάτω συναρτήσεων.
(i) $f(t) = t, \quad t \in (-\pi, \pi]$.

[1] Έπεται ότι αν για κάποια $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει ότι $n\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ καθώς $n \to \infty$, τότε η f είναι σταθερή σχεδόν παντού, για οποιοδήποτε $p \in [1, +\infty)$.

(ii) $f(t)=\mathbf{1}_{[-b,b]}(t), \quad t\in(-\pi,\pi]$.
(iii) $f(t)=(1-|t|/b)^{+}, \quad t\in(-\pi,\pi]$.
(iv) $f(t)=|t|, \quad t\in(-\pi,\pi]$.
(v) $f(t)=t^2, \quad t\in(-\pi,\pi]$.
(vi) $f(t)=\cosh(t), \quad t\in(-\pi,\pi]$.
(vii) $f(t)=\sinh(t), \quad t\in(-\pi,\pi]$.

(β) Αιτιολογείστε γιατί, αν υποθέσουμε ότι τα μερικά αθροίσματα $S_n(f)$, $n\in\mathbb{N}$, της σειράς Fourier μιας $f\in L^1(\mathbb{T})$ συγκλίνουν σε κάποιο σημείο $t\in\mathbb{T}$, τότε συγκλίνουν στο ίδιο όριο με τα $\sigma_n(f)(t)$, $n\in\mathbb{N}$.

(γ) Δείξτε τις ακόλουθες ισότητες.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\frac{2\pi}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}.$$

10. Έστω $f\colon\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση Hölder συνεχής με δείκτη $\alpha>0$: για κάθε $t\in\mathbb{T}$ έχει κανείς ότι

$$|f(t+s)-f(t)|\leqslant C|s|^{\alpha} \qquad \forall s\in(-\pi,\pi),$$

για κάποια σταθερά $C<+\infty$. Δείξτε ότι

$$\sup_{t\in\mathbb{T}}|\sigma_n(f)(t)-f(t)|\leqslant\frac{\pi+1}{1-\alpha}\frac{C}{n^{\alpha}} \qquad \text{αν } \alpha<1$$

και

$$\sup_{t\in\mathbb{T}}|\sigma_n(f)(t)-f(t)|\leqslant 2\pi C\frac{\ln n}{n} \qquad \text{αν } \alpha=1.$$

11. Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι, για κάθε μετρήσιμο $A\subseteq\mathbb{T}$, η σειρά $\sum_k\widehat{f}(k)\int_A\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\,\mathrm{d}t$, δηλαδή οι μέσοι όροι των μερικών αθροισμάτων της, $s_n:=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\int_A\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$, $n\in\mathbb{N}$, συγκλίνουν στο $\int_A f(t)\,\mathrm{d}t$.

12. Έστω $f\colon\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση και έστω ότι υπάρχουν $\alpha>0$ και $K<+\infty$ τέτοια ώστε $\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant Kn^{\alpha n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ (συγκεκριμένα, $\sup_{t\in\mathbb{T}}|f(t)|\leqslant K$ για $n=0$). Τότε

$$\left|\widehat{f}(j)\right|\leqslant K\exp\left(-\frac{\alpha}{\mathrm{e}}|j|^{1/\alpha}\right) \qquad \forall j\in\mathbb{Z}.$$

13. Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right||n|^k<+\infty$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$. Τότε η f είναι ίση Lebesgue-σχεδόν παντού με μία συνάρτηση που είναι συνεχώς διαφορίσιμη k φόρες. Επομένως, αν $\widehat{f}(n)=\mathrm{O}(|n|^{-l})$ για κάποιο $l>2$, δηλαδή $\left|\widehat{f}(n)\right|\leqslant C|n|^{-l}$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ για κάποια σταθερά $C<+\infty$, τότε η f είναι Lebesgue-σχεδόν παντού ίση με μία συνάρτηση που είναι συνεχώς διαφορίσιμη k φόρες, όπου $k=l-2$ αν l ακέραιος και $k=\lfloor l\rfloor-1$ αν $l\in(2,+\infty)\setminus\mathbb{N}$.

14. Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\left|\widehat{f}(j)\right|\leqslant C\exp\left(-|j|^{1/\alpha}\right)$ $\forall j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, για κάποιο $\alpha>0$ και κάποια σταθερά $C<+\infty$. Τότε η f είναι ίση Lebesgue-σχεδόν παντού με μία συνάρτηση που είναι απείρως διαφορίσιμη και τέτοια ώστε $\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant K\mathrm{e}^{an}n^{an}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, για κάποια $a>0$ και $K<+\infty$. [*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant C\sum_{j\in\mathbb{Z}}|j|^n\exp\left(-|j|^{1/\alpha}\right)$ για κάθε $t\in\mathbb{T}$ και συγκρίνετε την τελευταία σειρά με το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^n\exp\left(-x^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}x$.]

15. Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και ότι $\widehat{f}(n)=\mathrm{O}(|n|^{-l})$ για κάποιο $l>0$ (δηλαδή $\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|n^l\widehat{f}(n)\right|<+\infty$). Δείξτε ότι η f είναι ίση Lebesgue-σχεδόν παντού με μία συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη k φόρες και $f^{(k)}\in L^2(\mathbb{T})$, εφόσον $k<l-\frac{1}{2}$, $k\in\mathbb{N}$.

16. Για $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $s\in\mathbb{T}$, συμβολίζουμε $f_s(t):=f(t-s)$, $t\in\mathbb{T}$, και $\Omega(f,s):=\|f_s-f\|_1$. Δείξτε ότι αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ έχει $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Omega(f,\pi/|n|)^2<+\infty$, τότε $f\in L^2(\mathbb{T})$.

17. Έστω $f\in L^2(\mathbb{T})$ σειρά της μορφής $f(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n\sin(nt)$, $t\in\mathbb{T}$, με την ισότητα να ισχύει στον $L^2(\mathbb{T})$, δηλαδή τα μερικά αθροίσματα της σειράς συγκλίνουν στον $L^2(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι τότε

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{b_n}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)}(\pi-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$