Αρμονική Ανάλυση (2017–2018) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

0. (α) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.
(β) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\|S_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1} \left|\widehat{f}(k)\right| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\pi + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{T}.$$

[*Υπόδειξη*: Για το (γ) θεωρήστε την $f(t) = t - \pi$ για $t \in [0, 2\pi)$.]

1. (α) (Κριτήριο Dirichlet) Έστω $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε (i) $b_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, (ii) $b_n \geqslant b_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, και (iii) $b_n \to 0$. Έστω επίσης και $a_n \colon X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε τα μερικά αθροίσματα $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ομοιόμορφα φραγμένα: υπάρχει $C < +\infty$ τέτοιο ώστε $|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)| \leqslant C$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.
(β) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \sin(kt)/\log k$ συγκλίνει για κάθε $t \in \mathbb{T}$, αλλά δεν είναι σειρά Fourier συνάρτησης στον $L^1(\mathbb{T})$.
(γ) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \sin(kt)/(k \log k)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$, είναι σειρά Fourier κάποιας $f \in C(\mathbb{T})$, αλλά $f \notin A(\mathbb{T})$.

2. Στην άσκηση αυτή θεωρούμε τον $A(\mathbb{T})$ σαν υπόχωρο του $C(\mathbb{T})$:

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ f \in C(\mathbb{T}) \colon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right| < +\infty \right\}.$$

(α) Δείξτε ότι αν $f_n \in A(\mathbb{T})$ με $\|f_n\|_{A(\mathbb{T})} \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$ (δηλαδή $f_n \to f$ στον $C(\mathbb{T})$), τότε $f \in A(\mathbb{T})$.
(β) Δείξτε ότι οι υποθέσεις του (α) δεν εξασφαλίζουν ότι $\|f_n - f\|_{A(\mathbb{T})} \to 0$.
(γ) Δείξτε ότι υπό τις υποθέσεις του (α), αν επιπλέον υποτεθεί ότι $\|f_n\|_{A(\mathbb{T})} \to \|f\|_{A(\mathbb{T})}$, τότε $\|f_n - f\|_{A(\mathbb{T})} \to 0$.
[*Υπόδειξη*: Για το (β) θεωρήστε μία $f \in C(\mathbb{T}) \setminus A(\mathbb{T})$.]

3. Δείξτε ότι για την

$$f_b(t) = \left(1 - \frac{|t|}{b}\right)^{+} \qquad t \in (-\pi, \pi],$$

όπου $0 < b < \pi$, έχει κανείς ότι $f_b \in A(\mathbb{T})$ και $\|f_b\|_{A(\mathbb{T})} = 1$.

4. (α) Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι $f * g \in A(\mathbb{T})$. (Επομένως, ειδικότερα, η $f * g$ ισούται, Lebesgue-σχεδόν παντού, με μία συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{T}$.)
(β) Επαναλάβετε την άσκηση 3 υπό το πρίσμα της παρούσας άσκησης.
[*Υπόδειξη*: Τι σχέση έχουν οι συναρτήσεις των (ii) και (iii) της άσκησης 9 του 2ου φυλλαδίου;]
(γ) Δείξτε ότι κάθε $h \in A(\mathbb{T})$ γράφεται ως $f * g$ για κάποιες $f, g \in L^2(\mathbb{T})$.

5. Δείξτε ότι αν μ είναι ένα θετικό μέτρο Borel στον $\mathbb{T}$ με $\mu(\mathbb{T}) = 1$, τότε $|\widehat{\mu}(k)| < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, εκτός αν υπάρχουν $\theta \in \mathbb{T}$ και $m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\left\{\frac{2\pi k + \theta}{m} : k \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{\theta}{2\pi}, -\frac{\theta}{2\pi} + m\right)\right\}\right) = 1,$$

στην οποία περίπτωση, $\widehat{\mu}(mj) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta j}$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή $|\widehat{\mu}(k)| < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, εκτός αν το μ είναι κυρτός συνδυασμός σημειακών μαζών

$$\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [-\theta/2\pi, -\theta/2\pi + m)} p_k \delta_{\{(2\pi k + \theta)/m\}},$$

για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και $\theta \in \mathbb{T}$, με τα $p_k \geqslant 0$ για όλα τα $k \in \mathbb{Z} \cap [-\theta/2\pi, -\theta/2\pi + m)$ και $\sum_k p_k = 1$, όπου, για $t \in \mathbb{T}$, το μέτρο $\delta_{\{t\}}$ είναι το μέτρο με $\delta_{\{t\}}(B) = 1$ αν $t \in B$ και $\delta_{\{t\}}(B) = 0$ αλλιώς, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{T}$.

6. Το Θεώρημα του Riesz ταυτοποιεί τον δυϊκό του χώρου Banach $C(\mathbb{T})$ με τον χώρο $M(\mathbb{T})$ των μιγαδικών μέτρων Borel στον $\mathbb{T}$. Κατά συνέπεια, μία ακολουθία μέτρων Borel $\mu_n \in M(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει σε ένα μέτρο Borel $\mu \in M(\mathbb{T})$ ως προς την ασθενή* τοπολογία ανν $\int_{\mathbb{T}} f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{T}} f \,\mathrm{d}\mu$ για κάθε συνεχή συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι $\mu_n \to \mu$ ως προς την ασθενή* τοπολογία ανν $\widehat{\mu_n}(k) \to \widehat{\mu}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu_n\| < +\infty$, όπου, για $\nu \in M(\mathbb{T})$, $\|\nu\|$ είναι η νόρμα ολικής κύμανσης του ν, δηλαδή η νόρμα του ως φραγμένου γραμμικού συναρτησοειδούς του $C(\mathbb{T})$: $\|\nu\| = \inf\{C > 0 \colon |\int_{\mathbb{T}} f \,\mathrm{d}\nu| \leqslant C\|f\| \ \forall f \in C(\mathbb{T})\}$, και όπου $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$, για $f \in C(\mathbb{T})$, η συνήθης νόρμα του $C(\mathbb{T})$.

7. Μία ακολουθία $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $\mathbb{T}$ λέγεται *ομοιόμορφα κατανεμημένη* αν, για κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{T}$, $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_I(t_j) \to \lambda_{\mathbb{T}}(I)$ (καθώς $n \to \infty$), όπου $\lambda_{\mathbb{T}}(I)$ είναι το μήκος του I.

(α) Δείξτε ότι μία ακολουθία $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $\mathbb{T}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη ανν τα μέτρα $\mu_n := n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\{t_j\}}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνουν ασθενώς* στο μέτρο $(2\pi)^{-1}\lambda_{\mathbb{T}}$, όπου $\lambda_{\mathbb{T}}$ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{T}$.

(β) Δείξτε ότι, ισοδύναμα, η $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον $\mathbb{T}$ ανν $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_j k} \to 0$ $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(γ) Αν α είναι άρρητος, δείξτε ότι η ακολουθία $2\pi n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη mod 2π, δηλαδή η ακολουθία $t_n := 2\pi n\alpha - 2\pi\lfloor n\alpha \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον $\mathbb{T}$.

[*Υπόδειξη*: Για το (α), αν a, b τα άκρα του διαστήματος I, προσεγγίστε την χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathbf{1}_I$ του I από συναρτήσεις $f_n \leqslant \mathbf{1}_I \leqslant g_n$, όπου η $f_n = 1$ στο διάστημα με το ίδιο κέντρο με το I και μήκος $(b-a)(1-1/n)$, $f_n = 0$ έξω από το I και η f_n είναι της μορφής $f_n(x) = Ax + B$ σε κάθε ένα από τα δύο εναπομείναντα διαστήματα μήκους $(b-a)/(2n)$, με τα A, B επιλεγμένα έτσι ώστε η f_n να είναι συνεχής· και όμοια $g_n = 1$ στο I, $g_n = 0$ έξω από το διάστημα με το ίδιο κέντρο με το I και μήκος $b - a + (2\pi - b + a)/n$, g_n πάλι της μορφής $g_n(x) = Ax + B$ σε κάθε ένα από τα δύο εναπομείναντα διαστήματα και συνεχής.]

8. Ο φορέας ενός πεπερασμένου θετικού μέτρου Borel μ στον $\mathbb{T}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο[1] $C \subseteq \mathbb{T}$ για το οποίο $\mu(\mathbb{T} \setminus C) = 0$, και συμβολίζεται με $\operatorname{supp}(\mu)$. Δείξτε ότι αν μ πεπερασμένο θετικό

[1]Αν μ είναι ένα θετικό κανονικό μέτρο Borel σε έναν τοπικά συμπαγή χώρο X, τότε η ένωση όλων των ανοικτών συνόλων που έχουν μ-μέτρο μηδέν είναι ανοικτό σύνολο και έχει μ-μέτρο μηδέν. Ο φορέας $\operatorname{supp}(\mu)$ του μ είναι το συμπλήρωμα αυτού του ανοικτού συνόλου. Αν μ αυθαίρετο προσεσημασμένο ή μιγαδικό κανονικό μέτρο Borel σε έναν τέτοιο χώρο X, ως φορέας του μ ορίζεται ο φορέας της ολικής κύμανσης $|\mu|$ του μ. Το αποτέλεσμα της άσκησης ισχύει για αυθαίρετα (μιγαδικά εν γένει) μέτρα $\mu \in M(\mathbb{T})$.

μέτρο Borel στον $\mathbb{T}$, τότε

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)^{+}\widehat{\mu}(j)\,\mathrm{e}^{ijt}\xrightarrow{(N\to\infty)}0 \qquad \forall t\notin \operatorname{supp}(\mu),$$

και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{T}\setminus\operatorname{supp}(\mu)$.

9. Ως φορέας μιας συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$ ορίζεται το μικρότερο κλειστό σύνολο έξω από το οποίο η f είναι ταυτοτικά μηδέν, δηλαδή η κλειστή θήκη του συνόλου $\{x\in\mathbb{R}\colon f(x)\neq 0\}$. Δείξτε ότι αν $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχουν συμπαγή φορέα, τότε η $f*g$ έχει συμπαγή φορέα. Ειδικότερα δείξτε ότι, αν $f(x)=0$ για Lebesgue-σχεδόν κάθε x έξω από ένα φραγμένο σύνολο A και $g(x)=0$ για Lebesgue-σχεδόν κάθε x έξω από ένα φραγμένο σύνολο B, τότε $f*g(x)=0$ για κάθε x έξω από ένα φραγμένο σύνολο.

10. Έστω $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$ που ικανοποιούν την $p^{-1}+q^{-1}-r^{-1}=1$. Αν $f\in L^p(R^n)$ και $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, δείξτε ότι $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$ και ειδικότερα ότι ισχύει η εξής ανισότητα του Young: $\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\,\|g\|_q$.
[*Υπόδειξη*: Γράψτε $|f(y)g(x-y)|=|f(y)|^a\,|g(x-y)|^b\left(|f(y)|^{1-a}\,|g(x-y)|^{1-b}\right)$ για κατάλληλα a,b, που θα υπολογίσετε, και χρησιμοποιήστε την γενικευμένη ανισότητα Hölder της άσκησης 5 του 1ου φυλλαδίου, για κατάλληλα p_j που επίσης θα υπολογίσετε.]

11. Έστω $G(x):=(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/2}$, για $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\widehat{G}(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$ για κάθε $\xi\in\widehat{\mathbb{R}}$. Συμπεράνατε ότι $\widehat{G_\lambda}(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi^2/(2\lambda^2)}$, $\xi\in\widehat{R}$, $\lambda>0$, για τον πυρήνα του Gauss $G_\lambda(x):=\lambda G(\lambda x)$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$.
[*Σημείωση*: Αυτό δείχνει ότι η G, που είναι η πυκνότητα της γκαουσσιανής κατανομής (τυπική κανονική κατανομή), ή μέτρου του Gauss, είναι ιδιοσυνάρτηση του μετασχηματισμού Fourier.]
[*Υπόδειξη*: 1ος τρόπος: χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Cauchy στο ορθογώνιο με κορυφές $-R,R,R+\mathrm{i}\xi,-R+\mathrm{i}\xi$ για την αναλυτική συνάρτηση $z\mapsto\mathrm{e}^{-z^2/2}$.
2ος τρόπος: χρησιμοποιώντας τον τύπο που δίνει την παράγωγο της $\widehat{f}$ για μία $f\in L^1(\mathbb{R})$ για την οποία η $x\mapsto xf(x)$ ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R})$, και κατόπιν ολοκλήρωση κατά μέρη, γράψτε κατάλληλη διαφορική εξίσωση για την $\widehat{G}$.]

12. Έστω $P(x):=\pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$, $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\widehat{P}(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|}$, $\xi\in\widehat{R}$. Συμπεράνατε ότι $\widehat{P_\lambda}(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|/\lambda}$, $\xi\in\widehat{R}$, $\lambda>0$, για τον πυρήνα του Poisson $P_\lambda(x):=\lambda P(\lambda x)$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$.

13. Δείξτε ότι, για κάθε συμπαγές $C\subseteq\widehat{\mathbb{R}}$ και $\xi\in\widehat{\mathbb{R}}\setminus C$, υπάρχει $f\in L^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}|_C=0$ (δηλαδή $\widehat{f}(\zeta)=0\ \forall\,\zeta\in C$) και $\widehat{f}(\xi)\neq 0$.

14. Δείξτε ότι, για $f\in C_0(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)^{+}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi=f(x),$$

ομοιόμορφα στον $\mathbb{R}$.
[*Σημείωση*: Ως συνήθως, $C_0(\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$ για τις οποίες $\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$.]

15. Έστω f φραγμένη συνεχής συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$ και $\{k_\lambda:\lambda\in(0,\infty)\}$ πυρήνας αθροισιμότητας. Δείξτε ότι $f*k_\lambda\to f$ καθώς $\lambda\to\infty$, ομοιόμορφα πάνω στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

16. Έστω $\{k_\lambda : \lambda \in (0,\infty)\}$ πυρήνας αθροισιμότητας στο $\mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ φραγμένη συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι $f * k_\lambda \to f$ ασθενώς* στον $L^\infty(\mathbb{R})$, καθώς $\lambda \to \infty(\mathbb{R})$, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}} (k_\lambda * f)(x)h(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ καθώς $\lambda \to \infty$, για κάθε $h \in L^1(\mathbb{R})$.

17. (Θεώρημα Fejér στον $\mathbb{R}$) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$.
(α) Αν το όριο $\lim_{h\to 0}[f(x+h)+f(x-h)]$ υπάρχει για κάποιο $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \tfrac{1}{2} \lim_{h\to 0}[f(x+h)+f(x-h)].$$

Ειδικότερα, αν το x είναι σημείο συνέχειας της f, τότε $\int_{\widehat{\mathbb{R}}} (1-|\xi|/\lambda)^+ \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi \to f(x)$, καθώς $\lambda \to \infty$.
(β) Αν κάθε σημείο σε ένα συμπαγές διάστημα $I = [a,b]$ είναι σημείο συνέχειας της f, τότε η σύγκλιση $\int_{\widehat{\mathbb{R}}} (1-|\xi|/\lambda)^+ \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi \to f(x)$, $x \in I$, καθώς $\lambda \to \infty$, είναι ομοιόμορφη στο I.

18. (Θεώρημα Lebesgue στον $\mathbb{R}$) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h [f(x+h)+f(x-h)-2c]\,\mathrm{d}h = 0$$

για κάποια $x \in \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{C}$. Τότε

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = c.$$

Συμπεράνατε ότι $\int_{\widehat{\mathbb{R}}} (1-|\xi|/\lambda)^+ \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi \to f(x)$, καθώς $\lambda \to \infty$, Lebesgue-σχεδόν παντού.

19. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ η οποία είναι συνεχής στο 0 και με $\widehat{f}(\xi) \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in \widehat{R}$. Δείξτε ότι $\widehat{f} \in L^1(\widehat{\mathbb{R}})$ και ότι $f(0) = (2\pi)^{-1} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

20. (α) Εξετάστε αν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $f * f = f$ στον $L^1(\mathbb{R})$ (δηλαδή η ισότητα ισχύει Lebesgue-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$) και αν ναι βρείτε την.
(β) Εξετάστε αν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $f * g = g$ στον $L^1(\mathbb{R})$ (δηλαδή η ισότητα ισχύει Lebesgue-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$), για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$.
[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό Fourier.]

21. Υπενθυμίζεται ότι, για $y \in \mathbb{R}$ και $f \in L^1(\mathbb{R})$, f_y συμβολίζει την συνάρτηση $f_y(x) := f(x-y)$, $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή την μεταφορά της f κατά y. Έστω $y \in \mathbb{R}$ και $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $g := f_y - f$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{g}$ της g έχει άπειρες ρίζες.

22. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \mathrm{d}x.$$

23. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1(\mathbb{R})$, τέτοια ώστε $\widehat{g}(\xi) > 0$ για κάθε $\xi > 0$ και $\widehat{g}(\xi) = 0$ για $\xi \leqslant 0$.
[*Υπόδειξη*: Αν $f(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(\xi)$, $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$, υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier $\widehat{f}(x)$ της f και κατόπιν τον μετασχηματισμό Fourier $\widehat{f*f}(x)$ της $f*f$.]

24. (α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C < +\infty$, τέτοια ώστε

$$\left| \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin\xi}{\xi}\, \mathrm{d}\xi \right| \leqslant C,$$

για κάθε $0 < \varepsilon \leqslant R < +\infty$.
(β) Δείξτε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ είναι περιττή συνάρτηση, και πιο συγκεκριμένα αν $f(x) = -f(-x)$ για Lebesgue-σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left| \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\, \mathrm{d}\xi \right| \leqslant C \|f\|_1,$$

για κάθε $0 < \varepsilon \leqslant R < +\infty$.
(γ) Έστω $g\colon \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$ μία συνεχής περιττή συνάρτηση τέτοια ώστε $g(\xi) = \ln\xi$ για $\xi \geqslant 2$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\widehat{f} = g$. Αυτό δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\widehat{\mathbb{R}})$, $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$, δεν είναι επί.

25. Για $A \subseteq L^1(\mathbb{R})$, συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή του θήκη: $g \in \overline{A}$ ανν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $f \in A$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Για $f \in L^1(\mathbb{R})$, έστω T_f το σύνολο των (κλάσεων ισοδυναμίας) συναρτήσεων που είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί μεταφορών της f, δηλαδή (κλάσεων ισοδυναμίας) συναρτήσεων της μορφής

$$g = c_1 f_{y_1} + \cdots + c_k f_{y_k},$$

όπου $c_1, \ldots, c_k \in C$ και $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$.
(α) Δείξτε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$, τότε $\widehat{g}(\xi) = 0$ για κάθε $g \in \overline{T_f}$.
(β) Δείξτε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\overline{T_f} = L^1(\mathbb{R})$, τότε $\widehat{f}(\xi) \neq 0\ \forall\, \xi \in \widehat{\mathbb{R}}$.
[*Σημείωση*: Ως συνήθως, $f_y(x) = f(x-y)$ για $x, y \in \mathbb{R}$ και $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.]

26. Έστω $\mu \in M(\mathbb{R})$ κανονικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \widehat{\mu}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi \xrightarrow{(T\to\infty)} \mu\big(\{x\}\big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός μέτρου $\mu \in M(\mathbb{R})$ ορίζεται ως $\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\mu(x)$ για $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$ και είναι καλά ορισμένος αφού ο $M(\mathbb{R})$ αποτελείται από τα κανονικά μιγαδικά, και άρα πεπερασμένα, μέτρα Borel στον $\mathbb{R}$.

27. (Το ανάλογο του Θεωρήματος του Wiener για το $\mathbb{R}$) Για $\mu \in M(\mathbb{R})$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\widehat{\mu}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi \xrightarrow{(T\to\infty)} \sum_{x\in\mathbb{R}} \big|\mu\big(\{x\}\big)\big|^2.$$

28. Έστω $A(\widehat{\mathbb{R}}) := \Big\{\widehat{f}\colon f \in L^1(\mathbb{R})\Big\}$. Για $n \in \mathbb{N}$, έστω επίσης $C_{\mathrm{c}}^{n}(\widehat{\mathbb{R}})$ ο χώρος των συναρτήσεων $\varphi\colon \widehat{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ που έχουν n συνεχείς παραγώγους και συμπαγή φορέα.
(α) Δείξτε ότι κάθε $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{n}(\widehat{\mathbb{R}})$ είναι μετασχηματισμός Fourier $\varphi = \widehat{f}$ κάποιας $f \in L^1(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την ανισότητα $|f(x)| \leqslant C\,|x|^{-n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και κάποια σταθερά $C < +\infty$ (εξαρτώμενη από την φ), εφόσον $n > 1$. Συμπεράνατε ότι η f ικανοποιεί επίσης την $|f(x)| \leqslant C'\,(1+|x|)^{-n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάποια σταθερά $C' < +\infty$.

(β) Από το (α), κάθε δις συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα ανήκει στην $A(\widehat{\mathbb{R}})$. Συμπεράνατε ότι η $A(\widehat{\mathbb{R}})$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C_0(\widehat{\mathbb{R}})$, αλλά $A(\widehat{\mathbb{R}}) \neq C_0(\widehat{\mathbb{R}})$.

29. (α) Δείξτε ότι, αν $\varphi, \psi \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, τότε $\varphi * \psi \in A(\widehat{\mathbb{R}})$.
(β) Δείξτε ότι $A(\widehat{\mathbb{R}}) = L^2(\widehat{\mathbb{R}}) * L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, όπου $L^2(\widehat{\mathbb{R}}) * L^2(\widehat{\mathbb{R}}) := \left\{\varphi * \psi \colon \varphi, \psi \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})\right\}\cdot$ δηλαδή δείξτε ότι κάθε στοιχείο $\varphi = \widehat{f}$ της $A(\widehat{\mathbb{R}})$ $(f \in L^1(\mathbb{R}))$ γράφεται ως $f = \varphi * \psi$ για κάποιες $\varphi, \psi \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$.
[*Υπόδειξη*: Plancherel και Parseval.]