Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 1
Βασικές έννοιες Πιθανότητας
Αξιωματική θεμελίωση

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

8 Οκτωβρίου 2014

Πλαίσιο

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα = Αριθμός στο $[0, 1]$ που αντιστοιχεί σε ενδεχόμενο.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα = Αριθμός στο $[0,1]$ που αντιστοιχεί σε ενδεχόμενο.
- Τυχαία μεταβλητή =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα = Αριθμός στο $[0, 1]$ που αντιστοιχεί σε ενδεχόμενο.
- Τυχαία μεταβλητή = Αριθμητικό χαρακτηριστικό.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος:
  $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος:
  $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι $6 = \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος:
  $\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3
    $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) =$

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι $6 = \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) =$

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι $6 = \{(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.
- Τυχαίες μεταβλητές:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.
- Τυχαίες μεταβλητές:
  - $X_1 =$ το άθροισμα των ζαριών.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.
- Τυχαίες μεταβλητές:
  - $X_1 =$ το άθροισμα των ζαριών.
  - $X_2 =$ η πρώτη ζαριά.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα: Σειρά τερματισμού.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα: Σειρά τερματισμού.
- Δειγματικός χώρος $= \Omega =$ Σύνολο μεταθέσεων 10 αλόγων.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα: Σειρά τερματισμού.
- Δειγματικός χώρος $= \Omega =$ Σύνολο μεταθέσεων 10 αλόγων.
- $|\Omega| = 10!$.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.
- Δειγματικός χώρος:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.
- Δειγματικός χώρος:
  $\Omega = \{-, A, K, AA, AK, KA, KK, AAA, \ldots\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.
- Δειγματικός χώρος:
  $\Omega = \{-, A, K, AA, AK, KA, KK, AAA, \ldots\}$.
- Ω διακριτός (αριθμήσιμος), αλλά $|\Omega| = \infty$.

Έννοιες πιθανότητας

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.
- Εμπειρική πιθανότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.
- Εμπειρική πιθανότητα.

$$\Downarrow$$

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.
- Εμπειρική πιθανότητα.

$$\Downarrow$$

Αξιωματική θεμελίωση του Kolmogorov.

Κλασική πιθανότητα

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Π.χ. Πιθανότητα ένας Έλληνας να έχει ύψος ≥ 1.80

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Π.χ. Πιθανότητα ένας Έλληνας να έχει ύψος ≥ 1.80 = Ποσοστό Ελλήνων με ύψος ≥ 1.80

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Π.χ. Πιθανότητα ένας Έλληνας να έχει ύψος ≥ 1.80
  = Ποσοστό Ελλήνων με ύψος ≥ 1.80
  = Πλήθος Ελλήνων με ύψος ≥ 1.80 / Πλήθος Ελλήνων.

Οριακή σχετική συχνότητα

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις $=$ Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου $=$ Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου = Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.
- Π.χ. Ρίψη νομίσματος επ' άπειρον.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου = Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.
- Π.χ. Ρίψη νομίσματος επ' άπειρον. Πιθανότητα ένδειξης "Γράμματα"

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου = Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.
- Π.χ. Ρίψη νομίσματος επ΄ άπειρον.
  Πιθανότητα ένδειξης "Γράμματα"
  = Οριακή σχετική συχνότητα ένδειξης "Γράμματα".

Γεωμετρική πιθανότητα

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία (= σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  = Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία (= σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.
- Π.χ. Ρίχνω τυχαία βέλος σε κυκλικό στόχο.

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία ($=$ σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.
- Π.χ. Ρίχνω τυχαία βέλος σε κυκλικό στόχο.
  Πιθανότητα πετυχαίνω "κέντρο"

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία ($=$ σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.
- Π.χ. Ρίχνω τυχαία βέλος σε κυκλικό στόχο.
  Πιθανότητα πετυχαίνω "κέντρο"
  $=$ Εμβαδόν "κέντρου" / Εμβαδόν κυκλικού στόχου.

Εμπειρική πιθανότητα

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.
- Π.χ. Το Ομηρικό Πρόβλημα:

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.
- Π.χ. Το Ομηρικό Πρόβλημα:
  Ποιά η πιθανότητα η Ιλιάδα και η Οδύσσεια να είναι έργο του ίδιου δημιουργού (Ομήρου);

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.
- Π.χ. Το Ομηρικό Πρόβλημα:
  Ποιά η πιθανότητα η Ιλιάδα και η Οδύσσεια να είναι έργο του ίδιου δημιουργού (Ομήρου);
- Π.χ. Πιθαν. να βρω σήμερα τους γονείς μου σπίτι;

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο A $\to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο A $\to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)
  3. $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. (σ-προσθετικότητα)

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
  1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
  2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
    2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
    2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
  1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
  2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ; ;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
  1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
  2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ; ; ;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
    2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ; ; ;
- Να μετακινηθεί στην πόρτα που δεν άνοιξε (πιθ. κέρδους 2/3). Η στρατηγική να μείνει πιστός στην επιλογή του είναι υποδεέστερη (πιθ. κέρδους 1/3).

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- $P($ο A να φέρει το άθροισμα των $B, \Gamma)=$;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- $P($ο A να φέρει το άθροισμα των $B, \Gamma)$=; ;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- $P($ο A να φέρει το άθροισμα των $B, \Gamma)=$; ; ;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- P(ο A να φέρει το άθροισμα των B, Γ)=; ; ; ;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- P(ο A να φέρει το άθροισμα των B, Γ)=; ; ; ; $= \frac{15}{6^3}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}.$

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4\times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $=\frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $=\frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $=\frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $=\frac{6}{16}$.
- P(τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.
- P(τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.
- P(τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.
- P(τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4)=; ; ; $= \frac{7}{16}$.

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από $15'$)=;

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από 15′)=; ;

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από 15′)=; ; ;

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από $15'$)=; ; ; $= \frac{7}{16}$.

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- $P($κερδίζει ο παίκτης$)=$;

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- P(κερδίζει ο παίκτης)=; ;

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- P(κερδίζει ο παίκτης)=; ; ;

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- P(κερδίζει ο παίκτης)=; ; ; $= \frac{(a-2r)^2}{a^2}$.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 1.1 Σύνολα
  - 1.2 Μοντέλα Πιθανοτήτων
- Ασκήσεις:
  - 1.1 Προβλήματα 1,3
  - 1.2 Προβλήματα 5,6,7