Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 5
Απαρίθμηση
Συνδυαστική για Πιθανότητες

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

21 Οκτωβρίου 2014

Συνδυαστική

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
Γενικά;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
  Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
  Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
  Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
  Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;
- Για $n = 4$ και $k = 2$;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;
- Για $n = 4$ και $k = 2$;
ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ: 6 τρόποι.

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
  (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
  Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
  Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;
- Για $n = 4$ και $k = 2$;
  ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ: 6 τρόποι.
  Γενικά;

Συνδυαστική και Πιθανότητες

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος στοιχείων του δ.χ.}\Omega}.$$

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος στοιχείων του δ.χ.}\Omega}.$$

- Π.χ. Όταν ένα ενδεχόμενο A αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία με πιθανότητα p.

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος στοιχείων του δ.χ.}\Omega}.$$

- Π.χ. Όταν ένα ενδεχόμενο A αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία με πιθανότητα p.

$$P(A) = p \times (\text{Πλήθος στοιχείων του } A).$$

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.
- Στο στάδιο i υπάρχουν n_i το πλήθος επιλογές, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.
- Στο στάδιο i υπάρχουν n_i το πλήθος επιλογές, $i = 1, 2, \ldots, r$.
- Το είδος των επιλογών στο στάδιο i μπορεί να εξαρτάται από ποιές επιλογές έγιναν στα προηγούμενα στάδια, αλλά το πλήθος των επιλογών δεν εξαρτάται.

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.
- Στο στάδιο i υπάρχουν n_i το πλήθος επιλογές, $i = 1, 2, \ldots, r$.
- Το είδος των επιλογών στο στάδιο i μπορεί να εξαρτάται από ποιές επιλογές έγιναν στα προηγούμενα στάδια, αλλά το πλήθος των επιλογών δεν εξαρτάται.
- Τότε ο συνολικός αριθμός αντικειμένων (αποτελεσμάτων της διαδικασίας) είναι $n_1 n_2 \cdots n_r$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
  (k-μετάθεση).

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$. (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
  (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
  (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$
  = Τοποθέτηση σε σειρά όλων των στοιχείων του $\mathcal{S}$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
  (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$
  = Τοποθέτηση σε σειρά όλων των στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διάταξη n ανά k με επανάληψη του $\mathcal{S}$

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
  (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$
  = Τοποθέτηση σε σειρά όλων των στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διάταξη n ανά k με επανάληψη του $\mathcal{S}$
  = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που μπορεί να επαναλαμβάνονται.**

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k

  $=$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $=$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 =$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $=$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n =$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
$= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.

Συνδυασμοί

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.
  = Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  = Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  = Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διαφορά διάταξης και συνδυασμού n ανά k:

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.
  = Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  = Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διαφορά διάταξης και συνδυασμού n ανά k:
  Συνδυασμός: Επιλογή k στοιχείων.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  $=$ **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  $=$ Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  $=$ Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διαφορά διάταξης και συνδυασμού n ανά k:
  Συνδυασμός: Επιλογή k στοιχείων.
  Διάταξη: Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων.

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k}$

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!}$

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Απόδειξη:

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
$$= \binom{n}{k} = \frac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
- Απόδειξη:
1 συνδ. n ανά $k \to k!$ διαφορετικές διατάξεις n ανά k.

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Απόδειξη:
  1 συνδ. n ανά k $\to$ $k!$ διαφορετικές διατάξεις n ανά k.
  $\Downarrow$

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Απόδειξη:
  1 συνδ. n ανά k $\rightarrow$ $k!$ διαφορετικές διατάξεις n ανά k.
  $\Downarrow$
  (Πλήθος συνδ. n ανά k) $\times\ k! =$ Πλήθος διατ. n ανά k.

Διαμερίσεις

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
    1. $|A_i| = n_i$,

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
    1. $|A_i| = n_i$,
    2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
    3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
    1. $|A_i| = n_i$,
    2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
    3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
    1. $|A_i| = n_i$,
    2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
    3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή στοιχείων για το σύνολο A_i.

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή στοιχείων για το σύνολο A_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k}$

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^k A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή στοιχείων για το σύνολο A_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή θέσεων για το σύμβολο a_i.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή θέσεων για το σύμβολο a_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k}$

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή θέσεων για το σύμβολο a_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Ποιός είναι ο συνολικός αριθμός υποσυνόλων του;

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Ποιός είναι ο συνολικός αριθμός υποσυνόλων του;
- Απάντηση:

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Ποιός είναι ο συνολικός αριθμός υποσυνόλων του;
- Απάντηση: 2^n.

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

- Πόσους αναγραμματισμούς έχει η λέξη "ΜΑΛΑΜΑΤΑ";

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

- Πόσους αναγραμματισμούς έχει η λέξη "ΜΑΛΑΜΑΤΑ";
- Απάντηση:

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

- Πόσους αναγραμματισμούς έχει η λέξη "ΜΑΛΑΜΑΤΑ";
- Απάντηση: $\frac{8!}{4!2!1!1!}$.

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.
- Πιθανότητα k κορώνων σε n ρίψεις;

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.
- Πιθανότητα k κορώνων σε n ρίψεις;
- Απάντηση:

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.
- Πιθανότητα k κορώνων σε n ρίψεις;
- Απάντηση: $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

- Πόσες ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει η εξίσωση
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k;$$

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

- Πόσες ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει η εξίσωση
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k;$$

- Απάντηση:

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

- Πόσες ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει η εξίσωση

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k;$$

- Απάντηση: $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Άσκηση 1: Αριθμοί με ιδιότητες

Άσκηση 1: Αριθμοί με ιδιότητες

- Πόσοι 7-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία;

Άσκηση 1: Αριθμοί με ιδιότητες

- Πόσοι 7-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία;
- Πόσοι άρτιοι 7-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  5. Με πρόεδρο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  5. Με πρόεδρο;
  6. Με γυναίκα πρόεδρο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  5. Με πρόεδρο;
  6. Με γυναίκα πρόεδρο;
  7. Με γυναίκα πρόεδρο και άντρα αντιπρόεδρο;

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.
- Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις τους ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια;

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.
- Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις τους ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια; ;

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.
- Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις τους ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  1.6 Αρίθμηση

- Ασκήσεις:

  1.6 Προβλήματα: 51, 52, 53, 55, 57