Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 11
Πολυδιάστατες διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

12 Νοεμβρίου 2014

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.
- (X, Y) διακριτή $\Leftrightarrow$ Παίρνει αριθμήσιμο πλήθος τιμών.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.
- (X, Y) διακριτή $\Leftrightarrow$ Παίρνει αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$: από κοινού σμπ. χαρακτηρίζει την (X, Y).

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.
- (X, Y) διακριτή $\Leftrightarrow$ Παίρνει αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$: από κοινού σμπ. χαρακτηρίζει την (X, Y).
- Για την ώρα περιοριζόμαστε σε διδιάστ. διακριτές τ.μ.

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y)\in A)=\sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y).$$

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y)\in A)=\sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y).$$

- Περιθώριες σμπ:

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y)\in A)=\sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y).$$

- Περιθώριες σμπ:

$$p_X(x)=P(X=x)=\sum_y p_{X,Y}(x,y).$$

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} p_{X,Y}(x,y).$$

- Περιθώριες σμπ:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y).$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y).$$

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  = Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$;

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ;

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  = Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ; ;

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ; ;
- Λύση:

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  = Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ; ;
- Λύση:

$$p_Z(z) = \sum_{(x,y):g(x,y)=z} p_{X,Y}(x, y).$$

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$

Προσοχή !!!: $E[g(X,Y)] \neq g(E[X], E[Y])$.

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)p_{X,Y}(x,y).$$
Προσοχή !!!: $E[g(X,Y)] \neq g(E[X],E[Y])$.
- Μέση τιμή γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$
Προσοχή !!!: $E[g(X,Y)] \neq g(E[X], E[Y])$.
- Μέση τιμή γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c.$$

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X+Y=4) =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X+Y=4) =$; ; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X+Y=4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) = ; \; ; \; ;$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ; \; ; \; ;$
- $P(X + Y = 4) = ; \; ; \; ;$
- $Z = X + 2Y + 1.$ $p_Z(z) = ; \; E[Z] =;$

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X+Y=4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X+Y=4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $E[XY] =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $E[XY] =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $E[XY] =$; ; ;

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1. Όμοια ορίζονται και οι άλλες.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1. Όμοια ορίζονται και οι άλλες.
- $E[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ $= \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} g(x_1, x_2 \ldots, x_n) p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1. Όμοια ορίζονται και οι άλλες.
- $E[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ $= \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} g(x_1, x_2 \ldots, x_n) p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- $E[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + b]$ $= a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \cdots + a_nE[X_n] + b$.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\text{Bin}(n, p)$.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n,p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n,p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- $E[X] =$;

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- $E[X] =$; ;

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- $E[X] = ; \ ; \ ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- X= Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X=0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n)=P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους})=\frac{1}{n!}$.
- $P(X=0)=P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X]=$;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] =$; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X=0) = P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] =$; ; ;

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:
  $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.
  A: Ήρθε άρτιος.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.
  A: Ήρθε άρτιος.
  $p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:
$p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
X: ένδειξη.
A: Ήρθε άρτιος.
$p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
$p_{X|A}(x) = \frac{1}{3}$, $x = 2, 4, 6$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$
- Όμοια:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$
- Όμοια: $p_{Y|X}(y|x) \geq 0$, $\sum_y p_{Y|X}(y|x) = 1$.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{Y|X}(y|0) =$; $p_{Y|X}(y|1) =$; $p_{Y|X}(y|2) =$; $p_{Y|X}(y|3) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = ;\; p_Y(y) = ;\; E[X] = ;\; E[Y] = ;\; ;\; ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$.

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \ x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = \ ; \ p_Y(y) = \ ; \ E[X] = \ ; \ E[Y] = \ ; \ ; \ ;$
- $Z = X + Y + 1. \ p_Z(z) = \ ; \ E[Z] =; \ ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \ x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ; \; ; \; ;$
- $Z = X + Y + 1. \; p_Z(z) = ; \; E[Z] =; \; ; \; ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ; \; ; \; ;$
- $U = \min(X, Y), \; V = \max(X, Y). \; p_{U,V}(u, v) =; \; ; \; ;$
- $E[U + V] = ; \; ; \; ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$; ; ;
- $p_U(u) =$;, $p_V(v) =$;, $E[V] =$;, $E[U] =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;\ ;$
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) = ;\ E[Z] =;\ ;\ ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ;\ ;\ ;$
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =;\ ;\ ;$
- $E[U + V] = ;\ ;\ ;$
- $p_U(u) = ;,\ p_V(v) = ;,\ E[V] = ;,\ E[U] = ;\ ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$; ; ;
- $p_U(u) =$;, $p_V(v) =$;, $E[V] =$;, $E[U] =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$; ; ;
- $p_U(u) =$;, $p_V(v) =$;, $E[V] =$;, $E[U] =$; ; ;
- $p_{U|V}(u|v) =$;, $p_{V|U}(v|u) =$; $p_{V|\{X=k\}}(v) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;\ ;$
- $Z = X + Y + 1.\ p_Z(z) = ;\ E[Z] =;\ ;\ ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ;\ ;\ ;$
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =;\ ;\ ;$
- $E[U + V] = ;\ ;\ ;$
- $p_U(u) = ;,\ p_V(v) = ;,\ E[V] = ;,\ E[U] = ;\ ;\ ;$
- $p_{U|V}(u|v) = ;,\ p_{V|U}(v|u) =;\ p_{V|\{X=k\}}(v) = ;\ ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ; \; ; \; ;$
- $Z = X + Y + 1.$ $p_Z(z) = ; \; E[Z] =; \; ; \; ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ; \; ; \; ;$
- $U = \min(X,Y), \; V = \max(X,Y).$ $p_{U,V}(u,v) =; \; ; \; ;$
- $E[U + V] = ; \; ; \; ;$
- $p_U(u) = ;, \; p_V(v) = ;, \; E[V] = ;, \; E[U] = ; \; ; \; ;$
- $p_{U|V}(u|v) = ;, \; p_{V|U}(v|u) =; \; p_{V|\{X=k\}}(v) = ; \; ; \; ;$

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 2.5 Από κοινού σμπ πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών
  - 2.6 Δέσμευση
- Ασκήσεις:
  - 2.5 Προβλήματα 24, 26, 27
  - 2.6 Πρόβλημα 31