Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 12
Δέσμευση τυχαίων μεταβλητών
Δεσμευμένη μέση τιμή

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

20 Νοεμβρίου 2014

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.
  A: Ήρθε άρτιος.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.
  A: Ήρθε άρτιος.
  $p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:
$p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
X: ένδειξη.
A: Ήρθε άρτιος.
$p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
$p_{X|A}(x) = \frac{1}{3}$, $x = 2, 4, 6$.

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) = P(A)p_{X|A}(x).$$

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \;=\; P(A)p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \; = \; P(A) p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) p_{X|A_i}(x).$$

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \;=\; P(A) p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) p_{X|A_i}(x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \;=\; P(A)p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)p_{X|A_i}(x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$P(A|X = x) = \frac{P(A)p_{X|A}(x)}{p_X(x)}.$$

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- A: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε n φορές.

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- A: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε n φορές.
- $p_{X|A}(x) =$;

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- A: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε n φορές.
- $p_{X|A}(x) = ;\ ;$

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- A: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε n φορές.
- $p_{X|A}(x) = ; \; ; \; ;$

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- A: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε n φορές.
- $p_{X|A}(x) = ; \; ; \; ; \; p_{X|A^c} = ;$

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- A: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε n φορές.
- $p_{X|A}(x) = ;\ ;\ ;\ p_{X|A^c} = ;\ ;$

Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- X: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- A: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε n φορές.
- $p_{X|A}(x) = ;\ ;\ ;\ p_{X|A^c} = ;\ ;\ ;$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X=x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}.$$
- Όμοια:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X=x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}.$$
- Όμοια: $p_{Y|X}(y|x) \geq 0$, $\sum_y p_{Y|X}(y|x) = 1$.

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$p_Y(y) = \sum_x p_X(x)p_{Y|X}(y|x).$$

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$p_Y(y) = \sum_x p_X(x)p_{Y|X}(y|x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$p_Y(y) = \sum_x p_X(x)p_{Y|X}(y|x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)}.$$

Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.

Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.

Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- X: Αριθμός ερωτήσεων.

Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- X: Αριθμός ερωτήσεων.
- Y: Αριθμός λανθασμένων απαντήσεων.

Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- X: Αριθμός ερωτήσεων.
- Y: Αριθμός λανθασμένων απαντήσεων.
- $p_{X,Y}(x,y) = ;$, $p_X(x) = ;$, $p_Y(y) = ;$

Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- X: Αριθμός ερωτήσεων.
- Y: Αριθμός λανθασμένων απαντήσεων.
- $p_{X,Y}(x,y) =$;, $p_X(x) =$;, $p_Y(y) =$;

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ορισμοί

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ορισμοί

- Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:
$$E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x).$$
- Δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:
$$E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y).$$

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x).$$

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x).$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο A με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x).$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

$$E[g(X)|Y = y] = \sum_x g(x) p_{X|Y}(x|y).$$

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X | A_i].$$

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα: $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

$$E[X] = \sum_{y} p_Y(y) E[X|Y = y].$$

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.
- X: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.
- X: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] =$;

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.
- X: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] = ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.
- X: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] =$; ; ; $Var[X] =$;

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.
- X: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] = ;\ ;\ ;\ Var[X] = ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.
- X: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] =$; ; ; $Var[X] =$; ; ;

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες. Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.
- Μέσος αριθμός ημερών μέχρι την ελευθερία $=$;

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.
- Μέσος αριθμός ημερών μέχρι την ελευθερία $=$; ;

Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.
- Μέσος αριθμός ημερών μέχρι την ελευθερία = ; ; ;

Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι r συνεχόμενες K

Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι r συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1-p$.

Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι r συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1 - p$.
- T_r: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν r συνεχόμενες κορώνες.

Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι r συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1-p$.
- T_r: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν r συνεχόμενες κορώνες.
- $E[T_r] =$;

Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι r συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1 - p$.
- T_r: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν r συνεχόμενες κορώνες.
- $E[T_r] =$; ;

Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι r συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1 - p$.
- T_r: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν r συνεχόμενες κορώνες.
- $E[T_r] =$; ; ;

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$.

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p.

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p.
- K: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p.
- K: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$;

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p.
- K: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$;
- $P(K = k) =$;

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p.
- K: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) = ;$
- $P(K = k) = ;$
- $E[K|N = n] = ;$

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p.
- K: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$;
- $P(K = k) =$;
- $E[K|N = n] =$;
- $E[N|K = k] =$;

Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα N αυγά.
- Η τ.μ. N ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα p.
- K: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$;
- $P(K = k) =$;
- $E[K|N = n] =$;
- $E[N|K = k] =$;
- $E[N] =$;, $E[K] =$;

Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.

Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.
- N ακέραια, μη-αρνητική τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με με $E[N] = \mu_N$ και $Var[N] = \sigma_N^2$.

Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.
- N ακέραια, μη-αρνητική τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με με $E[N] = \mu_N$ και $Var[N] = \sigma_N^2$.
- $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.
- N ακέραια, μη-αρνητική τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με με $E[N] = \mu_N$ και $Var[N] = \sigma_N^2$.
- $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
- $E[S_N] =$;, $Var[S_N] =$;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  2.6 Δέσμευση

- Ασκήσεις:

  Τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.