Πιθανότητες και Στατιστική Διάλεξη 13 Δέσμευση - ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

20 Νοεμβρίου 2014

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- X ανεξάρτητη από το A όταν
  $P(X = x, A) = P(X = x)P(A) = p_X(x)P(A)$, για κάθε x.

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- X ανεξάρτητη από το A όταν
  $$P(X = x, A) = P(X = x)P(A) = p_X(x)P(A), \quad \text{για κάθε } x.$$
- Ισοδύναμα: X ανεξάρτητη από το A με $P(A) > 0$ όταν
  $$p_{X|A}(x) = p_X(x), \quad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.
- A: Άρτιο πλήθος κορώνων.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.
- A: Άρτιο πλήθος κορώνων.
- X, A ανεξάρτητα ;

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.
- A: Άρτιο πλήθος κορώνων.
- X, A ανεξάρτητα ;
- Y, A ανεξάρτητα ;

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:
$p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$
- Όμοια:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$
- Όμοια: $p_{Y|X}(y|x) \geq 0$, $\sum_y p_{Y|X}(y|x) = 1$.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$
- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$
- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$

ή

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$

ή

$$p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_X(x) > 0.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$

ή

$$p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_X(x) > 0.$$

- Διαισθητικά: X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ Η γνώση της τιμής της μιας δεν αλλάζει τις πιθανότητες των τιμών της άλλης.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:
(X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:
  (X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.
  $f(x) = 1$, $g(y) = y$.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:
  (X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.
  $f(x) = 1$, $g(y) = y$.
  X, Y ανεξάρτητες ;

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:
  (X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.
  $f(x) = 1$, $g(y) = y$.
  X, Y ανεξάρτητες ;
  $f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες ;

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY]\neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

- Προσοχή!:

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

- Προσοχή!:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY]\neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:
$$X,Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY]=E[X]E[Y].$$
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$
$$X,Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)]=E[f(X)]E[g(Y)].$$
- Προσοχή!:
$$E[XY]=E[X]E[Y] \not\Rightarrow X,Y \text{ ανεξάρτητες}.$$
- Παράδειγμα:

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$
- Προσοχή!:
$$E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$
- Παράδειγμα:
X με $p_X(-1) = p(0) = p_X(1) = \frac{1}{3}$. $Y = X^2$.

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

- Προσοχή!:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$

- Παράδειγμα:
  X με $p_X(-1) = p(0) = p_X(1) = \frac{1}{3}$. $Y = X^2$.
  Ισχύει $E[XY] = E[X]E[Y]$; X, Y ανεξάρτητες ;

Ανεξαρτησία και διασπορά

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y]\neq Var[X]+Var[Y]$.
- Αλλά:

  X,Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$.
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

  X, Y ανεξ. $\Rightarrow Var[f(X)+g(Y)] = Var[f(X)]+Var[g(Y)]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$
  X, Y ανεξ. $\Rightarrow Var[f(X)+g(Y)] = Var[f(X)]+Var[g(Y)]$.
- Προσοχή!:

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

  X, Y ανεξ. $\Rightarrow Var[f(X)+g(Y)] = Var[f(X)]+Var[g(Y)]$.
- Προσοχή!:

  $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] \not\Rightarrow X, Y$ ανεξάρτητες.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n).$
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n).$
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $$p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n).$$
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.
- Επιπλέον: Αν X, Y, Z ανεξάρτητες τότε

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1 X_2 \cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.
- Επιπλέον: Αν X, Y, Z ανεξάρτητες τότε
  $f(X, Y), g(Z)$ ανεξάρτητες,

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.
- Επιπλέον: Αν X, Y, Z ανεξάρτητες τότε
  $f(X, Y), g(Z)$ ανεξάρτητες,
  $q(X), r(Y, Z)$ ανεξάρτητες κ.λ.π.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n,p)$.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\text{Bin}(n, p)$.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\text{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- $E[X] = ;\ Var[X] = ;$

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson(λ).

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson(λ).
- Σμπ:

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson(λ).
- Σμπ:

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

- $E[X] =$; $Var[X] =$;

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n, p)$.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. $\mathrm{NegBin}(n, p)$.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n,p)$.
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. $\mathrm{NegBin}(n,p)$.
- Για $n=1$ έχουμε τη γεωμετρική τ.μ.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την NegBin(n,p).
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. NegBin(n,p).
- Για $n = 1$ έχουμε τη γεωμετρική τ.μ.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{k-n}p^n, \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Για $n = 1$ έχουμε τη γεωμετρική τ.μ.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{k-n}p^n, \; k = 1, 2, 3, \ldots .$$

- $E[X] = \,;\; Var[X] = \,;$

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.
- Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την $p_X(x)$.

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.
- Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την $p_X(x)$.
- Ως εκτίμηση του μεγέθους παίρνουμε το δειγματικό μέσο (δειγματική μέση τιμή).

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.
- Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την $p_X(x)$.
- Ως εκτίμηση του μεγέθους παίρνουμε το δειγματικό μέσο (δειγματική μέση τιμή).

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

- $E[\bar{X}_n] =$; $Var[\bar{X}_n] =$;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  2.7 Ανεξαρτησία

- Ασκήσεις:

  Τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.