Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 14
Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές
Συνάρτηση κατανομής

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

8 Δεκεμβρίου 2014

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: Συνάρτ. κατανομής τ.μ.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: Συνάρτ. κατανομής τ.μ.
- Συμβολισμός: Κεφαλαία γράμματα για τις τ.μ.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: Συνάρτ. κατανομής τ.μ.
- Συμβολισμός: Κεφαλαία γράμματα για τις τ.μ. Μικρά γράμματα για τις τιμές των τ.μ.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \dfrac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X \leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

  $= \Bigg\{$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X \leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ & \\ & \end{cases}$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X \leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ \end{cases}$$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X \leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$
- Στα πειράματα με συνεχή δειγματικό χώρο η συνάρτηση πιθανότητας δεν δίνει πληροφορία.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \le x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X \le x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $$= \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$
- Στα πειράματα με συνεχή δειγματικό χώρο η συνάρτηση πιθανότητας δεν δίνει πληροφορία.
- Η συνάρτηση κατανομής δίνει πληροφορία πάντα.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$ $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
$$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$
- Στα πειράματα με συνεχή δειγματικό χώρο η συνάρτηση πιθανότητας δεν δίνει πληροφορία.
- Η συνάρτηση κατανομής δίνει πληροφορία πάντα.
- Παρόλα αυτά προτιμάμε να σκεφτόμαστε με ενδεχόμενα του τύπου $X \simeq x$ παρά με $X \leq x$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:

$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:

$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

- Είναι:

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:

$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

- Είναι:

$$f_X(x) = 0, \; x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:
$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$
- Είναι:
$$f_X(x) = 0,\ x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2x,\ 0 < x < 1.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:
$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$
- Είναι:
$$f_X(x) = 0,\ x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2x,\ 0 < x < 1.$$
- Η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ περιέχει ίδια ποσότητα πληροφορίας για την X, όπως η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:
$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$
- Είναι:
$$f_X(x) = 0, \;\; x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2x, \;\; 0 < x < 1.$$
- Η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ περιέχει ίδια ποσότητα πληροφορίας για την X, όπως η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$.
- Πράγματι:
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \;\; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$

- Ιδιότητες της σππ:
    1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
    2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:
  1. $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:
  1. $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.
  2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$ $= P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$

- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:
  1. $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.
  2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$ $= P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$.
- $P(x < X \leq X + \delta x) \simeq f_X(x)\delta x$, για μικρά δx.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)dx$.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
    1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{ορς}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{ορς}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X-E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$
  2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:

  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$
  2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \stackrel{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \stackrel{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx.$$
  2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[aX + b] = aE[X] + b.$$
  $$Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X-E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$
  2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[aX+b] = aE[X]+b.$$
  $$Var[aX+b] = a^2 Var[X].$$
  3. Εναλλακτικός τύπος υπολογισμού διασποράς τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \stackrel{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \stackrel{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:

1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx.$$
2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$
$$Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$
3. Εναλλακτικός τύπος υπολογισμού διασποράς τ.μ.:
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- $X =$ Σημείο που επιλέχθηκε.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- X = Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή $\mathrm{Uniform}([a, b])$.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- X = Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή Uniform$([a, b])$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Uniform$([a, b])$.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0,1]$.
- X = Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή Uniform$([a,b])$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Uniform$([a,b])$.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{αν } x \in [a,b], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- X = Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή $\text{Uniform}([a, b])$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\text{Uniform}([a, b])$.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{αν } x \in [a, b], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = ;, F_X(x) = ;, E[X] = ;, Var[X] = ;$

Η εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\text{Exp}(\lambda)$.

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\text{Exp}(\lambda)$.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $F_X(x) = ;, E[X] = ;, Var[X] = ;$

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $F_X(x) = ;, E[X] = ;, Var[X] = ;$
- Αμνήμονη ιδιότητα: $P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $E[X] =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σπп:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = \,;$
- $E[X] = \,;$
- $Var[X] = \,;$
- $P(X \geq 1 | X \in [-1, 2]) = \,;$

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [-1, 2]) =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [0, 4]) =$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $Y = X^2$, $Z = e^X$.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;
- Σππ $f_Y(y)$, $f_Z(z)$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;
- Σππ $f_Y(y)$, $f_Z(z)$;
- $E[Y]$, $E[Z]$;

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = ;$

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = ;$
- $P(X > 1/2) = ;$

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = ;$
- $P(X > 1/2) = ;$
- $E[X] = ;, Var[X] = ;$

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow$ $F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.
  5. X συνεχής $\Rightarrow$ $F_X(x)$ συνεχής.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή}, \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής}. \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.
  5. X συνεχής $\Rightarrow F_X(x)$ συνεχής.
  6. X διακριτή $\Rightarrow p_X(x) = F_X(x) - F_X(x-)$.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow$ $F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.
  5. X συνεχής $\Rightarrow$ $F_X(x)$ συνεχής.
  6. X διακριτή $\Rightarrow$ $p_X(x) = F_X(x) - F_X(x-)$.
  7. X συνεχής $\Rightarrow$ $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 3.1 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και σππ
  - 3.2 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
- Ασκήσεις:
  - 3.1 Προβλήματα 1, 2, 3.
  - 3.2 Προβλήματα 5, 8.