Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 16
Πολυδιάστατες συνεχείς τ.μ.
Δέσμευση

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

10 Δεκεμβρίου 2014

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x, y)$, αν

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x+\delta x, y \leq Y \leq y+\delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y)\delta x \delta y$.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int\int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x+\delta x, y \leq Y \leq y+\delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y)\delta x\delta y$.
- Ιδιότητες:

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x+\delta x, y \leq Y \leq y+\delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y)\delta x\delta y$.
- Ιδιότητες:
  1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y) \in B} f_{X,Y}(x,y) dx dy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x + \delta x, y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y) \delta x \delta y$.
- Ιδιότητες:
  1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y) dx dy$
  2. $P(X \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx$.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y) \in B} f_{X,Y}(x,y) dx dy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x + \delta x, y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y) \delta x \delta y$.
- Ιδιότητες:
  1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y) dx dy$
  2. $P(X \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx$.
  3. $P(Y \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy$.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.
- Τότε:

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.
- Τότε:
  $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.
- Τότε:
  $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$.
  $P(Y \in A) = \int_A f_Y(y)dy$.

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.
- Σχέση σκ. και σππ:

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.
- Σχέση σκ. και σππ:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds.$$

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.
- Σχέση σκ. και σππ:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t) dt ds.$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Μέση τιμή

Μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.

Μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $g(x, y)$ συνάρτηση.

Μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $g(x, y)$ συνάρτηση.
- Ισχύει ο ανάλογος τύπος με τις διακριτές:
  $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$

Μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $g(x, y)$ συνάρτηση.
- Ισχύει ο ανάλογος τύπος με τις διακριτές:
  $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$
- Ισχύει η γραμμικότητα:
  $E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c.$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν $$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dydz.$$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dydz.$$
- Ανάλογες ιδιότητες για τη μέση τιμή. Π.χ.

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dx dy dz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dz.$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dy dz.$$
- Ανάλογες ιδιότητες για τη μέση τιμή. Π.χ.
$E[g(X, Y, Z)]$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) f_{X,Y,Z}(x, y, z) dx dy dz.$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dydz.$$
- Ανάλογες ιδιότητες για τη μέση τιμή. Π.χ.
$E[g(X, Y, Z)]$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z)f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$
$E[aX + bY + cZ + d] = aE[X] + bE[Y] + cE[Z] + d.$

Άσκηση 1: Σπп. σε ορθογώνιο.

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = ;$
- $f_X(x) = ;$

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = ;$
- $f_X(x) = ;$
- $f_Y(x) = ;$

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;
- $E[XY] =$;

Άσκηση 1: Σπп. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;
- $E[XY] =$;
- $F_{X,Y}(x,y) =$;

Άσκηση 2: Σπ. σε τρίγωνο.

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = ;$
- $f_X(x) = ;$
- $f_Y(x) = ;$
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \le Y \le \frac{2}{3}) = ;$
- $E[XY] = ;$

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;
- $E[XY] =$;
- $F_{X,Y}(x,y) =$;

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:
$$f_{X|\{X\in A\}}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X\in A)}, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  X συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  X συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) f_{X|A_i}(x).$$

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =$;

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =$; ;

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x|T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.
- Αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής: Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι ανεξάρτητος από την ηλικία.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  3.4 Από κοινού σππ πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών
  3.5 Δέσμευση

- Ασκήσεις:

  3.4 Πρόβλημα 15
  3.5 Πρόβλημα 18
  Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.