# Πιθανότητες και Στατιστική
# Διάλεξη 17
# Δέσμευση
# Ανεξαρτησία τ.μ.

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

12 Δεκεμβρίου 2014

# Δέσμευση σε ενδεχόμενο

# Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. $X$ δεδομένου ενός ενδεχομένου $A$ ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$

# Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. $X$ δεδομένου ενός ενδεχομένου $A$ ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:

# Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. $X$ δεδομένου ενός ενδεχομένου $A$ ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).

# Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σπп μια συνεχούς τ.μ. $X$ δεδομένου ενός ενδεχομένου $A$ ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

# Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. $X$ δεδομένου ενός ενδεχομένου $A$ ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:

# Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. $X$ δεδομένου ενός ενδεχομένου $A$ ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:
$$f_{X|X\in A}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X\in A)}, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

# Θεώρημα ολικής πιθανότητας

# Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  $X$ συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

# Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  $X$ συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$f_X(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) f_{X|A_i}(x).$$

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0.$
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0.$

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή $t$).

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή $t$).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή $t$).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =$ ;

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή $t$).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x|T > t) =$ ; ;

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή $t$).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ; \; ; \; ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή $t$).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =\ ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.

# Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- $T$ εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda$.
- Π.χ. $T$ μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή $t$).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.
- Αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής: Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι ανεξάρτητος από την ηλικία.

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$ ;

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$ ; ;

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ; ;

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$ ;

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$ ; ;

# Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$ ; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$ ; ; ;

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο $y$ με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο $y$ με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο $y$ με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο $y$ με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$
- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
    1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο $y$ με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
    1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).
    2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο $y$ με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$
- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
  1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Διαισθητικά:
$P(x \leq X \leq x + \delta x | y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X|Y}(x|y)\delta x$.

# Δέσμευση σε τυχαία μεταβλητή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- Για κάθε προκαθορισμένο $y$ με $f_Y(y) > 0$ η δεσμευμένη σππ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$
- Ιδιότητες της δεσμευμένης σππ:
  1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$, για κάθε $x$ (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Διαισθητικά:
$P(x \leq X \leq x + \delta x|y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X|Y}(x|y)\delta x$.
για μικρά $\delta x$, $\delta y$.

# Παράδειγμα

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x, y)$= ;

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x, y)$= ; ;

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x,y)$= ; ; ;

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x,y)$= ; ; ;
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$.

# Παράδειγμα

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- Σππ. $f_{X,Y}(x, y)$= ; ; ;
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$.
- Άρα

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{50} e^{-\frac{x}{50}} \frac{10}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{50(y-x)^2}{x^2}}, \quad x > 0.$$

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σπп.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx.$$

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx.$$

- **Κανόνας του Bayes:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σππ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx.$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x) f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)}.$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή

# Δεσμευμένη μέση τιμή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.

# Δεσμευμένη μέση τιμή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της $X$ ως προς γεγονός $A$:

# Δεσμευμένη μέση τιμή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της $X$ ως προς γεγονός $A$:

$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x)dx.$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της $X$ ως προς γεγονός $A$:

$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x) dx.$$

- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της $X$ ως προς $Y = y$:

# Δεσμευμένη μέση τιμή

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της $X$ ως προς γεγονός $A$:
$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x)dx.$$
- Ορισμός δεσμ. μέσης τιμής της $X$ ως προς $Y = y$:
$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx.$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx.$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx.$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ., $A$ ενδεχόμενο.
- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx.$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

$$E[g(X)|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx.$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) E[X|Y = y] dy.$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) E[X|Y = y] dy.$$

# Παράδειγμα

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1].$

# Παράδειγμα

- $(X,Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x,y) = c(2x+y),\ x \in [0,1],\ y \in [0,1].$
- $c =$ ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1].$
- $c = ;\ ;\ ;$

# Παράδειγμα

- $(X,Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x,y) = c(2x+y), \; x \in [0,1], \; y \in [0,1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \ x \in [0, 1], \ y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c = ; \; ; \; ;$
- $f_Y(y) \; ; \; ; \; ;$
- $f_{X|Y}(x|y) = \; ;$

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$ ; ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$ ; ; ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$ ; ; ;
- $E[X|Y = y] =$;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$ ; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$ ; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ; ;

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y), \; x \in [0, 1], \; y \in [0, 1].$
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$ ; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ; ;
- $E[X] =$ ;

# Παράδειγμα

- $(X,Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x,y) = c(2x+y),\ x \in [0,1],\ y \in [0,1]$.
- $c = ;\ ;\ ;$
- $f_Y(y)\ ;\ ;\ ;$
- $f_{X|Y}(x|y) = ;\ ;\ ;$
- $E[X|Y=y] =;\ ;\ ;$
- $E[X] = ;\ ;$

# Παράδειγμα

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(2x + y),\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]$.
- $c =$ ; ; ;
- $f_Y(y)$ ; ; ;
- $f_{X|Y}(x|y) =$ ; ; ;
- $E[X|Y = y] =$; ; ;
- $E[X] =$ ; ; ;

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$
- Ισοδύναμα: $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν
$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$

ή

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$

ή

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_X(x) > 0.$$

# Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σππ.
- $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σππ.
- $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: $X$, $Y$ ανεξάρτητες όταν

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_Y(y) > 0.$$

ή

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } f_X(x) > 0.$$

- Διαισθητικά: $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow$ Η γνώση της τιμής της μιας δεν αλλάζει τις πιθανότητες των τιμών της άλλης.

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Καμιά αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει.

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Καμιά αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει.
- Χαρακτηρισμός ανεξαρτησίας:

# Ανεξαρτησία, συναρτ. τ.μ., μέση τιμή, διασπορά

- $X$ και $Y$ τ.μ.
- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
  $X, Y$ ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Καμιά αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει.
- Χαρακτηρισμός ανεξαρτησίας:
  $X, Y$ ανεξάρτητες
  $\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$
  για όλα τα ενδεχόμενα $A$ και $B$.

# Άσκηση 1

# Άσκηση 1

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1].$

# Άσκηση 1

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1), \ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- $X, Y$ ανεξάρτητες ;

# Άσκηση 1

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- $X, Y$ ανεξάρτητες ; ;

# Άσκηση 1

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- $X, Y$ ανεξάρτητες ; ; ;

# Άσκηση 2

# Άσκηση 2

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.

# Άσκηση 2

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y),\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- $X, Y$ ανεξάρτητες ;

# Άσκηση 2

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y), \; x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.
- $X, Y$ ανεξάρτητες ; ;

# Άσκηση 2

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y),\ \ x \in [0, 1], y \in [0, 1].$
- $X, Y$ ανεξάρτητες ; ; ;

# Άσκηση 3

# Άσκηση 3

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ 0 \leq x \leq y \leq 1.$

# Άσκηση 3

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ 0 \leq x \leq y \leq 1.$
- $X, Y$ ανεξάρτητες ;

# Άσκηση 3

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ 0 \leq x \leq y \leq 1.$
- $X, Y$ ανεξάρτητες ; ;

# Άσκηση 3

- $(X, Y)$ διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ.
  $f_{X,Y}(x, y) = c(xy + x + y + 1),\ 0 \le x \le y \le 1.$
- $X, Y$ ανεξάρτητες ; ; ;

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y]=$ ;

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y]=$ ; ;

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y]=$ ; ; ;

# Άσκηση 4 (συνέχεια παραδείγματος)

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο $X$ που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω $Y$ ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- $E[Y]=$ ; ; ;

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$ ;

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$ ; ;

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$ ; ; ;

# Άσκηση 5 (συνέχεια παραδείγματος)

- $X$: Η ταχύτητα τυπικού οχήματος το οποίο περνάει από ραντάρ τροχαίας.
- $X \sim$ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50.
- $Y$: Μέτρηση της ταχύτητας.
- Δεδομένου ότι $X = x$, $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{x^2}{100})$.
- $E[Y]=$ ; ; ;

# Μελέτη

# Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  3.5 Δέσμευση
  3.6 Ο συνεχής κανόνας του Bayes
  3.7 Σύνοψη και συζήτηση

- Ασκήσεις:

  3.5 Προβλήματα 19, 20, 21, 23, 28
  3.6 -
  3.7 -