Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 18
Συνδιακύμανση, συσχέτιση, Μετασχηματισμοί

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

19 Δεκεμβρίου 2014

Συνδιακύμανση - Ορισμός

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X, Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X, Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.
- Αν $Cov[X, Y] < 0$, οι X, Y λέγονται αρνητικά συσχετισμένες.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X, Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.
- Αν $Cov[X, Y] < 0$, οι X, Y λέγονται αρνητικά συσχετισμένες.
- Το πρόσημο της $Cov[X, Y]$ δίνει κάποια σημαντική πληροφορία για την εξάρτηση των X, Y.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X, Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.
- Αν $Cov[X, Y] < 0$, οι X, Y λέγονται αρνητικά συσχετισμένες.
- Το πρόσημο της $Cov[X, Y]$ δίνει κάποια σημαντική πληροφορία για την εξάρτηση των X, Y.
- Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού: $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.
- $Cov[X, aY + b] = aCov[X, Y]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.
- $Cov[X, aY + b] = aCov[X, Y]$.
- $Cov[X, Y + Z] = Cov[X, Y] + Cov[X, Z]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.
- $Cov[X, aY + b] = aCov[X, Y]$.
- $Cov[X, Y + Z] = Cov[X, Y] + Cov[X, Z]$.
- X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ X, Y ασυσχέτιστες.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.
- $Cov[X, aY + b] = aCov[X, Y]$.
- $Cov[X, Y + Z] = Cov[X, Y] + Cov[X, Z]$.
- X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ X, Y ασυσχέτιστες.
- Προσοχή! Το αντίστροφο δεν ισχύει:
  X, Y ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ X, Y ανεξάρτητες.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$
- X, Y όχι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$
- X, Y όχι ανεξάρτητες.
- Είναι μια περίπτωση που $E[X|Y = y]$ ανεξάρτητη του y.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$
- X, Y όχι ανεξάρτητες.
- Είναι μια περίπτωση που $E[X|Y = y]$ ανεξάρτητη του y.
- Όμως $f_{X|Y}(x|y)$ όχι ανεξάρτητη του y.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
  Όμως γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
  Όμως γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικά ισχύει ότι:

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y].$$

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
  Όμως γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικά ισχύει ότι:
  $$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y].$$
- Για n τυχαίες μεταβλητές:
  $$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov[X_i, X_j].$$

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

- Ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης δυο τ.μ. X, Y ορίζεται ως
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}.$$

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

- Ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης δυο τ.μ. X, Y ορίζεται ως

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}.$$

- Κανονικοποιημένη εκδοχή της $Cov[X,Y]$.

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

- Ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης δυο τ.μ. X, Y ορίζεται ως
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}.$$
- Κανονικοποιημένη εκδοχή της $Cov[X,Y]$.
- Ο $\rho(X,Y)$ είναι καθαρός αριθμός. Δεν εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των X, Y.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) =$ (πρόσημο του ab) $\cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) =$ (πρόσημο του ab) $\cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).
- $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c < 0$

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).
- $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c < 0$ (Οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες).

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).
- $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c < 0$ (Οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες).
- Προσοχή! Ο $\rho(X, Y)$ δεν είναι γραμμικός τελεστής: Γενικά $\rho(X, Y + Z) \neq \rho(X, Y) + \rho(X, Z)$.

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

- Ο μετασχηματισμός (ροπογεννήτρια) μιας τ.μ. X ορίζεται ως η συνάρτηση της πραγματικής παραμέτρου s
$$M_X(s) = E[e^{sX}].$$

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

- Ο μετασχηματισμός (ροπογεννήτρια) μιας τ.μ. X ορίζεται ως η συνάρτηση της πραγματικής παραμέτρου s
$$M_X(s) = E[e^{sX}].$$
- Για X διακριτή τ.μ με σμπ. $p_X(x)$ είναι:
$$M_X(s) = \sum_x e^{sx} p_X(x).$$

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

- Ο μετασχηματισμός (ροπογεννήτρια) μιας τ.μ. X ορίζεται ως η συνάρτηση της πραγματικής παραμέτρου s
$$M_X(s) = E[e^{sX}].$$
- Για X διακριτή τ.μ με σμπ. $p_X(x)$ είναι:
$$M_X(s) = \sum_x e^{sx} p_X(x).$$
- Για X συνεχή τ.μ με σππ. $f_X(x)$ είναι:
$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx.$$

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή.
  (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή.
  (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.
- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ., ισόνομες, $N \geq 0$, ακέρ., ανεξ. των X_i,
  $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.
- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ., ισόνομες, $N \geq 0$, ακέρ., ανεξ. των X_i,
  $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.
  $\Downarrow$

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.
- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ., ισόνομες, $N \geq 0$, ακέρ., ανεξ. των X_i,
  $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_N}(s) = M_N(\ln M_X(s))$.

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$
- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;
$$M_X(s) = \frac{1}{2}e^{2s} + \frac{1}{6}e^{3s} + \frac{1}{3}e^{5s}.$$

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \;\; x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

$$M_X(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}.$$

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \ x = 1, 2, \ldots .$$

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \;\; x = 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \; x = 1, 2, \ldots .$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \;\; x = 1, 2, \ldots.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \ \ x = 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

$$M_X(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}.$$

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x \geq 0.$$
- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

$$M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}.$$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},\ y \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \ y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},\ y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;
$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},\ y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},\ y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;
$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$
- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;
$X = \sigma Y + \mu \Rightarrow$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \ y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;
  $X = \sigma Y + \mu \Rightarrow$

$$M_Y(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s}.$$

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(n, p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(m, p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(n,p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(m,p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ $X + Y \sim$ Διωνυμική $\mathrm{Bin}(n+m,p)$.

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(n, p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(m, p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim$ Διωνυμική $\text{Bin}(n + m, p)$.
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(n, p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(m, p)$,
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim$ Διωνυμική $\mathrm{Bin}(n + m, p)$.
- $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$,
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda + \mu)$.

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(n,p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(m,p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ $X+Y \sim$ Διωνυμική $\mathrm{Bin}(n+m,p)$.
- $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ $X+Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda+\mu)$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(n, p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(m, p)$,
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim$ Διωνυμική $\text{Bin}(n + m, p)$.
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$,
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X =$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X=0) = P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] = 1$

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- X= Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] = 1$
- $Var[X] =$;

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- X= Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] = 1$
- $Var[X] = ;\ ;$

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X=0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] = 1$
- $Var[X] = ;\ ;\ ;$

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x \geq 0.$$

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$

- Έστω N τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots,$ με γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή σμπ.

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \ x = 1, 2, \ldots.$$

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x \geq 0.$$
- Έστω N τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots,$ με γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \; x = 1, 2, \ldots.$$
- $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$
- Έστω N τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots,$ με γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \ x = 1, 2, \ldots.$$
- $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.
- Τι κατανομή ακολουθεί η S_N ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  4.2 Συνδιασπορά και συσχέτιση
  4.3 Δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά
  4.4 Μετασχηματισμοί

- Ασκήσεις:

  4.2 Προβλήματα 17, 18
  4.3 -
  4.4 Προβλήματα 29, 31, 36
  Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.