Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 21
Στατιστική
Βασική εκτιμητική

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

8 Ιανουαρίου 2015

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).
- Παρατηρούμε το μέγεθος X (τ.μ.) πραγματοποιώντας ένα πείραμα τύχης (συλλογή δεδομένου (-ων)):

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).
- Παρατηρούμε το μέγεθος X (τ.μ.) πραγματοποιώντας ένα πείραμα τύχης (συλλογή δεδομένου (-ων)):
  x: Η τιμή της τ.μ. X που προέκυψε.

Κλασική στατιστική συμπερασματολογία

- Μελετάμε κάποιο μέγεθος X (τ.μ.).
- Η σμπ $p_X(x)$ (ή η σππ $f_X(x)$) εξαρτάται από κάποια σταθερή αλλά άγνωστη παράμετρο θ:
  $p_X(x) = p_X(x;\theta)$ (ή $f_X(x) = f_X(x;\theta)$).
- Παρατηρούμε το μέγεθος X (τ.μ.) πραγματοποιώντας ένα πείραμα τύχης (συλλογή δεδομένου (-ων)):
  x: Η τιμή της τ.μ. X που προέκυψε.
- Συνάγουμε την πιθανή τιμή της παραμέτρου θ (σημειακή εκτίμηση, διάστημα εμπιστοσύνης) ή κάποια πληροφορία γι αυτή (έλεγχος υποθέσεων).

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή:

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \ x \geq 0.$

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \ x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \ x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \; x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).
- Ποιά είναι η πιθανή τιμή της θ (εκτίμηση).

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή: $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).
- Ποιά είναι η πιθανή τιμή της θ (εκτίμηση).
- Η μέχρι σήμερα πεποίθηση ήταν ότι $\theta = \theta_0$, αλλά μια νέα μελέτη υποστηρίζει ότι $\theta = \theta_1$.

Παράδειγμα: Χρόνος ζωής εξαρτημάτων

- Βιομηχανία προμηθεύεται εξαρτήματα.
- Γνωρίζει ότι λόγω της φύσης τους ο χρόνος ζωής X ακολουθεί την εκθετική κατανομή:
  $f_X(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \;\; x \geq 0$. Η θ είναι άγνωστη.
- Δείγμα από n εξαρτήματα - Παρατήρηση χρόνου ζωής.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές (δεδομένα).
- Ποιά είναι η πιθανή τιμή της θ (εκτίμηση).
- Η μέχρι σήμερα πεποίθηση ήταν ότι $\theta = \theta_0$, αλλά μια νέα μελέτη υποστηρίζει ότι $\theta = \theta_1$.
  Ποιά υπόθεση να αποδεχθεί η βιομηχανία (έλεγχος υποθέσεων);

Βασικά προβλήματα

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:
  Αν υπάρχουν $m \geq 2$ εναλλακτικές υποθέσεις για τη θ, ποιά να αποδεχτώ;

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:
  Αν υπάρχουν $m \geq 2$ εναλλακτικές υποθέσεις για τη θ, ποιά να αποδεχτώ;
- Έλεγχος σημαντικότητας:

Βασικά προβλήματα

Με βάση τα δεδομένα:

- (Σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου:
  Να βρεθεί η «πιό πιθανή» τιμή της θ.
- Διάστημα εμπιστοσύνης:
  Να βρεθεί διάστημα τιμών που να περιέχει τη θ με δεδομένη πιθανότητα (επίπεδο εμπιστοσύνης).
- Έλεγχος υποθέσεων:
  Αν υπάρχουν $m \geq 2$ εναλλακτικές υποθέσεις για τη θ, ποιά να αποδεχτώ;
- Έλεγχος σημαντικότητας:
  Αν υπάρχει μια υπόθεση για τη θ, να τη δεχτώ ή να την απορρίψω;

Βασικές έννοιες

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: Παρατηρήσεις - αριθμοί.

Βασικές έννοιες

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ. .
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ $(f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))$: Μοντέλο.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: Παρατηρήσεις - αριθμοί.
- $\hat{\theta} = g(x)$: Εκτίμηση της θ με βάση τις συγκεκριμένες παρατηρήσεις - αριθμός.

Συμβολισμοί

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον αριθμό n των παρατηρήσεων γράφουμε:
  $\hat{\Theta}_n$ για μια εκτιμήτρια της θ

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον αριθμό n των παρατηρήσεων γράφουμε:
  $\hat{\Theta}_n$ για μια εκτιμήτρια της θ
  ($\hat{\Theta}_n,\ n \geq 1$ ακολουθία εκτιμητριών)

Συμβολισμοί

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $\hat{\Theta} = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον αριθμό n των παρατηρήσεων γράφουμε:
  $\hat{\Theta}_n$ για μια εκτιμήτρια της θ
  ($\hat{\Theta}_n,\ n \geq 1$ ακολουθία εκτιμητριών)
- Η μέση τιμή και η διασπορά μιας εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ εξαρτώνται από την αληθινή τιμή της παραμέτρου θ και γι αυτό γράφουμε
  $E_\theta[\hat{\Theta}_n]$ και $Var_\theta[\hat{\Theta}_n]$.

Σφάλματα, μεροληψία

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:
  $MSE(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n^2] = E_\theta[(\hat{\Theta}_n - \theta)^2]$.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:
  $MSE(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n^2] = E_\theta[(\hat{\Theta}_n - \theta)^2]$.
- Μεροληψία: $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n] = E_\theta[\hat{\Theta}_n - \theta]$.

Σφάλματα, μεροληψία

- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
  Η g ΔΕΝ εξαρτάται από τη θ.
  Η κατανομή της $\hat{\Theta}_n = g(X)$ εξαρτάται από τη θ.
- Σφάλμα εκτίμησης: $\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:
  $MSE(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n^2] = E_\theta[(\hat{\Theta}_n - \theta)^2]$.
- Μεροληψία: $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n] = E_\theta[\hat{\Theta}_n - \theta]$.
- $MSE(\hat{\Theta}_n) = b_\theta(\hat{\Theta}_n)^2 + Var[\hat{\Theta}_n]$.

Επιθυμητές ιδιότητες

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη $\Leftrightarrow b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0 \Leftrightarrow E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta$.

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη $\Leftrightarrow b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0 \Leftrightarrow E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta.$
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς $\Leftrightarrow$ $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0,\ (E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta), Var[\hat{\Theta}_n]$ ελάχιστο.

Επιθυμητές ιδιότητες

- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη $\Leftrightarrow b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0 \Leftrightarrow E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta$.
- $\hat{\Theta}_n$ αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς $\Leftrightarrow$ $b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0,\ (E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta),\ Var[\hat{\Theta}_n]$ ελάχιστο.
- $\hat{\Theta}_n$ ασυμπτωτικά αμερόληπτη $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_\theta(\hat{\Theta}_n) = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E_\theta[\hat{\Theta}_n] = \theta$.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Κλασική εκτιμήτρια για το μ:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

ο δειγματικός μέσος.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Κλασική εκτιμήτρια για το μ:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

  ο δειγματικός μέσος.
- Κλασική εκτιμήτρια για το σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

  η αμερόληπτη δειγματική διασπορά.

Κλασικές εκτιμήτριες μέσου και διασποράς

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Κλασική εκτιμήτρια για το μ:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

  ο δειγματικός μέσος.
- Κλασική εκτιμήτρια για το σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

  η αμερόληπτη δειγματική διασπορά.
- Οι $\bar{X}$ και S^2 είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες των μ και σ^2.

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x;\theta)$ ($f_X(x;\theta)$).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x;\theta)$ ($f_X(x;\theta)$).
- $\hat{\theta}_n : p_X(x;\hat{\theta}_n) = \max_\theta p_X(x;\theta)$.

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x;\theta)$ ($f_X(x;\theta)$).
- $\hat{\theta}_n : p_X(x;\hat{\theta}_n) = \max_\theta p_X(x;\theta)$.
- Στις περισσότερες εφαρμογές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, οπότε $p_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i;\theta)$ ($f_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\theta)$).

Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: δείγμα.
- $p_X(x;\theta)$: από κοινού σμπ. του X υπό την θ ($f_X(x;\theta)$: από κοινού σππ. του X υπό την θ).
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: παρατήρηση (τιμή της X).
- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάν. της θ δεδομέν. της x είναι η τιμή του θ που μεγιστοπ. την $p_X(x;\theta)$ ($f_X(x;\theta)$).
- $\hat{\theta}_n : p_X(x;\hat{\theta}_n) = \max_\theta p_X(x;\theta)$.
- Στις περισσότερες εφαρμογές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, οπότε $p_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i;\theta)$ ($f_X(x;\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\theta)$).
- Αντί για το $\max_\theta p_X(x;\theta)$ συχνά θεωρούμε το $\max_\theta \log p_X(x;\theta)$ (λογαριθμική πιθανοφάνεια).

Διαισθητική ερμηνεία των εμπ

Διαισθητική ερμηνεία των εμπ

- Μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.

Διαισθητική ερμηνεία των εμπ

- Μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας $p_X(x;\theta)$ $(f_X(x;\theta))$.
$\downarrow$
- Ποιά είναι η τιμή της παραμέτρου θ υπό την οποία οι παρατηρήσεις έχουν τη μεγαλύτερη πιθανότητα να προκύψουν ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: $X =$ αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: $\theta =$ ποσοστό λευκών σφαιριδίων.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: $X =$ αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: $\theta =$ ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ; ;

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: $X =$ αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: $\theta =$ ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ; ;
-

x	0	1	2	3
$p_X(x;1/4)$	$27/64$	$27/64$	$9/64$	$1/64$
$p_X(x;3/4)$	$1/64$	$9/64$	$27/64$	$27/64$

Παράδειγμα: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια.
- Αναλογία χρωμάτων 3:1, χωρίς να ξέρουμε ποιό υπερισχύει.
- Εξάγουμε με επανάθεση 3 σφαιρίδια.
- Δείγμα: X = αριθμός λευκών σφαιριδίων.
- Άγνωστη παράμετρος: θ = ποσοστό λευκών σφαιριδίων. $\theta = 1/4$ ή $\theta = 3/4$.
- ΕΜΠ ; ; ;
-

x	0	1	2	3
$p_X(x; 1/4)$	27/64	27/64	9/64	1/64
$p_X(x; 3/4)$	1/64	9/64	27/64	27/64
$\hat{\theta}(x)$	1/4	1/4	3/4	3/4

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \ldots, N.$

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \ldots, N.$
- ΕΜΠ $\hat{p}_n = \hat{p}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;

Άσκηση 1: ΕΜΠ από τ.δ. Διωνυμικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Διωνυμική(N, p).
- N: γνωστό, p: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \ldots, N.$
- ΕΜΠ $\hat{p}_n = \hat{p}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$.

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$.
- ΕΜΠ $\hat{\lambda}_n = \hat{\lambda}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;

Άσκηση 2: ΕΜΠ από τ.δ. Poisson

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Poisson(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $p_{X_i}(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$.
- ΕΜΠ $\hat{\lambda}_n = \hat{\lambda}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}, \ x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =;$ όταν v γνωστό.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =$; όταν v γνωστό.
- ΕΜΠ $\hat{v} =$; όταν μ γνωστό.

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =$; όταν v γνωστό.
- ΕΜΠ $\hat{v} =$; όταν μ γνωστό.
- ΕΜΠ $(\hat{\mu}, \hat{v}) =$;

Άσκηση 3: ΕΜΠ από τ.δ. Κανονικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- $\mu, v = \sigma^2$: παράμετροι.
- $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}, \ x \in \mathbb{R}$.
- ΕΜΠ $\hat{\mu} =$; όταν v γνωστό.
- ΕΜΠ $\hat{v} =$; όταν μ γνωστό.
- ΕΜΠ $(\hat{\mu}, \hat{v}) =$;
- Είναι οι ΕΜΠ αμερόληπτες ;

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $(=$ ανεξ. και ισόν.$)$ από Εκθετική(λ).

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$
- ΕΜΠ $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;

Άσκηση 4: ΕΜΠ από τ.δ. Εκθετικής

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Εκθετική(λ).
- λ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$
- ΕΜΠ $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη Ι

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη I

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([a, b])$.

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη Ι

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[a, b]$).
- a, b: άγνωστες παράμετροι.

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη I

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[a, b]$).
- a, b: άγνωστες παράμετροι.
- $f_{X_i}(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$.

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη Ι

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[a, b]$).
- a, b: άγνωστες παράμετροι.
- $f_{X_i}(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$.
- ΕΜΠ $(\hat{a}, \hat{b})$=;

Άσκηση 5: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη Ι

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη($[a, b]$).
- a, b: άγνωστες παράμετροι.
- $f_{X_i}(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$.
- ΕΜΠ $(\hat{a}, \hat{b})$=;
- Είναι η ΕΜΠ αμερόληπτη ;

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη II

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη ΙΙ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη ΙΙ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.
- θ: άγνωστη παράμετρος.

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη II

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.
- θ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x;\theta) = 1, x \in [\theta - 1/2, \theta + 1/2]$.

Άσκηση 6: ΕΜΠ από τ.δ. Ομοιόμορφη II

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (= ανεξ. και ισόν.) από Ομοιόμορφη$([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.
- θ: άγνωστη παράμετρος.
- $f_{X_i}(x;\theta) = 1, x \in [\theta - 1/2, \theta + 1/2]$.
- ΕΜΠ $\hat{\theta}$=;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  9.1 Κλασσική Στατιστική Συμπερασματολογία

- Ασκήσεις:

  Οι ασκήσεις που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.