Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 22
Διαστήματα εμπιστοσύνης

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

12 Ιανουαρίου 2015

Διαστήματα εμπιστοσύνης

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.
- $[\hat{\Theta}_n^-, \hat{\Theta}_n^+] = [g_1(X), g_2(X)]$: Διάστημα εμπιστοσύνης για την θ - ζεύγος τ.μ. που δίνουν μια αίσθηση για την τιμή της θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.
- $[\hat{\Theta}_n^-, \hat{\Theta}_n^+] = [g_1(X), g_2(X)]$: Διάστημα εμπιστοσύνης για την θ - ζεύγος τ.μ. που δίνουν μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Πλεονέκτημα: Το διάστημα εμπιστοσύνης επιλέγεται έτσι ώστε να περιέχει την παράμετρο με τουλάχιστον κάποια επιθυμητή πιθανότητα $1 - \alpha$, που αναφέρεται ως **επίπεδο εμπιστοσύνης**:

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: Δείγμα - τ.μ.
- θ: Παράμετρος - άγνωστος αριθμός.
- $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ($f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$): Μοντέλο.
- $\hat{\Theta}_n = g(X)$: Εκτιμήτρια της θ - τ.μ. που δίνει μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Μειονέκτημα: Δεν δίνεται κάποια πιθανότητα για το πόσο η $\hat{\Theta}_n$ είναι κοντά στην θ.
- $[\hat{\Theta}_n^-, \hat{\Theta}_n^+] = [g_1(X), g_2(X)]$: Διάστημα εμπιστοσύνης για την θ - ζεύγος τ.μ. που δίνουν μια αίσθηση για την τιμή της θ.
- Πλεονέκτημα: Το διάστημα εμπιστοσύνης επιλέγεται έτσι ώστε να περιέχει την παράμετρο με τουλάχιστον κάποια επιθυμητή πιθανότητα $1-\alpha$, που αναφέρεται ως **επίπεδο εμπιστοσύνης**: $P_\theta(\hat{\Theta}_n^- \le \theta \le \hat{\Theta}_n^+) \ge 1-\alpha$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \upsilon)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. υ γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{\upsilon / n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \upsilon)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. υ γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{\upsilon/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \le T \le z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \upsilon)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. υ γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1 - \alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{\upsilon/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96)$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \le T \le z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96.$

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \le T \le z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96$.
- $P(-1.96 \le \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \le 1.96) = 0.95$ και λύνουμε για το μ.

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n-\mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96$.
- $P(-1.96 \leq \frac{\hat{\Theta}_n-\mu}{\sqrt{v/n}} \leq 1.96) = 0.95$ και λύνουμε για το μ.
- $[\hat{\Theta}_n - 1.96\sqrt{v/n}, \hat{\Theta}_n + 1.96\sqrt{v/n}]$:

Διάστ. εμπιστοσύνης για το μ κανονικής καταν.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, v)$.
- μ άγνωστη παράμετρος. v γνωστή παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ σε επίπεδο $1-\alpha = 95\%$;
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(-z \leq T \leq z) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow$ $\Phi(z) = 0.975 = \Phi(1.96) \Leftrightarrow z = 1.96$.
- $P(-1.96 \leq \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \leq 1.96) = 0.95$ και λύνουμε για το μ.
- $[\hat{\Theta}_n - 1.96\sqrt{v/n}, \hat{\Theta}_n + 1.96\sqrt{v/n}]$: Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ επιπέδου 95%.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- Β1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- B1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- B2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- B1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- B2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Προσδιορισμός σταθερών $c_1 < c_2$ ώστε

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- B1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- B2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Προσδιορισμός σταθερών $c_1 < c_2$ ώστε $P(c_1 \leq T \leq c_2) =$ δοσμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε.

- B1: Προσδιορισμός εκτιμήτριας $\hat{\Theta}_n$ για το θ.
- B2: Προσδιορισμός τ.μ. $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Προσδιορισμός σταθερών $c_1 < c_2$ ώστε $P(c_1 \leq T \leq c_2) =$ δοσμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.
- B4: Λύνουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.
- B4: Δεν είναι εύκολο να λύσουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ για οποιαδήποτε συνάρτηση g.

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.
- B4: Δεν είναι εύκολο να λύσουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ για οποιαδήποτε συνάρτηση g.

  $\downarrow$

Γενική μέθοδος κατασκευής δ.ε. - δυσκολίες

- B2: Δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε $T = g(\hat{\Theta}_n, \theta)$ με συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητης του θ.
- B3: Δεν είναι εύκολο να βρούμε τα c_1, c_2 όταν η T έχει μια οποιαδήποτε κατανομή.
- B4: Δεν είναι εύκολο να λύσουμε την $c_1 \leq g(\hat{\Theta}_n, \theta) \leq c_2$ ως προς θ για οποιαδήποτε συνάρτηση g.
  $\downarrow$
  Η μέθοδος γενικά δύσκολα εφαρμόζεται για κατασκευή ακριβών δ.ε.

Προσεγγιστικά δ.ε.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (NMA).

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (NMA).
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, κατά προσέγγιση.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ (NMA).
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, κατά προσέγγιση.
- Δουλεύουμε όπως στο παράδειγμα για το διάστημα εμπιστοσύνης για το μ κανονικής κατανομής.

Προσεγγιστικά δ.ε.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μεγάλο τ.δ. $(n \geq 30)$.
- $\mu = E[X_i]$ άγνωστη παράμετρος.
- Διάστημα εμπιστοσύνης για το μ.
- Εκτιμήτρια για το μ: $\hat{\Theta}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (ΝΜΑ).
- $T = \frac{\hat{\Theta}_n - \mu}{\sqrt{v/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, κατά προσέγγιση.
- Δουλεύουμε όπως στο παράδειγμα για το διάστημα εμπιστοσύνης για το μ κανονικής κατανομής.
- Αν η διασπορά είναι άγνωστη, την αντικαθιστούμε με μια εκτίμησή της.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.
- p_1: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους καπνιστές.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.
- p_1: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους καπνιστές.
- p_2: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους μη-καπνιστές.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για ποσοστά, διαφορά ποσοστών

- Έρευνα για συσχέτιση καπνίσματος και άσθματος.
- Σε δείγμα 980 καπνιστών βρέθηκαν 34 με άσθμα.
- Σε δείγμα 4350 μη-καπνιστών βρέθηκαν 70 με άσθμα.
- p_1: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους καπνιστές.
- p_2: ποσοστό ασθενών με άσθμα στους μη-καπνιστές.
- Δ.Ε. για p_1, p_2 και $p_1 - p_2$ σε επίπεδο 90%, 95%, 99%.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.
- Επιθυμεί να είναι σίγουρος με πιθανότητα 95% ότι το σφάλμα εκτίμησης είναι μικρότερο του 2.5.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.
- Επιθυμεί να είναι σίγουρος με πιθανότητα 95% ότι το σφάλμα εκτίμησης είναι μικρότερο του 2.5.
- Η διασπορά είναι 18^2.

Παράδειγμα: Προσδιορισμός μεγέθους δείγματος

- Ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τη μέση τιμή μεγέθους.
- Θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή δείγματος.
- Επιθυμεί να είναι σίγουρος με πιθανότητα 95% ότι το σφάλμα εκτίμησης είναι μικρότερο του 2.5.
- Η διασπορά είναι 18^2.
- Να βρεθεί ελάχιστο μέγεθος δείγματος που να εξασφαλίζει τα παραπάνω.

Άσκηση 1: Προσεγγιστικό δ.ε. I

Άσκηση 1: Προσεγγιστικό δ.ε. Ι

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από τη συνεχή ομοιόμορφη στο $[0, \theta]$.

Άσκηση 1: Προσεγγιστικό δ.ε. I

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από τη συνεχή ομοιόμορφη στο $[0, \theta]$.
- Να κατασκευαστεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το θ σε επίπεδο 95%.

Άσκηση 2: Προσεγγιστικό δ.ε. II

Άσκηση 2: Προσεγγιστικό δ.ε. II

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από διωνυμική (N, p) με N γνωστό.

Άσκηση 2: Προσεγγιστικό δ.ε. ΙΙ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από διωνυμική (N, p) με N γνωστό.
- Να κατασκευαστεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το p σε επίπεδο 95%.

Άσκηση 3: Συντελεστής εμπιστοσύνης και μέγεθος δείγματος

Άσκηση 3: Συντελεστής εμπιστοσύνης και μέγεθος δείγματος

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστή.

Άσκηση 3: Συντελεστής εμπιστοσύνης και μέγεθος δείγματος

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστή.
- Να βρεθεί πόσο πρέπει να αυξηθεί το μέγεθος του δείγματος ώστε ο συντελεστής εμπιστοσύνης να μεταβληθεί από 90% σε 99.5%, ενώ το μήκος του διαστήματος να παραμείνει σταθερό.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίπης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.
- Το ίδιο με 70 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 190 παιδιών.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.
- Το ίδιο με 70 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 190 παιδιών.
- Το ίδιο με 35 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 95 παιδιών.

Άσκηση 4: Μέγεθος δείγματος και μήκος διαστήματος

- Σε επιδημία γρίππης, 140 παιδιά από ένα σχολείο 380 παιδιών αρρώστησαν.
- Να βρεθεί 95% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των παιδιών που προσβάλλει η γρίππη.
- Το ίδιο με 70 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 190 παιδιών.
- Το ίδιο με 35 άρρωστα παιδιά σε σχολείο 95 παιδιών.
- Τί παρατηρείτε;

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

- p_1 : ποσοστό φοιτητριών που προτιμούν τον Πολιτικό γάμο.

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

- p_1 : ποσοστό φοιτητριών που προτιμούν τον Πολιτικό γάμο.
  p_2: ποσοστό φοιτητών που προτιμούν τον Θρησκευτικό γάμο.

Άσκηση 5: Ποσοστά, Διαφορά ποσοστών

- Τυχαίο δείγμα 80 φοιτητριών και 60 φοιτητών.
- Ερώτημα: Προτιμάτε τον Πολιτικό ή τον Θρησκευτικό Γάμο;
-

Προτιμήσεις	Πολιτικός	Θρησκευτικός	ΔΞ/ΔΑ
Φοιτήτριες	25	48	7
Φοιτητές	22	34	4

- p_1 : ποσοστό φοιτητριών που προτιμούν τον Πολιτικό γάμο.
  p_2: ποσοστό φοιτητών που προτιμούν τον Θρησκευτικό γάμο.
- Να βρεθούν διαστήματα εμπιστοσύνης 90% για τα p_1, p_2, $p_1 - p_2$.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  9.1 Κλασσική Εκτίμηση Παραμέτρων

- Ασκήσεις:

  Οι ασκήσεις που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.