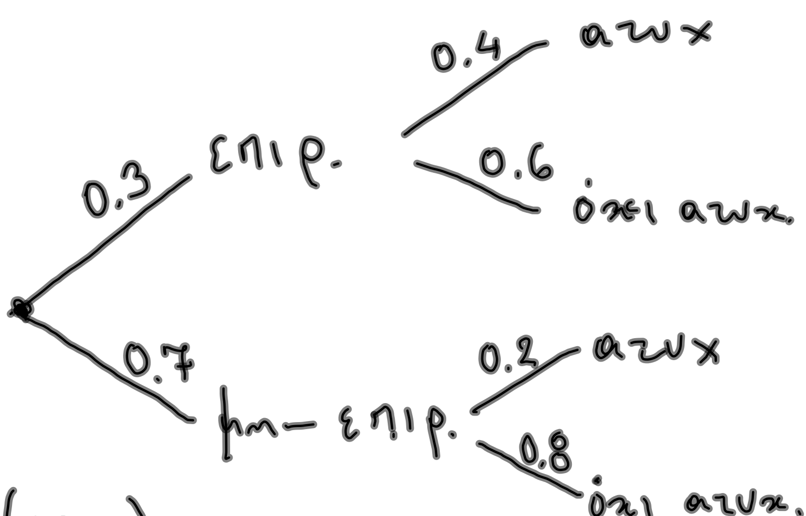
Παρ. 1: Ατυχήματα



$$\underbrace{P(\text{επιρ}, \text{ατυχ})}_{=\,0.3 \cdot 0.4 = 0.12}$$

$$\underbrace{P(\text{ατυχ})}_{=\,0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.2} = 0.26$$

$$\underbrace{P(\text{επιρ} \mid \text{ατυχ})}_{=\,\frac{0.3}{0.26} \cdot 0.4 = \dots}$$

$$\begin{aligned} P(\text{ατυχ}) &= P(\text{επιρ})P(\text{ατυχ} \mid \text{επιρ}) + P(\text{μη-επιρ})P(\text{ατυχ} \mid \text{μη-επιρ}) \\ &= 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.2 \end{aligned}$$

Παρ. 2: Οδήγηση υπό μέθη

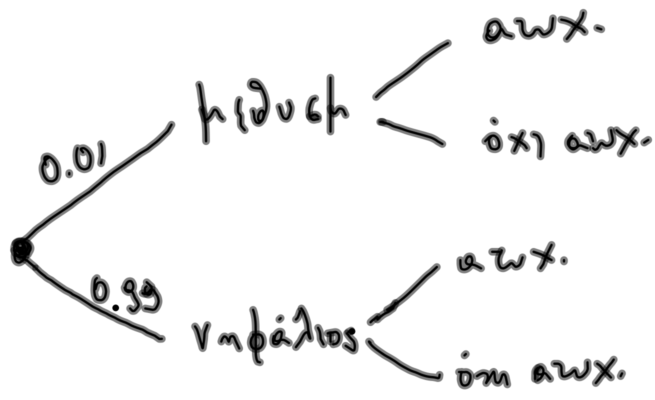
10% των ατυχημ. προκαλ. από μεθυσμ.

1% των οδηγών οδηγούν μεθυσμ.

"Είναι πολύ πιο πιθανό να προκαλ. ατυχ. ένας μεθυσμένος"

$P(\text{μεθ.}|\text{ατυχ}) = 0.1$

$P(\text{νηφ.}|\text{ατυχ}) = 0.9$



$$\frac{P(\text{ατυχ}|\text{μεθ})}{P(\text{ατυχ}|\text{νηφ})} = \frac{\frac{\cancel{P(\text{ατυχ})}}{P(\text{μεθ})} P(\text{μεθ}|\text{ατυχ})}{\frac{\cancel{P(\text{ατυχ})}}{P(\text{νηφ})} P(\text{νηφ}|\text{ατυχ})} = \frac{0.99 \cdot 0.1}{0.01 \cdot 0.9} \approx 11$$

Παρ. 3: Εξαγωγή σφαιρ. από κάλπη

$$\boxed{\begin{matrix} w\ \Lambda \\ b\ \text{M} \end{matrix}} \longrightarrow n \qquad \xrightarrow[1^{\eta}\ \Lambda]{\text{μετά τη } 1^{\eta}\ \text{σφ.}} \qquad \boxed{\begin{matrix} w-1\ \Lambda \\ b\ \text{M} \end{matrix}} \longrightarrow n-1$$

$$p_1 = P(1^{\eta}\ \Lambda,\ \text{συνολ. } k\ \Lambda) = P(1^{\eta}\ \Lambda)\cdot P\left(\begin{matrix}\text{συνολ}\\ k\ \Lambda\end{matrix}\,\middle|\,1^{\eta}\ \Lambda\right) = \frac{w}{w+b}\cdot\frac{\binom{w-1}{k-1}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b-1}{n-1}}$$

$$p_2 = P(\text{συνολ } k\ \Lambda) = \frac{\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{συνολ}\\ k\ \Lambda\end{matrix}\,\middle|\,1^{\eta}\ \Lambda\right) = P\left(\begin{matrix}\text{συνολ. } k-1\ \Lambda\\ \text{σε εξαγωγή } n-1\\ \text{από } w-1\ \Lambda\\ \text{και } b\ \text{M}\end{matrix}\right) = \frac{\binom{w-1}{k-1}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b-1}{n-1}}$$

$$P_3 = P(1^o\ \Lambda \mid \text{συνολ } k\ \Lambda)$$

$$= \frac{P(1^o\ \Lambda,\ \text{συνολ } k\ \Lambda)}{P(\text{συνολ } k\ \Lambda)}$$

$$= \frac{\dfrac{w}{w+b}\cdot\dfrac{\binom{w-1}{k-1}\cancel{\binom{b}{n-k}}}{\binom{w+b-1}{n-1}}}{\dfrac{\binom{w}{k}\cancel{\binom{b}{n-k}}}{\binom{w+b}{n}}} = \frac{k}{n}$$

Παρ. 4: Πρώτα ζάρι, μετά νόμισμα

$$P_1 = P(\text{ζαριά}=3,\ \text{όλο } \Gamma)$$
$$= P(\text{ζαριά}=3)\, P(\text{όλο } \Gamma \mid \text{ζαριά}=3)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{48}.$$

$$P_2 = P(\text{όλο } \Gamma) = \sum_{i=1}^{6} \underbrace{P(\text{ζαριά}=i)}_{1/6}\, \underbrace{P(\text{όλο } \Gamma \mid \text{ζαριά}=i)}_{(1/2)^i}$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{63}{64}.$$

$$P_3 = (\text{ζαριά}=3 \mid \text{όλο Γ})$$

$$= \frac{P(\text{ζαριά}=3, \text{όλο Γ})}{P(\text{όλο Γ})} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Παρ. 5 : Μονομαχία με τη σειρά

$P(\text{ευστ } A) = 1/2 \quad P(\text{ευστ } B) = \frac{2}{3}$

$\boxed{P(\text{επιβ } A \mid \text{άρχισε ο } A)}$

$= P(1^η \text{ βολή επιτ} \mid \text{αρχ ο } A)\, P(\text{επιβ ο } A \mid 1^η \text{ βολή επιτ αρχ ο } A)$

$+ P(1^η \text{ βολή αποτ} \mid \text{αρχ ο } A)\, P(\text{επιβ ο } A \mid 1^η \text{ βολή αποτ αρχ ο } A)$

$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\, \underline{P(\text{επιβ. ο } A \mid \text{αρχ. ο } B)} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} P(\text{επιβ ο } A \mid \text{αρχ } A)}$

$P(\text{επιβ } A \mid \text{αρχ ο } B)$

$= P(1^η \text{ βολή επιτ} \mid \text{αρχ ο } B)\, P(\text{επιβ ο } A \mid 1^η \text{ βολή επιτ, αρχ ο } B)$

$+ P(1^η \text{ βολή αποτ} \mid \text{αρχ ο } B)\, P(\text{επιβ ο } A \mid 1^η \text{ βολή αποτ, αρχ ο } B)$

$= 2/3 \cdot 0 + 1/3\, P(\text{επιβ } A \mid \text{αρχ ο } A)$

$$\underbrace{P(\text{επιβ } A \mid \text{αρχ } A)}_{= x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\underbrace{P(\text{επιβ } A \mid \text{αρχ } \bar{A})}_{= x}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x$$

$$\Longleftrightarrow \frac{5}{6}x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{3}{5}$$

Παρ. 6: Χέρι πόκερ

$$P(\text{καρέ}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{4}{4}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(\text{φουλ}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

χέρι πόκερ

$4 \times 13 = 52$

5

Ασκ: Μοίρασμα τράπουλας
σε 4 παίκτες (13 φ/καθ.)

$p = P$ (παίρνει 1 A ο καθένας).

<u>1ος τρόπος</u>

$p = P$(ο 1ος παίκτης παίρνει A) P(2ος A | 1ος A) ---

$$= \frac{4 \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{3\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{2\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{1\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}}.$$

$$= \frac{4\,\dfrac{48!}{12!\,\cancel{36!}}\cdot 3\,\dfrac{\cancel{36!}}{12!\,\cancel{24!}}\cdot 2\,\dfrac{\cancel{24!}}{12!\,12!}}{\dfrac{52!}{13!\,\cancel{39!}}\cdot\dfrac{\cancel{39!}}{13!\,\cancel{26!}}\cdot\dfrac{\cancel{26!}}{13!\,13!}}$$

$$= \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 48!\,(13!)^4}{(12!)^4\,52!} = \frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 13^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{52}\cdot 51\cdot 50\cdot 49}$$

$$= \frac{3\cdot 2\cdot 13^3}{51\cdot 50\cdot 49} = \underbrace{\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{13}{49}}_{}$$

2ος τρόπος

$$P = \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49}$$