Στοιχεία συνδυαστικής για υπολογισμούς πιθανοτήτων
Περίληψη

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

20 Φεβρουαρίου 2010

Στην περίπτωση που ένα πείραμα τύχης έχει πεπερασμένο δειγματικό χώρο S που όλα τα δειγματικά σημεία του είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου E δίνεται από τη σχέση

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}}$$

όπου με $|E|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου E.

Επομένως, γίνεται φανερό ότι για τον υπολογισμό πιθανοτήτων σε τέτοια πειράματα τύχης είναι αναγκαία η καταμέτρηση του πλήθους των στοιχείων του δειγματικού χώρου καθώς και διαφόρων υποσυνόλων του, που αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν. Η απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες είναι το αντικείμενο της **Συνδυαστικής**. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαία η γνώση τουλάχιστον των βασικών εργαλείων της Συνδυαστικής.

Η πιο σημαντική και ευρέως χρησιμοποιούμενη αρχή της Συνδυαστικής είναι η **πολλαπλασιαστική αρχή**. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, αν ένα πείραμα μπορεί να αναλυθεί σε στάδια και στο 1ο στάδιο υπάρχουν n_1 δυνατά αποτελέσματα, στο 2ο στάδιο υπάρχουν n_2 δυνατά αποτελέσματα (ό,τι και να έχει συμβεί στο προηγούμενο στάδιο), στο 3ο στάδιο υπάρχουν n_3 δυνατά αποτελέσματα (ό,τι και να έχει συμβεί στα προηγούμενα στάδια) κ.ο.κ. μέχρι και το τελευταίο r-οστό στάδιο στο οποίο υπάρχουν n_r δυνατά αποτελέσματα, τότε το πείραμα έχει συνολικά $n_1 n_2 \cdots n_r$ διαφορετικά δυνατά αποτελέσματα.

Μετάθεση n αντικειμένων είναι μια τοποθέτησή τους σε σειρά, δηλαδή μια οποιαδήποτε διατεταγμένη n-αδα από αυτά τα αντικείμενα στην οποία το καθένα εμφανίζεται μια και μόνο μια φορά (χωρίς επαναλήψεις). Το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων n αντικειμένων είναι

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1.$$

Το σύμβολο $0!$ ορίζεται να είναι ίσο με 1.

Διάταξη n **ανά** k από ένα σύνολο n αντικειμένων λέγεται κάθε διατεταγμένη k-αδα από αυτά τα n αντικείμενα στην οποία το καθένα εμφανίζεται το πολύ μια φορά (χωρίς επαναλήψεις). Το πλήθος των διατάξεων n ανά k είναι

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Η μετάθεση n αντικειμένων είναι μια διάταξη n ανά n.

Επαναληπτική διάταξη ή διάταξη με επανάληψη n **ανά** k από ένα σύνολο n αντικειμένων λέγεται κάθε διατεταγμένη k-αδα από αυτά τα n αντικείμενα στην οποία το καθένα μπορεί να εμφανίζεται οσεσδήποτε φορές (με επαναλήψεις). Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων n ανά k είναι

$$n^k.$$

Συνδυασμός n **ανά** k από ένα σύνολο n αντικειμένων λέγεται κάθε μη-διατεταγμένη συλλογή με k στοιχεία από αυτά τα n αντικείμενα, στην οποία το καθένα εμφανίζεται το πολύ μια φορά (χωρίς επαναλήψεις). Ουσιαστικά δηλαδή ο όρος συνδυασμός n ανά k σημαίνει υποσύνολο με k στοιχεία του συνόλου των n αντικειμένων. Το πλήθος των συνδυασμών n ανά k είναι

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Η ποσότητα αυτή αναφέρεται και ως **διωνυμικός συντελεστής** διότι εμφανίζεται στο **διωνυμικό θεώρημα** που λέει πώς αναπτύσσεται η δύναμη ενός διωνύμου σε μονώνυμα:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Εκτός από τον ακριβή τύπο που δίνει το πλήθος των συνδυασμών n ανά k, ένας χρήσιμος τύπος είναι και ο

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},\ 1 \leq k \leq n,$$

που αποτελεί μια αναγωγική σχέση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύκολη κατασκευή πίνακα με τις τιμές των $\binom{n}{k}$ (τρίγωνο Pascal).

Επαναληπτικός συνδυασμός ή συνδυασμός με επανάληψη n **ανά** k από ένα σύνολο n αντικειμένων λέγεται κάθε μη-διατεταγμένη συλλογή με k στοιχεία από αυτά τα n αντικείμενα, στην οποία το καθένα μπορεί να εμφανίζεται οσεσδήποτε φορές (με επαναλήψεις). Το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών n ανά k είναι

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Ο **πολυωνυμικός συντελεστής** n **ανά** $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ορίζεται μόνο για $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ ως

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} = \frac{(n_1+n_2+\cdots+n_r)!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

και αποτελεί γενίκευση του διωνυμικού συντελεστή (αφού ο διωνυμικός συντελεστής n ανά k μπορεί να θεωρηθεί πολυωνυμικός συντελεστής n ανά $k, n-k$. Ονομάζεται έτσι διότι εμφανίζεται στο **πολυωνυμικό θεώρημα** που γενικεύει το διωνυμικό ως εξής:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}.$$

Ο πολυωνυμικός συντελεστής n ανά $n_1, n_2, \ldots, n_r$ δίνει την απάντηση σε δυο βασικά συνδυαστικά προβλήματα. Πράγματι, δίνει το πλήθος των διαφορετικών τοποθετήσεων σε σειρά n αντικειμένων, εκ των οποίων n_1 αντικείμενα είναι όμοια μεταξύ τους τύπου 1, n_2 αντικείμενα είναι όμοια μεταξύ τους τύπου 2 κ.ο.κ., n_r αντικείμενα είναι όμοια μεταξύ τους τύπου r (**μεταθέσεις** r **ειδών στοιχείων** n **αντικειμένων ανά** $n_1, n_2, \ldots, n_r$). Επίσης, δίνει το πλήθος των διαφορετικών **διαιρέσεων ενός συνόλου με** n **στοιχεία σε** r **διακεκριμένα υποσύνολα με** $n_1, n_2, \ldots, n_r$ **στοιχεία το καθένα**.

Ένα τελευταίο συνδυαστικό ερώτημα που εμφανίζεται συχνά στις εφαρμογές αφορά το πλήθος των ακέραιων μη αρνητικών λύσεων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k.$$

Αποδεικνύεται ότι το πλήθος αυτό ισούται με το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών n ανά k, δηλαδή είναι $\binom{n+k-1}{k}$. Αν ενδιαφερόμαστε για το πλήθος των λύσεων της ίδιας εξίσωσης αλλά με τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ να παίρνουν μόνο τις τιμές 0 ή 1 τότε έχουμε $\binom{n}{k}$ το πλήθος λύσεις.