Ασκήσεις - 2

1) Ψάχνουμε ένα φίλο, που με πιθανότητα $\frac{p}{7}$ $(0 \leq p \leq 1)$ βρίσκεται στον όροφο i $(i=1,2,\dots,7)$ ενός επταόροφου εμπορικού κέντρου. Ψάξαμε μάταια στους 6 απο αυτούς (δεν τον βρήκαμε). Ποιά είναι η πιθανότητα να βρίσκεται σε αυτόν που δεν έχουμε ψάξει;

2) Ρίχνουμε 2 τίμια ζάρια (ανεξάρτητες ρίψεις). Το ένα ζάρι είναι μαύρο και το άλλο άσπρο. Έστω

A : "το ψηφίο του μαύρου ζαριού είναι άρτιος αριθμός"

B : "το ψηφίο του άσπρου ζαριού είναι περιττός αριθμός"

Γ : "τα ψηφία και των 2 ζαριών είναι και τα 2 άρτιοι αριθμοί ή είναι και τα 2 περιττοί αριθμοί"

Δείξτε ότι $A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \Gamma$ και $B \perp\!\!\!\perp \Gamma$, ενώ τα A, B, Γ δεν είναι (αμοιβαία) ανεξάρτητα.

3) Ένας ταξιδιώτης φτάνει σε ένα σταυροδρόμι. Ξέρει ότι εκεί θα βρεί δύο δρόμους, ένα αδιέξοδο και το σωστό δρόμο. Σε αυτό το σταυροδρόμι υπάρχουν 3 αδέρφια, B_1, B_2 και B_3. ο B_i λέει $\frac{4i-3}{10}$ φορές την αλήθεια, $i=1,2,3$.
Ο ταξιδιώτης απευθύνεται στην τύχη σε κάποιον απο τους αδερφούς. Ζητάει να του πεί το σωστό δρόμο, και αφού προχωράει λίγο συνηδειτοποιεί ότι ο δρόμος που του είπε ήταν ο σωστός. Ποιά είναι η πιθανότητα ο ταξιδιώτης να είχε απευθυνθεί στον B_i, $i=1,2,3$?

4) <u>Θέμα Εξετάσεων (Ιούλιος 2011)</u>

Ένα κουτί περιέχει S λαχνούς αριθμημένους απο το 1 μέχρι το S. Ένας λαχνός επιλέγεται στην τύχη και στη συνέχεια ρίχνουμε ένα νόμισμα τόσες φορές όσες ήταν η ένδειξη του λαχνού που επιλέχθηκε.

i) Ποιά είναι η πιθανότητα εμφάνισης τουλάχιστον μία φορά της ένδειξης γράμματα;

ii) Ποιά είναι η πιθανότητα να έγιναν K-ρίψεις του νομίσματος $(K=1,2,\dots,S)$ αν σε μία επανάληψη του τυχαίου πειράματος δεν εμφανίστηκε καμία φορά η ένδειξη γράμματα;

5). Θέμα Εξετάσεων (Ιούνιος 2013)
Θεωρούμε 10 κάλπες αριθμημένες απο το 1 εως το 10, καθεμιά απο τις οποίες περιέχει 11 σφαιρίδια.
Πιο συγκεκριμένα, οι κάλπες 1,2,...,7 περιέχουν 3 λευκά και 8 μαύρα σφαιρίδια, ενώ οι κάλπες 8,9,10 περιέχουν 5 λευκά και 6 μαύρα σφαιρίδια. Διεξάγεται το ακόλουθο πείραμα τύχης: Επιλέγεται στην τύχη μία κάλπη (δηλ. επιλέγεται η κάλπη i - με πιθανότητα $\frac{1}{10}$, $i=1,2,\dots,10$) και κατόπιν επιλέγονται με επανάθεση 5 σφαιρίδια.
Να υπολογιστούν:
(1) η πιθανότητα η κάλπη πα επιλέχθηκε να είναι η κάλπη 3, τα πρώτα 3 σφαιρίδια που εξήχθησαν να είναι λευκά και τα 2 τελευταία μαύρα.
(2) η πιθανότητα η κάλπη που επιλέχθηκε να είναι η κάλπη 3 και να εξήχθησαν συνολικά 3 λευκά και 2 μαύρα σφαιρίδια.
(3) η πιθανότητα όλα τα σφαιρίδια που εξήχθησαν να είναι λευκά.
(4) η δεσμευμένη πιθανότητα η κάλπη που επιλέχθηκε να ήταν η 3, δεδομένου ότι τα σφαιρίδια που εξήχθησαν ήταν όλα λευκά.

6) Ασκ. 2.4 Χελιώτης

7) Ασκ. 2.7 Χελιώτης

8) Ασκ. 2.8 Χελιώτης

9) Ασκ 26, Ομάδα Β (σελ 176, Κούτρας)

10). Συνέχεια της Άσκησης 9 του Φυλλαδίου 1. (Συνάρτηση του Euler)
ii) Δείξτε ότι αν $p_1, p_2, \dots, p_k$ είναι διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί που διαιρούν τον n, τότε τα ενδεχόμενα $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_k}$ είναι ανεξάρτητα. (προϋποθέτει ανεξαρτησία πεπερασμένου πλήθους ενδεχομένων).
iii) Η συνάρτηση του Euler ϕ ορίζεται να είναι η συνάρτηση που αποδίδει $\forall n \in \mathbb{N}^*$ το πλήθος των φυσικών αριθμών μικρότερων ή ίσων του n, που είναι πρώτοι ως προς τον n, δηλαδή

$$\phi(n) = \#\{K : 1 \le K \le n \text{ και } \underset{\text{Μ.Κ.Δ}}{(K,n)} = 1\}.$$

Δείξτε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

όπου $\mathcal{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών.