Φυλλάδιο 3

Ασκ. 3.1: Έστω ένα ζάρι (με 6 έδρες) όπου 2 έδρες έχουν βαφτεί κόκκινες, 2 είναι κίτρινες και οι άλλες 2 μπλέ.

α) Το πείραμα τύχης συνίσταται στο να ρίξουμε 2 φορές το ζάρι. Δώστε ένα δ.χ. κατάλληλο για αυτό το π.τ. και τις πιθανότητες των δειγματικών σημείων.

β) Ρίχνουμε το ζάρι μέχρι να φέρουμε πρώτη φορά κόκκινο. Δώστε ένα δ.χ. κατάλληλο για αυτό το π.τ. και τις πιθανότητες των δειγματικών σημείων.
Μπορείτε να θέσετε $\overline{K} = \{$όχι κόκκινη έδρα$\}$.

γ) Δύο άτομα A και B παίζουν με αυτή τη σειρά μέχρι να φέρει για πρώτη φορά κάποιος κόκκινο.
Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο κάθε παίχτης;

δ) Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των ρίψεων μέχρι να σταματήσει το παιχνίδι του ερωτήματος γ). Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας f_X της τ.μ. X και τη συνάρτηση κατανομής της, F_X.

Ασκ. 3.2: Αποδείξτε ότι η κατανομή πιθανότητας $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, όπου $P_X(A) = P(X \in A)$ είναι πράγματι συνάρτηση πιθανότητας, επαληθεύοντας τις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση πιθανότητας.

Ασκ. 3.3: (Ασκ. 2.10 Χελιώτης + 1 υποερώτημα)

Το συρτάρι Σ_1 περιέχει 3 χρυσά και 3 αργυρά νομίσματα, ενώ το συρτάρι Σ_2 περιέχει 3 χρυσά και 6 αργυρά. Κλέφτης (στα σκοτεινά) ανοίγει ένα συρτάρι στην τύχη και αρπάζει δύο νομίσματα στην τύχη.

(α) Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και τα 2 χρυσά?

(β) Αν διαπιστωθεί (κατά τη σύλληψή του) ότι έχει κλέψει 2 χρυσά νομίσματα, ποιά είναι η πιθανότητα να είχε ανοίξει το συρτάρι Σ_1?

(γ) Αν X η τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των χρυσών νομισμάτων που άρπαξε ο κλέφτης, να υπολογίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας f_X.

Ασκ. 3.4. (Ασκ. 3.1. Χελιώτης και επιπλέον υποερώτημα)

Έστω X τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 &, \text{αν } t<0 \\ 1-e^{-t^2} &, \text{αν } t\geq 0. \end{cases}$$

α) Ποιά είναι η σ.κ. για την τ.μ. $Y := e^X$?

β) Βρείτε συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για τις X και Y.

Ασκ. 3.5. (Ασκ. 3.2 Χελιώτης)

Η τ.μ. X έχει σ.κ. $F(x) = (x+1)/3$, $-1<x<2$. Αφού προσδιορίσετε τις τιμές $F(x)$ για τα υπόλοιπα x, να υπολογίσετε τη σ.κ. $F_Y(y)$, $y\in\mathbb{R}$, της τ.μ. $Y = |X|$.

Ασκ. 3.6.

Για κάθε μία απο τις επόμενες συναρτήσεις, ελέγξτε αν αποτελούν συναρτήσεις κατανομής. Σε καταφατική περίπτωση, προσδιορίστε το είδος της τυχαίας μεταβλητής (διακριτή, συνεχής, μικτή) και αν είναι συνεχής, εξετάστε αν είναι απόλυτα συνεχής.

(α) $F(x) = \begin{cases} 0 &, \text{αν } x<0 \\ x &, \text{αν } 0\leq x<1 \\ 1 &, \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$ (β) $F(x) = \begin{cases} 0 &, \text{αν } x<-1 \\ x^2 &, \text{αν } -1\leq x<1 \\ 1 &, \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$

(γ) $F(x) = \begin{cases} 0 &, \text{αν } x<-1 \\ \frac{1}{2} &, \text{αν } -1\leq x<1 \\ 1 &, \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$ (δ) $F(x) = \begin{cases} 0 &, x<0 \\ \frac{x^2+1}{2} &, 0\leq x<1 \\ 1 &, x\geq 1 \end{cases}$

Ασκ. 3.7.

Έστω $f(x) = c/3^x$ για $x=1,2,\ldots$, και $f(x)=0$, διαφορετικά. ($c\in\mathbb{R}$).

(α) Για ποιά τιμή του c η $f(x)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τ.μ. ?

(β) Για την τιμή του c που βρήκατε στο (α), ποιά είναι η σ.κ. της τυχαίας μεταβλητής που αντιστοιχεί στην f.

Ασκ. 3.8 : Εξετάστε αν υπάρχουν

(α) σ.κ. F_X και F_Y τέτοιες ώστε $F_X(x) < F_Y(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

(β) συναρτήσεις πυκνότητας f_X και f_Y τέτοιες ώστε $f_X(x) < f_Y(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.