<u>ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΙ ΧΩΡΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ</u>

Από την πρώτη στιγμή που η έννοια της πιθανότητας άρχισε να συζητείται και οι ασχολούμενοι με αυτήν (παίκτες τυχερών παιχνιδιών, μαθηματικοί, επιστήμονες άλλων κλάδων) προσπαθούσαν να διαμορφώσουν ένα θεωρητικό πλαίσιο για να κατανοήσουν τυχαία φαινόμενα, ένα από τα πρώτα θέματα που τράβηξαν την προσοχή τους ήταν η ιδέα του «ισοπίθανου».

Με σύγχρονη ορολογία, αυτό που θέλουμε να μελετήσουμε είναι ένας χώρος πιθανότητας όπου κάθε σημείο του Δειγματικού Χώρου Ω έχει «ίση» πιθανότητα να επιλεγεί κατά το τυχαίο πείραμα που εκτελούμε.

Έχουμε τρεις περιπτώσεις για το σύνολο Ω: (α) να είναι πεπερασμένο, (β) να είναι αριθμήσιμο (δηλ. να μπορεί να έρθει σε 1-1 αντιστοιχία με τους θετικούς ακεραίους), (γ) να είναι υπεραριθμήσιμο (π.χ. το διάστημα [0,1]).

<u>Περίπτωση (α):</u> $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$
Αφού κάθε στοιχείο του Ω έχει ίση πιθανότητα να επιλεγεί, αν αυτή είναι *p*, θα πρέπει $p > 0$, διότι αν ήταν $p = 0$, θα ερχόμασταν σε αντίφαση με το πρώτο αξίωμα του Kolmogorov, δεδομένου ότι πρέπει $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = np = 1$ (η πρώτη ισότητα από το τρίτο αξίωμα). Η παραπάνω σχέση λέει ότι αναγκαστικά, στην (α) περίπτωση του πεπερασμένου δειγματικού χώρου, θα πρέπει $p = 1/n$. Δεδομένου ότι κάθε ενδεχόμενο *A* θα απαρτίζεται από πεπερασμένο αριθμό σημείων του Ω, το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov συνεπάγεται ότι $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \frac{|A|}{n}$, όπου με $|A|$ συμβολίζουμε τον πληθάριθμο (πλήθος στοιχείων) του συνόλου *A*.

Πάρα πολλά προβλήματα και εφαρμογές υπάγονται στην παραπάνω κατηγορία και θάλεγε κάποιος ότι, από όσα είπαμε παραπάνω, το συμπέρασμα είναι ότι η λύση αυτών των προβλημάτων είναι πολύ εύκολη. Αυτό δεν είναι ακριβές, αντίθετα ορισμένες φορές μπορεί η λύση τους να είναι εξαιρετικά δύσκολη. Ας δούμε το λόγο.

Από τον τύπο είναι σαφές ότι το πρόβλημα υπολογισμού πιθανοτήτων για την περίπτωση (α) ανάγεται στο πρόβλημα καταμέτρησης του αριθμού των στοιχείων ενός συνόλου *A*. Άρα, η δυσκολία του προβλήματος αφορά την καταμέτρηση αυτού του αριθμού. Και πραγματικά, σε πολλές περιπτώσεις η καταμέτρηση αυτή μπορεί να αναδειχτεί σε σπαζοκεφαλιά. Ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με προβλήματα καταμέτρησης είναι η συνδυαστική. Επειδή οι πεπερασμένοι ομοιόμορφοι χώροι πιθανότητας είναι οι πρώτοι χώροι πιθανότητας που μελετά ένας νέο-εισερχόμενος στις πιθανότητες, συνηθίζεται στην αρχή μαθημάτων όπως οι Πιθανότητες Ι να ασχολούμαστε με συνδυαστικά προβλήματα.

<u>Περίπτωση (β):</u> $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
Βλέπουμε αμέσως ότι ομοιόμορφοι χώροι πιθανότητας με αριθμήσιμο δειγματικό χώρο Ω δεν υπάρχουν. Αυτό διότι αν κάθε στοιχείο έφερε πιθανότητα *p* να επιλεγεί, αν μεν ήταν $p > 0$, τότε $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = p + p + \ldots = \infty$ (αντίφαση με το πρώτο

αξίωμα) ενώ αν ήταν $p=0$, τότε $P(\Omega)=\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i)=0+0+\ldots=0$ (επίσης αντίφαση με το πρώτο αξίωμα).

Αλλά, εξαιρετικά σημαντικά για τις εφαρμογές τυχαία φαινόμενα έχουν αριθμήσιμο δειγματικό χώρο (π.χ. κάτω από ήπιες υποθέσεις, ο αριθμός των περιστατικών που συμβαίνουν σε ένα ορισμένο διάστημα χρόνου, όπως κλήσεις σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, αριθμός ατόμων που διασπώνται από ένα ραδιενεργό υλικό, κ.λπ.). Επομένως, οι ομοιόμορφοι χώροι πιθανότητας δεν επαρκούν για τη μελέτη της τυχαιότητας.

Περίπτωση (γ): Το Ω είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Και πάλι, αν p είναι η (σταθερή) πιθανότητα να εμφανιστεί ένα στοιχείο του Ω, το p δε μπορεί να είναι θετικό αφού κάθε άθροισμα πάνω σε ένα αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων του Ω θα έδινε άπειρη πιθανότητα, πράγμα άτοπο, αφού από τα αξιώματα Kolmogorov προκύπτει ότι η πιθανότητα παίρνει τιμές στο [0,1].

Το ερώτημα είναι αν, για Ω υπεραριθμήσιμο σύνολο, μπορούμε να πάρουμε ομοιόμορφο χώρο με $p(\omega)=0$ για κάθε ω. Είναι σαφές ότι η προηγούμενη παρατήρηση για αριθμήσιμα σύνολα, όπου δε γινόταν να έχουμε $p=0$, τώρα δε δουλεύει, διότι ναι μεν κάθε άθροισμα πάνω σε ένα αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων του Ω θα δίνει 0, αλλά αυτό δε λέει τίποτα για την τιμή του $P(\Omega)$.

Εδώ αξιοποιούμε τη διαίσθησή μας. Αν υπήρχε ένα τέτοιο μέτρο πιθανότητας, τότε θάπρεπε η πιθανότητα ενός συνόλου A να είναι ανάλογη με το «μέγεθός» του. Αν, ας πούμε, ο δειγματικός χώρος Ω είναι ένα διάστημα $[a,b]$ της ευθείας των πραγματικών αριθμών και $[c,d]$ είναι ένα υποδιάστημα του $[a,b]$, τότε συμβαδίζει απόλυτα με τη διαίσθησή μας να ζητήσουμε να ισχύει $P([c,d])={}^{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\upsilon\,[c,d])}\!\big/_{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\upsilon\,[a,b])}$. Ταυτίζοντας έτσι το «μέγεθος» ενός διαστήματος στους πραγματικούς με το μήκος του (και γενικά στους Ευκλειδείους χώρους με τον όγκο του), θα πετυχαίναμε αυτόματα την ισχύ των τριών αξιωμάτων του Kolmogorov για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια διαστημάτων.

Τα παραπάνω συμπίπτουν απόλυτα με τη διαίσθηση που έχουμε της «ομοιομορφίας». Για παράδειγμα, αν κάποιος μας έλεγε ότι διαλέγει «τελείως στην τύχη» έναν αριθμό στο διάστημα $[0,1]$ και μας ρωτούσε ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός να είναι μικρότερος ή ίσος του ½ , πριν καν το σκεφτούμε θα του λέγαμε ½ , δηλαδή $P([0,\tfrac{1}{2}])={}^{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\upsilon\,[0,\frac{1}{2}])}\!\big/_{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\upsilon\,[0,1])}=1/2$, ενώ, φυσικά, $P([0,1])={}^{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\upsilon\,[0,1])}\!\big/_{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\upsilon\,[0,1])}=1$. Παρατηρήστε ότι αφού η πιθανότητα οποιουδήποτε σημείου θα ήταν 0, το αν το διάστημα θα περιέχει τα άκρα του δεν έχει σημασία, δηλαδή θα ήταν $P([c,d])=P((c,d])=P([c,d))=P((c,d))$.

Το ερώτημα βέβαια είναι τι κάνουμε αν το ενδεχόμενο A του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα *δεν* είναι διάστημα. Βέβαια, για κάποια σύνολα η έννοια του μήκους γενικεύεται τετριμμένα (π.χ. αν το A αποτελεί ένωση διαστημάτων ξένων μεταξύ τους). Παρόλο που μπορούμε να επιχειρήσουμε ακόμη παραπέρα τέτοιες γενικεύσεις για τομές και ενώσεις διαστημάτων, εντούτοις είναι σαφές ότι θα υπάρχουν σύνολα που δε θα μπορούν να περιγραφούν έτσι.

Το ερώτημα, αν παραμείνουμε στο παράδειγμα του $\Omega = [0,1]$ και το διατυπώσουμε σωστά, είναι επομένως το εξής: Υπάρχει άραγε μια συνολοσυνάρτηση που να απεικονίζει τα υποσύνολα του $[0,1]$ στους πραγματικούς αριθμούς και η οποία να ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του Kolmogorov, έτσι ώστε ο περιορισμός της πάνω στα διαστήματα να συμπίπτει με το μήκος τους;

Η απάντηση είναι ναι και όχι! Αν επιμείνουμε η συνολοσυνάρτηση αυτή να ορίζεται πάνω σε *κάθε* υποσύνολο του $[0,1]$, τότε τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει. Αν όμως δεχτούμε η σ-άλγεβρα του χώρου πιθανότητας να είναι «κάπως μικρότερη» από το δυναμοσύνολό του, τότε τέτοια συνάρτηση υπάρχει και είναι το μέτρο Lebesgue.Φυσικά, για να αποδειχτούν οι προτάσεις αυτές απαιτείται θεωρία μέτρου.

Πάντως, το γεγονός ότι υπάρχουν σύνολα για τα οποία δε μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα σε ένα ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας, όταν ο δειγματικός χώρος είναι υπεραριθμήσιμος, δεν προκαλεί καμία περιπλοκή στις εφαρμογές, διότι σ’ αυτές ποτέ δεν παρουσιάζεται περίπτωση τέτοιου «παθολογικού» συνόλου. Άλλωστε, η κατασκευή ενός μη μετρήσιμου κατά Lebesgue συνόλου στο $[0,1]$ απαιτεί μεγάλο κόπο και το σύνολο είναι κάπως περίεργο.

Επομένως, τουλάχιστον στο $[0,1]$, το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας είναι το μέτρο Lebesgue. Να προσθέσουμε, όμως, ότι όταν πάμε να γενικεύσουμε την ιδέα του ομοιόμορφου χώρου πιθανότητας για άλλους τοπολογικούς χώρους, τότε η σ-άλγεβρα που «κάνει τη δουλειά» είναι τα σύνολα Borel, τα οποία ορίζονται ως η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά (ισοδύναμα, κλειστά) σύνολα. Αυτή, στο $[0,1]$, είναι μικρότερη από τη σ-άλγεβρα των κατά Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, αλλά και πάλι στις εφαρμογές δε χάνουμε τίποτα αν κάνουμε αυτόν τον περιορισμό. Για το λόγο αυτό, στα βιβλία Θεωρίας Πιθανοτήτων που αφορούν ένα δεύτερο μάθημα στις Πιθανότητες, ο ορισμός του μέτρου πιθανότητας δίνεται απευθείας για τη σ-άλγεβρα των συνόλων Borel.