Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Στον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

κάνουμε τις εξής δύο υποθέσεις.

- Το διάστημα ολοκλήρωσης $[a,b]$ είναι φραγμένο.
- Η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα όταν τουλάχιστον μία από αυτές τις δύο συνθήκες παραβιάζεται.

1. Ολοκληρώματα σε μη φραγμένα διαστήματα

Τι σημαίνουν τα

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^a f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

όπου $a \in \mathbb{R}$?

Α. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,\infty)$. Ορίζουμε

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx \tag{1}$$

όταν το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. Αν το όριο είναι πραγματικός αριθμός λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Αν το όριο είναι ∞ (αντίστοιχα, $-\infty$) λέμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει στο ∞ (αντίστοιχα, στο $-\infty$).

Β. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, όμοια ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{K\to-\infty} \int_K^a f(x)\,dx \tag{2}$$

αν το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. Πάλι υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(-\infty,a]$.

Γ. Για το τρίτο ολοκλήρωμα, υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επιλέγουμε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

με την προϋπόθεση ότι τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν και το άθροισμά τους μπορεί να οριστεί (δηλαδή δεν ισούται το ένα με ∞ και το άλλο με $-\infty$). Ο ορισμός των δύο αυτών ολοκληρωμάτων έχει δοθεί πιο πάνω. Προσοχή, το $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ *δεν* ορίζεται ως

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M f(x)\,dx.$$

Παραδειγματα

1) $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = 1/3$.

Γιατί για $M>0$ έχουμε,

$$\int_0^M e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^M (-e^{-3x})'\,dx = \frac{1}{3}(e^0 - e^{-3M}) \to \frac{1}{3}$$

για $M \to \infty$.

2) $\int_2^\infty 1/x\,dx = \infty$

Γιατί για $M>0$ έχουμε,

$$\int_2^M \frac{1}{x}\,dx = \log M - \log 2 \to \infty$$

για $M \to \infty$.

3) $\int_0^\infty \sin x\,dx$ δεν συγκλίνει.

Γιατί για $M>0$ έχουμε,

$$\int_0^M \sin x\,dx = -\cos M + \cos 0$$

το οποίο δεν έχει όριο για $M \to \infty$.

4)

$$\int_0^\infty e^{ax}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{|a|} & \text{αν } a<0, \\ \infty & \text{αν } a \geq 0. \end{cases}$$

Γιατί για $M>0$ έχουμε,

$$\int_0^M e^{ax}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a}(e^{aM} - e^0) & \text{αν } a \neq 0, \\ M & \text{αν } a = 0. \end{cases}$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο άπειρο για $a \geq 0$ και στο $-1/a$ για $a<0$,

5) [**ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ**]

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & \text{αν } a>1, \\ \infty & \text{αν } a \leq 1. \end{cases}$$

Γιατί

$$\int_1^\infty x^{-a}\,dx = \left[\frac{1}{-a+1}x^{-a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} 0 - \frac{1}{-a+1} & \text{αν } -a+1<0, \\ \infty - \frac{1}{-a+1} & \text{αν } -a+1>0. \end{cases}$$

Ενώ για $a=1$, έχουμε $\int_1^\infty x^{-1}\,dx = \log x|_1^\infty = \infty$.

6)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Γιατί

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\tan^{-1} x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$\tan^{-1}$ συμβολίζει την αντίστροφη συνάρτηση του περιορισμού της εφαπτομένης, $\tan$, στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$.

7) $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ δεν συγκλίνει γιατί εύκολα βρίσκουμε ότι $\int_{-\infty}^{0} x\,dx = -\infty, \int_{0}^{\infty} x\,dx = \infty$, των οποίων το άθροισμα δεν ορίζεται.

Παρατήρηση. Στην πράξη, δεν είμαστε τόσο τυπικοί όπως στα πρώτα παραδείγματα, να παίρνουμε το $\int_a^M$ και μετά να στέλνουμε το M στο ∞. Συνήθως, αντί του M γράφουμε ∞, και το φανταζόμαστε ως έναν μεγάλο αριθμό. Όταν έρθει η στιγμή να το αντικαταστήσουμε, παίρνουμε απλώς όριο στο άπειρο. Αυτό κάναμε στα παραδείγματα 5 και 6 πιο πάνω.

2. Ολοκληρωματα μη φραγμενων συναρτησεων

Τι σημαίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx\,?$$

Εδώ η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ είναι μη φραγμένη στο $(0,1]$.

Α. Αν έχουμε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς, και μία συνεχή συνάρτηση $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx \tag{3}$$

όταν το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, και λέμε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Προσέξτε ότι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο όριο (3) είναι ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα Riemann γιατί για $c \in (a,b)$ η f είναι συνεχής στο $[c,b]$.

Β. Αν έχουμε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς, και μία συνεχή συνάρτηση $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, τότε ο αντίστοιχος ορισμός είναι

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx \tag{4}$$

όταν το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Γ. Αν έχουμε $a < c < b$ πραγματικούς αριθμούς και $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή (στις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, κάποιο από τα όρια της f στο c είναι άπειρο), τότε ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

με την προϋπόθεση ότι τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν και το άθροισμά τους μπορεί να οριστεί (δηλαδή δεν ισούται το ένα με ∞ και το άλλο με $-\infty$). Ο ορισμός των δύο αυτών ολοκληρωμάτων έχει δοθεί πιο πάνω.

Γενικότερα, όταν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[a,b]$, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ ορίζεται ανάλογα όπως στην περίπτωση Γ πιό πάνω.

Παραδειγματα

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$.

Γιατί για $\varepsilon > 0$ έχουμε,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$$

για $\varepsilon \to 0^+$.

2) $\int_0^1 \log x\,dx = -1$.

Γιατί για $\varepsilon > 0$ έχουμε,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \log x \, dx = (x \log x - x)\Big|_{\varepsilon}^{1} = -1 - \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon \to 0$$

για $\varepsilon \to 0^+$.

3) [**ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ**]

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{αν } a < 1, \\ \infty & \text{αν } a \geq 1. \end{cases}$$

Γιατί για $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 1$,

$$\int_0^1 x^{-a} \, dx = \left[\frac{1}{-a+1} x^{-a+1} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{-a+1} - 0 & \text{αν } \; -a+1 > 0, \\ \frac{1}{-a+1} - (-\infty) & \text{αν } \; -a+1 < 0. \end{cases}$$

Ενώ για $a = 1$, έχουμε $\int_0^1 x^{-1} \, dx = \log x|_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty$.

4) Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3} \, dx$$

δεν μπορεί να οριστεί. Γιατί $\int_0^2 x^{-3} \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_0^2 = -1/8 - (-\infty) = \infty$, και όμοια $\int_{-1}^0 x^{-3} \, dx = -\infty$. Εδώ πρέπει να προσέξει κανείς να μην υπολογίσει

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3} \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}.$$

Αυτό είναι λάθος. Το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ γιατί η x^{-3} δεν ορίζεται σε όλο το διάστημα $[-1, 2]$, λείπει ένα εσωτερικό σημείο.

Παρατήρηση. Στους πιο πάνω ορισμούς ζητούσαμε η f να είναι συνεχής. Αυτό είναι υπερβολικό. Χρειαζόμαστε απλώς τα ολοκληρώματα Riemann που εμφανίζονται στα δεξιά μέλη των σχέσεων (1), (2), (3), (4), να υπάρχουν. Η κατάλληλη προϋπόθεση είναι η τοπική Riemann ολοκληρωσιμότητά της f στο αντίστοιχο διάστημα, $[a, \infty), (-\infty, a], (a, b]$, ή $[a, b)$. Αυτή η έννοια ορίζεται ως εξής.

Μιά συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού ένα διάστημα[1] $I \subset \mathbb{R}$ την λέμε *τοπικά Riemann ολοκληρώσιμη* αν για κάθε πεπερασμένο κλειστό υποδιάστημα $J \subset I$, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο J (το οποίο προϋποθέτει ότι η f είναι φραγμένη στο J). Για ευκολία, πιο κάτω, μια τέτοια συνάρτηση θα την λέμε τοπικά ολοκληρώσιμη.

3. Ολοκληρωματα μεικτου τυπου

Είναι δυνατόν ένα ολοκλήρωμα να έχει και τα δύο προβλήματα που είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Δηλαδή, και άπειρο χωρίο και μη φραγμένη συνάρτηση. Για παράδειγμα

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \, dx.$$

Σε τέτοιες περιπτώσεις, επιλέγουμε ένα (οποιοδήποτε) σημείο a στο εσωτερικό του διαστήματος ολοκλήρωσης I. Το σημείο διασπά το διάστημα σε δύο διαστήματα $I_1 := I \cap (-\infty, a], I_2 := I \cap [a, \infty)$. Το ολοκλήρωμα στο I ορίζεται ως το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στο I_1 και στο I_2 εφόσον αυτά μπορούν

[1] Πεπερασμένο ή άπειρο, ανοικτό ή κλειστό ή ημίκλειστο.

να οριστούν και το άθροισμα τους επίσης μπορεί να οριστεί, δηλαδή δεν είναι της μορφής $\infty + (-\infty)$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα στο I δεν ορίζεται.
Για παράδειγμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\, dx := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\, dx.$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}\, dx := \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}\, dx + \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}\, dx + \int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}\, dx.$$

Προφανώς

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+, M\to\infty} \int_\varepsilon^M \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\, dx.$$

4. Σύγκλιση γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Εδώ θα δούμε συνθήκες κάτω από τις οποίες το όριο που ορίζει ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει. Τα θεωρήματα που αναφέρουμε είναι ανάλογα θεωρημάτων για σύγκλιση σειρών. Δίνουμε τις εκδόσεις τους για το ολοκλήρωμα

$$\int_a^\infty f(x)\, dx.$$

Ανάλογα θεωρήματα ισχύουν για τα υπόλοιπα είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 1. Αν η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και μη αρνητική, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

υπάρχει και είναι ένας αριθμός στο $[0,\infty)\cup\{\infty\}$.

Προφανώς, αφού η συνάρτηση $H(M) = \int_a^M f(x)\, dx$ είναι αύξουσα, και επομένως έχει όριο για $M\to\infty$ (το οποίο ισούται με $\sup_{M>a} H(M)$). Ενδέχεται βέβαια το όριο να είναι ∞.

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα θεώρημα σύγκρισης, ανάλογο αυτού για σειρές. Η απόδειξη του είναι εύκολη.

Θεώρημα 2. Έστω $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμες με

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{για κάθε } x \in [a,\infty).$$

Τότε
(α)

$$\int_a^\infty g(x)\, dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\, dx < \infty.$$

(β)

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(x)\, dx = \infty.$$

Θεώρημα 3. Αν η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty,$$

τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Το Θεώρημα 2 είναι πολύ χρήσιμο για περιπτώσεις που η f δεν διατηρεί πρόσημο. Είναι το ανάλογο του ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει. Αποδεικνύεται και αυτό χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει (και μάλιστα σε πραγματικό αριθμό).

Παραδειγματα

Θα εξετάσουμε ως προς την σύγκλιση τα ολοκληρώματα.

$$1)\int_2^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad 2)\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x}\log x}\,dx \qquad 3)\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx \qquad 4)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

$$5)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \qquad 6)\int_0^3 \frac{1}{|1-x|}\,dx \qquad 7)\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt,\ a\in\mathbb{R} \qquad 8)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

1) Το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το μόνο πρόβλημα είναι το μη φραγμένο διάστημα ολοκλήρωσης. Στο ∞ η συνάρτηση συμπεριφέρεται σαν την $x^{-3/2}$ και το αποτέλεσμα έπεται από το Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 1. Τυπικά, πάμε ως εξής. Επειδή $\lim_{x\to\infty}\log x/x^{0.1}=0$, υπάρχει $M>1$ ώστε $\log x < x^{0.1}$ για $x\ge M$. Τώρα, για $x\in[M,\infty)$ έχουμε

$$\frac{\log x}{\sqrt{x^3-1}} < \frac{x^{0.1}}{\sqrt{x^3/2}} = \sqrt{2}\frac{1}{x^{1.4}}.$$

Το συμπέρασμα έπεται από το Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 1 (αφού $1.4>1$), και από το Θεώρημα 2 (α).

2) Το ολοκλήρωμα αποκλίνει, ισούται με ∞. Γιατί υπάρχει $M>3$ ώστε $\log x < x^{0.1}$ για $x\ge M$. Επομένως για $x\ge M$ έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}\log x} > \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x^{0.1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{0.6}}.$$

Και το συμπέρασμα έπεται από το Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 1 (αφού $0.6<1$), και από το Θεώρημα 2 (β).

3) Το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Αυτό γιατί η $e^{-\sqrt{x}}$ φθίνει πιο γρήγορα από την x^{-2} η οποία έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα στο $[1,\infty)$ λόγω του Παραδείγματος 5 από την Παράγραφο 1. Τυπικά, υπάρχει σταθερά M ώστε $x^2e^{-\sqrt{x}}\le M$ για κάθε $x\in[1,\infty)$, αφού η $x^2e^{-\sqrt{x}}$ είναι συνεχής σε εκείνο το διάστημα με πεπερασμένο όριο στο ∞ (όριο 0 μάλιστα). Αφού λοιπόν $e^{-\sqrt{x}}\le M/x^2$ στο $[1,\infty)$, το συμπέρασμα έπεται από το Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 1 και το Θεώρημα 2 (α).

4) Το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Αρκεί να το δείξουμε αυτό για τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx, \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$$

Θα επικαλεστούμε το Θεώρημα 2(α). Για το πρώτο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε το ότι ο ολοκληρωτέος φράσσεται άνω από την $1/\sqrt{x}$ η οποία έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα στο $[0,1]$ (Παράδειγμα 3 της Παραγράφου 2). Για το δεύτερο, χρησιμοποιούμε ότι ο ολοκληρωτέος φράσσεται άνω από την $1/x^{3/2}$ η οποία έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα στο $[1,\infty)$ (Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 1). Δηλαδή παρατηρούμε ότι στο 0 ο ολοκληρωτέος συμπεριφέρεται σαν την $1/\sqrt{x}$ ενώ στο ∞ σαν την $1/x^{3/2}$.

5) Το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Αρκεί να το δείξουμε αυτό για τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx, \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$$

Για το πρώτο, χρησιμοποιούμε ότι ο ολοκληρωτέος φράσσεται άνω από την $\sqrt{2}/\sqrt{x}$ η οποία έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα στο $[0,1/2]$ (Παράδειγμα 3 της Παραγράφου 2). Για το δεύτερο χρησιμοποιούμε ότι ο ολοκληρωτέος φράσσεται άνω από την $\sqrt{2}/\sqrt{1-x}$ η οποία έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα στο $[1/2,1]$. Για τον τελευταίο ισχυρισμό, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=1-x$, και αναγόμαστε σε γνωστή περίπτωση.

6) Το ολοκλήρωμα αποκλίνει, ισούται με ∞. Αυτό γιατί καθένα από τα

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-x|}\,dx, \int_1^3 \frac{1}{|1-x|}\,dx$$

ισούται με ∞. Π. χ., για το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζουμε

$$\int_0^1 \frac{1}{|1-x|}\,dx \overset{z=1-x}{=} \int_0^1 \frac{1}{z} = \log 1 - \log(0^+) = -(-\infty) = \infty.$$

7) Η τιμή αυτού του ολοκληρώματος συμβολίζεται με $\Gamma(a)$, ορίζει την συνάρτηση Γάμμα. Είναι πεπερασμένο για $a>0$, και ισούται με ∞ για $a\le 0$.
Εδώ έχουμε μη φραγμένο χωρίο ολοκλήρωσης, και πρόβλημα στο 0 αν $a-1<0$.
Γράφουμε λοιπόν

$$\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{a-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt.$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt$$

συγκλίνει για κάθε $a\in\mathbb{R}$ γιατί $\lim_{t\to\infty} t^{a-1}e^{-t/2}=0$. Οπότε υπάρχει μία σταθερά $C\in(0,\infty)$ ώστε $t^{a-1}e^{-t/2}<C$ για κάθε $t\in[1,\infty)$, και άρα

$$\int_1^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt \le C\int_1^\infty e^{-t/2}\,dt < \infty.$$

Για το ολοκλήρωμα στο $[0,1]$ παρατηρούμε ότι

$$e^{-1}\int_0^1 t^{a-1}\,dt \le \int_0^1 t^{a-1}e^{-t}\,dt \le \int_0^1 t^{a-1}\,dt,$$

και το συμπέρασμα έπεται από το Παράδειγμα 3 της Παραγράφου 2. Ουσιαστικά, η συνάρτηση e^{-t} είναι εντελώς αδιάφορη στο $[0,1]$ όταν το ερώτημα είναι η σύγκλιση του συγκεκριμένου ολοκληρώματος. Ήταν όμως πολύ σημαντική όταν το χωρίο ολοκλήρωσης ήταν το $[1,\infty)$.

8) Το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το ολοκλήρωμα στο $[0,1]$ υπάρχει αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα (έχει όριο 1 για $x\to 0$, άρα δεν υπάρχει πρόβλημα στο 0).

Για το ολοκλήρωμα στο $[1,\infty)$, υπολογίζουμε για $M>1$,

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_1^M \frac{1}{x}(\cos x)'\,dx = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{1}{x^2}\cos x\,dx.$$

Το όριο του τελευταίου ολοκληρώματος για $M\to\infty$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ γιατί συγκλίνει απολύτως αφού

$$\int_1^\infty \left|\frac{1}{x^2}\cos x\right|\,dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^\infty = 1<\infty.$$

Ο ισχυρισμός μας έπεται από το Θεώρημα 3 πιό πάνω.
Είναι μια απλή άσκηση να δει κανείς ότι το αρχικό ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει απολύτως, δηλαδή

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty,$$

οπότε δεν μπορούσαμε να δείξουμε την σύγκλιση του αρχικού ολοκληρώματος μέσω απόλυτης σύγκλισης.

Παρατήρηση. Από τα παραδείγματα αυτού του φυλλαδίου, μπορεί να μείνει κανείς με την εντύπωση ότι μια τοπικά ολοκληρώσιμη $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ με μη αρνητικές τιμές για να έχει

$$\int_a^\infty f(t)\,dt<\infty,$$

θα πρέπει να ικανοποιεί $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$. Αυτό δεν είναι σωστό (ενώ το ανάλογο για σειρές ισχύει). Για παράδειγμα, θεωρούμε την $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ της οποίας το γράφημα είναι το εξής. Για κάθε $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, στο διάστημα $[n, n+\frac{2}{2^n}]$ το γράφημα είναι οι ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου του οποίου η βάση έχει κορυφές στα σημεία $(n,0),(n+\frac{2}{2^n},0)$ και ύψος 1. Δηλαδή το τρίγωνο έχει εμβαδόν $1/2^n$. Στο υπόλοιπο του $[0,\infty)$ η f παίρνει την τιμή 0. Τότε

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{\frac{2}{2^n}\times 1}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = 1<\infty,$$

ενώ $\overline{\lim}_{t\to\infty} f(t)=1$.

Αν όμως μαζί με τις

$$f\ge 0 \text{ και } \int_a^\infty f(t)\,dt<\infty$$

υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι φθίνουσα, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$ (Άσκηση).

Τέλος, αν το όριο $\lim_{t\to\infty} f(t)$ υπάρχει και ισούται με $c\neq 0$, τότε με χρήση του Θεωρήματος 2(β) βρίσκουμε ότι

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \begin{cases} -\infty & \text{αν } c<0,\\ \infty & \text{αν } c>0.\end{cases}$$