Πιθανότητες Ι, Σεπτέμβριος 2015

Θέμα 1:

(α) $X =$ #δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία σε ανεξάρτητες δοκιμές $Be(p=\frac{1}{6})$

Άρα $P(X=k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1},\ k=1,2,3,\dots$

Αφού $X \sim Geo(\frac{1}{6}=p)$

$E(X) = E(Geo(\frac{1}{6})) = 6$ $\quad E(Geo(p)) = \frac{1}{p}$

$Var(X) = Var(Geo(\frac{1}{6})) = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$ $\quad Var(Geo(p)) = \frac{1-p}{p^2}$

(β) $P(\overset{A}{\text{"να μην εμφανιστεί το «3»"}} \mid \text{"εμφανίζεται } \overset{B_k}{\text{το «5» πρώτη φορά στην κ-δοκιμή"}})$

$P(A|B_k) = \frac{P(AB_k)}{P(B_k)}$ (1)

• $P(AB_k) = P(\text{"να μην εμφανιστεί το «3» και το «5» για πρώτη φορά στην κ-δοκιμή"})$

$= P(\underbrace{\text{"όχι 3 ή 5", "όχι 3 ή 5", \dots, "όχι 3 ή 5"}}_{(k-1)\text{δοκιμές}}, \underset{\text{κ-δοκιμή}}{\text{"ναι 5"}})$

$\underset{\text{ανεξαρτησίας}}{\overset{\text{λόγω}}{=}} P(\text{"όχι 3 ή 5"})^{k-1} \cdot P(\text{"ναι 5"})$

$= \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6},\ k=1,2,\dots$ (2)

• $P(B_k) = P(X=k) \overset{(α)}{=} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1},\ k=1,2,\dots$ (3)

Από (2) και (3) στην (1) έχουμε: $P(A|B_k) = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}}{\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}},\ k=1,2,\dots$

Άρα $P(A|B_k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1},\ k=1,2,\dots$

(γ) $P(\text{"να εμφανιστεί το «3» τουλάχιστον 1 φορά"}) =$

$= 1 - P(\text{"να μην εμφανιστεί το «3»}) = 1 - P(A)$

$P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A \cap B_k)$ $\quad$ (ή Θ.Ο.Π. $\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)P(A|B_k)$)

Άρα $P(A) \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{6}} = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Ζητούμενη πιθανότητα: $1 - P(A) = \frac{1}{2}$

(δ) Έστω A_3: "να μην εμφανιστεί το 3" $\quad (A \to A_3)$

A_6: "να μην εμφανιστεί το 6"

$P(\text{"να εμφανιστούν τα «3» και «6» από τουλάχιστον 1 φορά"}) =$

$= 1 - P(\text{"να μην εμφανιστεί το «3» ή να μην εμφανιστεί το «6»"})$

$= 1 - P(A_3 \cup A_6)$ $\quad (= P((A_3 \cup A_6)^c) = P(A_3^c A_6^c))$

$P(A_3 \cup A_6) = P(A_3) + \underset{(3 \leftrightarrow 6)}{P(A_6)} - P(A_3 A_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(A_3 A_6)$

Ζητούμενη πιθανότητα $= P(A_3 A_6)$

Όμως $P(A_3A_6)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_3A_6B_k)$ ⊛ ②

⊛ $P(A_3A_6B_k)=P($"όχι 3 ή 5 ή 6", "όχι 3 ή 5 ή 6", ..., "όχι 3 ή 5 ή 6", "ναι 5"$)=$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$

$\underbrace{}_{(k-1)\ \text{δοκιμές}}$, "ναι 5" $\downarrow$ k-δοκιμή

Άρα $P(A_3A_6)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$

Θέμα 2:

(α) $f(x)=2cx^{-3}e^{1/x^2}\cdot I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1\right)$

Πρέπει $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 2cx^{-3}\cdot e^{1/x^2}\cdot I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1\right)dx=1$. Όμως $I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1\right)=\begin{cases}1, & \frac{1}{\sqrt{2}}<x<1\\ 0, & \text{διαφορετ.}\end{cases}$

Άρα $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 2cx^{-3}\cdot e^{1/x^2}dx=1 \Rightarrow \int_{1/\sqrt{2}}^{1} -c\left(e^{1/x^2}\right)'dx=1 \Rightarrow -c\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\left(e^{1/x^2}\right)'dx=1 \Rightarrow$

$\left(e^{1/x^2}\right)'=e^{1/x^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)'=e^{1/x^2}\cdot\left(x^{-2}\right)'=e^{1/x^2}\cdot(-2)\cdot x^{-3}=-2x^{-3}\cdot e^{1/x^2}$

$\Rightarrow -c\left[e^{1/x^2}\right]_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x=1}=1 \Rightarrow -c\left[e-e^2\right]=1 \Rightarrow c\left(e^2-e\right)=1 \Rightarrow ce(e-1)=1 \Rightarrow c=\frac{1}{e(e-1)}$, $(c>0)$

$e^2 = e^{1/(1/\sqrt{2})^2}=e^{1/1/2}=e^2$

(β) τη σ.π.π της $Y=\frac{1}{x^2}$, έχουμε βρει ότι $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{e^2-e}x^{-3}e^{1/x^2}, & \frac{1}{\sqrt{2}}<x<1\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$, $S_X=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$

$S_X=\{x\in\mathbb{R}: f_X(x)>0\}$

Έχουμε $Y=\frac{1}{X^2}=g(X)$, όπου $g(x)=\frac{1}{x^2}$ ορισμένη στο $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ όπου είναι ...
"1-1" (και μάλιστα γνήσια μονότονη)

Η X είναι συνεχής τ.μ. και η Y επίσης (συνεχής τ.μ)

(i) Βρίσκουμε το στήριγμα της Y. (S_Y)

$\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2<x^2<1$ ή $\frac{1}{2}<x^2<1 \Rightarrow 1<\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}<2$

Συμπεραίνουμε ότι $S_Y=(1,2)$

(ii) Βρίσκουμε την σ.κ της Y ως συνάρτηση της σ.κ της X.

α' τρόπος:

$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \quad \forall y\in(1,2)=S_Y$

Έχουμε $Y=\frac{1}{X^2} \Rightarrow X^2=\frac{1}{Y} \Rightarrow X=\frac{1}{\sqrt{Y}}=Y^{-1/2}=g^{-1}(Y)$

Άρα $f_Y(y)=f_X\left(y^{-1/2}\right)\left|\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-3/2}\right|=\frac{2}{e^2-e}\left(y^{-1/2}\right)^{-3}e^{\left(y^{-1/2}\right)^{-2}}\frac{1}{2}y^{-3/2}=\frac{1}{e^2-e}\cdot e^{y}\ (y\in(1,2))$

Τελικά, $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{e^2-e}e^{y}, & y\in(1,2)\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

β' τρόπος:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P\left(\frac{1}{X^2}\le y\right)=P\left(X^2\ge\frac{1}{y}\right)\overset{y>0}{=}P\left(|X|\ge\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\ \underset{\text{πιθανότητα 1}}{\overset{X>0\ \text{με}}{=}}$$

$$=P(X\ge y^{-1/2})=1-P(X<y^{-1/2})\ \overset{X\ \text{συνεχής}}{=}\ 1-P(X\le y^{-1/2})=1-F_X(y^{-1/2})$$

Άρα $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ 1-F_X(y^{-1/2}), & 1<y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$

Άρα για $y\in S_Y=(1,2)$ έχουμε...

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=-F_X'(y^{-1/2})\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-3/2}=\frac{1}{2}f_X(y^{-1/2})\cdot y^{-3/2}=\frac{1}{e^2-e}\cdot e^y \ \checkmark$$

(γ) • $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y f_Y(y)\,dy=\int_1^2 y\cdot\frac{1}{e^2-e}e^y\,dy=\frac{1}{e^2-e}\int_1^2 y e^y\,dy$ (1)

$$\int_1^2 y e^y\,dy=\int_1^2 y(e^y)'\,dy=[ye^y]_1^2-\int_1^2 e^y\,dy=2e^2-e-[e^y]_1^2=2e^2-e-(e^2-e)=e^2 \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $E(Y)=\frac{e^2}{e^2-e}=\frac{e}{e-1}$

• $Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)$

$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_Y(y)\,dy=\int_1^2 y^2\frac{1}{e^2-e}e^y\,dy=\frac{1}{e^2-e}\int_1^2 y^2e^y\,dy$ (3)

$$\int_1^2 y^2e^y\,dy=\int_1^2 y^2(e^y)'\,dy=[y^2e^y]_1^2-2\underbrace{\int_1^2 ye^y\,dy}_{\text{από σχέση (2)}}=4e^2-e-2e^2=2e^2-e \ (4)$$

Τελικά, $Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)\overset{(3),(4)}{=}\frac{2e^2-e}{e^2-e}-\left(\frac{e}{e-1}\right)^2=1+\frac{e}{(e-1)}-\left(\frac{e}{e-1}\right)^2=1-\frac{e}{(e-1)^2}$

Θέμα 3:

(α) $M_X(t)=E[e^{tX}]\overset{\text{σ.π.π } N(0,1),\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx)}dx=e^{t^2/2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx}_{=1\ \text{σ.π.π } N(t,1)}=$

$=e^{t^2/2},\ \forall t\in\mathbb{R}$

(β) $M_X^{(i)}(0)=E(X^i)$, $i=1,2,3,4$

υπολογίζουμε $M_X^{(i)}(t)$, $1\le i\le 4$ και μετά θέτουμε $t=0$

μετά από πράξεις

$E(X)=0,\ E(X^2)=1,\ E(X^3)=0,\ E(X^4)=3$

(γ) $\{X_i\}_{i\ge1}$ α.ι.τ.μ. $\Rightarrow\{Z_i=X_i^2\}_{i\ge1}$ α.ι.τ.μ. αφού $Z_i=g(X_i)$

όπου $E(S_n)=E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=\sum_{i=1}^n E(X_i^2)=nE(X_1^2)\ \underset{E(X_1^2)=1}{\overset{(β)}{=}}\ n.$

$Var(S_n)=Var\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\ \underset{+\text{ισόνομες}}{\overset{\text{ανεξάρτητες}}{=}}\ n\,Var(X_1^2)=n[E(X_1^4)-E^2(X_1^2)]\overset{(β)}{=}n(3-1)=$

$=2n.$

Άρα, από Κ.Ο.Θ. (ισχύουν και οι προϋποθέσεις), έχουμε...

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

(δ) Αν (Y_n) συγκλίνει στοχαστικά σε $c \in \mathbb{R}$ τότε: $\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - c| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ή $\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - c| \le \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Έστω $c \in \mathbb{R}$.

$$P[|Y_n - c| \le \varepsilon] = P[-\varepsilon \le Y_n - c \le \varepsilon] = P[-\varepsilon + c \le Y_n \le \varepsilon + c] \xrightarrow[n\to\infty]{(\gamma)} P[c - \varepsilon \le Z \le c + \varepsilon] =$$

$$\overset{Z\sim N(0,1)}{=} \Phi(c+\varepsilon) - \Phi(c-\varepsilon) < 1 \quad (\text{αφού } \Phi(c+\varepsilon) < 1,\ \Phi(c-\varepsilon) > 0)$$

Άρα αδύνατο να συγκλίνει στο 1...

<u>Θέμα 4:</u>

(α) Πρέπει $c > 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Θέτω $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right)dx\,dy \overset{\text{πρέπει}}{=} 1$

Έχουμε $I = c\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(y,x)\,dx\,dy}_{=1}\right) \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

διότι η $f_{U,V}$ είναι σππ

(β) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right)dy =$

$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(x,y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(y,x)\,dy\right) = \frac{1}{2}\left(f_U(x) + f_V(x)\right)$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ (Εναλλακτικά $f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,x)\,du$)

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(x,y)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(y,x)\,dx\right) =$

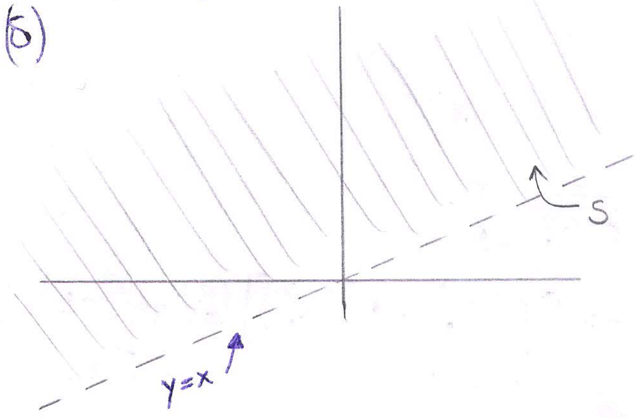
$= \frac{1}{2}\left(f_V(y) + f_U(y)\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_Y = f_X \Rightarrow X \overset{d}{=} Y$

(γ) $f_{Y,X}(x,y) = f_{X,Y}(y,x) = \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(y,x) + f_{U,V}(x,y)\right) = \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right) = f_{X,Y}(x,y)$

$\Rightarrow (X,Y) \overset{d}{=} (Y,X)$

(δ)



$P(X<Y) = P((X,Y)\in S) \underset{(X,Y)\overset{d}{=}(Y,X)}{=} P((Y,X)\in S) =$

$= P(Y<X)$ (*)

Όμως, $P(X=Y) + P(X<Y) + P(Y<X) = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$P(X=Y) = 0$

$P(X<Y) = \frac{1}{2}$

($P((X,Y)\in$ ευθεία) εμβαδόν $= 0$)