Θέμα 1 ΟΜΑΔΑ Α

(i) Έστω K: "ο στόχος καταστρέφεται σε ρίψη βόμβας"

X: "ο στόχος χτυπιέται σε ρίψη βόμβας"

$$P(K) \overset{\theta.o.\pi.}{=} P(X)\,P(K|X) + P(X^c)\,P(K|X^c)$$

$$= p_1 p_2 + 0 = p_1 p_2$$

(ii) Έστω A: "ο στόχος καταστρέφεται σε 2 το πολύ ρίψεις"

α' λύση

Έστω K_i: "Η ρίψη της i-βόμβας οδηγεί σε καταστροφή του στόχου", $i = 1, 2$. Έχουμε

$$A = K_1 \cup K_1^c K_2 \qquad \left(\underset{\text{ξενων ενδεχομένων}}{\text{ένωση}}\right)$$

Άρα

$$P(A) = P(K_1) + P(K_1^c K_2) \overset{\text{ανεξ.}}{=} P(K_1) + P(K_1^c)\,P(K_2)$$

$$= \boxed{p_1 p_2 + (1 - p_1 p_2)\,p_1 p_2},$$

αφού $P(K_1) = P(K_2) = p_1 p_2 \ (= P(K))$

β' λύση

Αν A^c: "ο στόχος καταστρέφεται σε 3 τουλάχιστον ρίψεις".

Τότε $P(A) = 1 - P(A^c)$. Όμως $A^c = K_1^c K_2^c$, και

$$P(A^c) \overset{\text{ανεξ}}{=} P(K_1^c)\,P(K_2^c) = (1 - P(K))^2 = (1 - p_1 p_2)^2 \Rightarrow$$

$$P(A) = 1 - (1 - p_1 p_2)^2 = \boxed{p_1 p_2 (2 - p_1 p_2)}$$

Θέμα 2

α) i) $F_X(x) = P(X \le x) = P\left[(2-3I)Z \le x\right]$

$$\overset{\theta.o.\pi.}{=} P(I=0)\,P\left(2Z \le x \mid I=0\right) + P(I=1)\,P\left[-Z \le x \mid I=1\right]$$

$$\underset{I\sim Be(\frac{1}{2})}{\overset{I,Z \text{ ανεξ.}}{=}} \frac{1}{2}\left[P\left(Z \le \frac{x}{2}\right) + P\left(Z \geq -x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[P\left(Z \le \frac{x}{2}\right) + P\left(Z > -x\right)\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(F_Z\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - F_Z(-x)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

ii) Παραγωγίζοντας ως προς x την παραπάνω σχέση,

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}F_Z'\left(\frac{x}{2}\right) + F_Z'(-x)\right) = \boxed{\frac{1}{4}f_Z\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f_Z(-x)}.$$

Παρατήρηση : Οι παραπάνω ισότητες θα μπορούσαν να μην ισχύουν για κάποια x, αλλά το σημείο αυτό δεν μας αφορά στις Πιθανότητες Ι, και λέμε ότι ισχύουν σχεδόν παντού.

iii) $X = (2-3I)Z \Rightarrow E(X) \overset{\text{ανεξ.}}{=} E(2-3I)\,E(Z) \quad (1)$

(Ι και Ζ ανεξ. $\Rightarrow$ $2-3I$ και Z ανεξάρτητες)

$$E(2-3I) \overset{\text{γραμμ.}}{=} 2 - 3E(I) \overset{I\sim Be(\frac{1}{2})}{=} 2 - 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (2).$$

$$E(Z) = 2 \quad (3)$$

Από (2) και (3) και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1}$$

Παρατήρηση (β' τρόπος)

Η $E(X)$ και η $Var(X)$ μπορούν να βρεθούν και μέσω της ii) αλλά η απόδειξη αυτή που είναι λίγο πιο κοπιαστική παραλείπεται.

Θέμα 2 α) iii) συνέχεια

για τη διασπορά

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) \qquad (4)$$

$$E(X^2) = E\left[(2-3I)^2 Z^2\right] \overset{\text{ανεξ}}{=} E\left[(2-3I)^2\right] E(Z^2) \qquad (5).$$

$$E\left[\underbrace{(2-3I)^2}_{\substack{\| \\ g(I)}}\right] = P(I=0)\cdot 2^2 + P(I=1)(-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(4+1) = \frac{5}{2}. \qquad (6)$$

$$E(Z^2) = Var(Z) + E^2(Z) = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5} \qquad (7)$$

Απο (6) και (7), αντικαθιστώντας στην (5), έχουμε

$$E(X^2) = \frac{5}{2}\cdot\frac{22}{5} = 11. \qquad (8).$$

Τελικά $\boxed{Var(X) = 11 - 1^2 = 10}$

Θέμα 2 β): Παρατηρούμε ότι

$$E(4\bar{X}_n) = 4E(\bar{X}_n) = \frac{4}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} = \underline{\underline{n+1}}. \qquad (1)$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\left[\left|4\bar{X}_n - (n+1)\right| > \varepsilon\right] \overset{(1)}{=} P\left[\left|4\bar{X}_n - E(4\bar{X}_n)\right| > \varepsilon\right] \leq$$

$$\overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{Var(4\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{16\, Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Όμως $Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leq \frac{1}{n^2} n\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

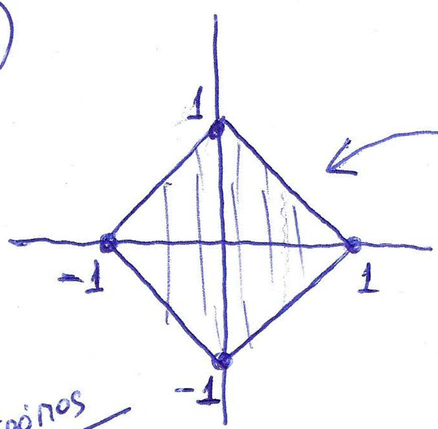
Άρα από τη (2) συμπεραίνουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\left[\left| 4\overline{X}_n - (n+1) \right| > \varepsilon \right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Τελικά, $4\overline{X}_n - (n+1) \xrightarrow{P} 0$ (καθώς $n\to+\infty$), δηλ. συγκλίνει κατά πιθανότητα στο 0.

Θέμα 3

a)



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & , |x|+|y| \leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θέτουμε $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\}$, που είναι το στήριγμα της κατανομής.

α' τρόπος

Πρέπει $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Όμως $I = \iint_S c\,dx\,dy = c\iint_S dx\,dy = c\cdot \text{εμβ}(S) = c(\sqrt{2})^2 = 2c.$

Άρα $2c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$

β' τρόπος (I_i : το ολοκλήρωμα υπολογ. στο i-τεταρτημόριο).

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4I_1$ (λόγω συμμετρίας $f(x,y) = f(-x,y) = f(-x,-y) = f(x,-y)$)

$$I_1 = \int_0^1\int_0^{1-x} c\,dy\,dx = c\int_0^1 (1-x)\,dx = c\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{2}.$$

$$\Rightarrow I = 4\cdot\frac{c}{2} = 2c \xRightarrow{I=1} c = \frac{1}{2}.$$

(β) Περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$

Προφανώς $f_X(x) = 0$, για $x : |x| > 1$.

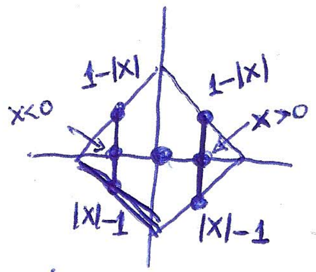
Για $|x| \le 1$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} \frac{1}{2}\,dy \qquad \left(\begin{array}{c} |x|+|y| \le 1 \\ \Downarrow \\ |y| \le 1-|x| \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\, 2\,(1-|x|) = 1-|x| .$$

Τελικά,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-|x| & , \ |x| \le 1 \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Προφανώς λόγω συμμετρίας, $X \overset{d}{=} Y$, και άρα

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1-|y| & , \ |y| \le 1 \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστεί κάτι άλλο.

γ) δεσμ. σ.π.π. $f_{X|Y}(x|y)$ της X δοθέντος ότι $Y=y$.

Έχει νόημα μόνο όταν $f_Y(y) > 0$. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι ορίζεται μόνο για $|y| < 1$.

Τότε, $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1/2}{1-|y|} = \frac{1}{2(1-|y|)} , \quad |x| \le 1-|y|$$

Άρα

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|y|)} & , \ |x| \le 1-|y| \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad (-1 < y < 1)$$

δηλ. $[X|Y=y] \sim \mathcal{U}nif(|y|-1,\ 1-|y|)$, για $-1 < y < 1$.

δ) <u>α' λύση</u>

$$f_{X|Y}(x|y) = f_{X|Y}(-x|y)$$, άρα η σ.π.π.

είναι άρτια (ή η $[X|Y=y]$ έχει συμμετρική κατανομή)

και άρα $\boxed{E[X|Y=y]=0}$.

<u>β' λύση</u>

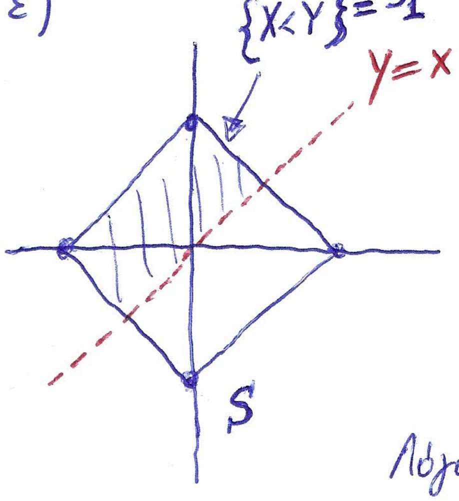
$[X|Y=y] \sim Unif(|y|-1, 1-|y|)$ (μέση τιμή ομοιόμορφής $=$ μέσο διαστήματος ⟹ ορισμού της)

$$E(X|Y=y) = \frac{(|y|-1)+(1-|y|)}{2} = 0$$

<u>γ' λύση</u>

με υπολογισμό : $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\, dx = \ldots = 0$.

ε)



Λόγω του ότι η (X,Y) είναι διδιάστατη ομοιόμορφη κατανομή με στήριγμα το S βγαίνει πάλι άμεσα.

<u>α' λύση</u>

Λόγω συμμετρίας ως προς την $y=x$ $\left(f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(y,x)\right)$, έχουμε

$$P(X<Y) = P(Y<X).$$

Επίσης $1 = P\left((X,Y)\in S\right) = P(X<Y) + P(Y<X) + \underbrace{P(Y=X)}_{=0}$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις $\Rightarrow \boxed{P(X<Y) = \frac{1}{2}}$.

<u>β' λύση</u>

$$P(X<Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \iint_{S_1} \frac{1}{2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\, εμβ(S_1) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Θέμα 4

α) Ψάχνουμε $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$P(Y_n \le x) = P\left[n^{-1/a} X_{(n)} \le x\right] = P\left[X_{(n)} \le n^{1/a} \cdot x\right] \quad (1).$$

Όμως $P(X_{(n)} \le u) = P\left[\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \le u\right]$

$$= P\left[X_1 \le u, X_2 \le u, \dots, X_n \le u\right] \quad \left(\begin{array}{c}\text{αφού} \\ \{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \le u\} \\ \| \\ \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le u\}\end{array}\right)$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le u) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - P(X_i > u)\right] \quad (2).$$

Απο τα δεδομένα έχουμε μόνο

$$P(X_i > u) = u^{-a}, \quad \forall u > 1 \ (a > 0), \ i \ge 1 \quad (3)$$

Όμως αυτό αρκεί για να χαρακτηρίσουμε την κατανομή της X_i.

Πράγματι, $P(X_i > 1) = 1 - P(X_i \le 1) = 1 - F_{X_i}(1) \overset{\text{δεξιά συνέχεια}}{=} 1 - \lim_{u\to 1^+} F_{X_i}(u)$

$$= 1 - \lim_{u\to 1^+} P(X_i \le u) = 1 - \lim_{u\to 1^+}\left(1 - P(X_i > u)\right)$$

$$= \lim_{u\to 1^+} P(X_i > u) = \lim_{u\to 1^+} u^{-a} = 1.$$

Άρα προφανώς, $P(X_i > u) \ge P(X_i > 1) = 1$, $\forall u \le 1$ (4)

Τελικά, $\forall x > 0$, έχουμε $n^{\frac{1}{a}} \cdot x > 1$ (απο κάποιο n και πέρα)

άρα $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le x) \overset{(1),(2),(3)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \left(n^{\frac{1}{a}} \cdot x\right)^{-a}\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x^{-a}}{n}\right)^n$

$= e^{-x^{-a}}$, χρησιμοποιώντας ότι $\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \longrightarrow e^c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Όμοια, $\forall x \le 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le x) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $Y_n \xrightarrow{d} Y$, όπου Y έχει σ.κ. $F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x^{-a}}, & x > 0. \end{cases}$ (αυστηρά θέλει απόδειξη ότι αποτελεί σ.κ.)

Θέμα 4

β). Αναζητούμε την κατανομή της $\ln X_i$. $\forall x > 0$

$$P[\ln X_i \le x] = P[X_i \le e^x] = 1 - P[X_i > e^x] \overset{e^x > 1}{=} 1 - (e^x)^{-a} = 1 - e^{-ax},$$

που είναι η σ.κ. της εκθετικής με παράμετρο $a > 0$.

Άρα $\ln X_i \sim Exp(a) \Rightarrow E(\ln X_i) = \frac{1}{a}$

και $Var(\ln X_i) = \frac{1}{a^2}$.

Οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξ. + ισον. τ.μ, άρα

οι $\ln X_1, \ln X_2, \dots, \ln X_n$ είναι ανεξάρτητες $Exp(a)$, τ.μ.

Απο το κεντρικό οριακό θεώρημα $\left(0 < \frac{1}{a^2} < +\infty\right)$

έχουμε $P\left(S_n' > \frac{n}{a}\right) = P\left(\frac{S_n' - n\cdot\frac{1}{a}}{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{a}} > 0\right)$

$$\overset{Z \sim N(0,1)}{\simeq} P(Z > 0) = \frac{1}{2}$$

$\downarrow$

έχει συμμετρική κατανομή

(είτε απ'ευθείας όπως εδώ, είτε $= 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$)