Θέμα 1

(α) $\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1,2,\dots,n\} \text{ και } \omega_i \neq \omega_j \text{ για } i \neq j \right\}$

Το ω_i αντιστοιχεί στο νούμερο που πήρε το i-άτομο και δηλώνει τη σειρά που θα εξυπηρετηθεί. Έστω

A_i : "Το i-άτομο να εξυπηρετηθεί σύμφωνα με τη σειρά αφιξής του".

Προφανώς $A_i = \{ \omega : \omega_i = i \}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$|\Omega| = n!$, όσες και οι μεταθέσεις των n-στοιχείων $\{1, 2, \dots, n\}$.

$|A_i| = (n-1)!$, όσες και οι μεταθέσεις των $n-1$ στοιχείων $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$, αφού η i-θέση καθορίζεται μονοσήμαντα, και οι υπόλοιπες καθορίζονται ελεύθερα με μόνο περιορισμό να μην επαναλαμβάνονται στοιχεία.

Τελικά, $P(A_i) = \dfrac{|A_i|}{|\Omega|} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$, αφού όλα τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα (τυχαία μοιρασιά στα χαρτάκια), και έτσι εφαρμόζεται η κλασική πιθανότητα. Παρόμοια,

$A_i A_j = \{ \omega : \omega_i = i, \omega_j = j \}$, $1 \leq i < j < n$, και

$$P(A_i A_j) = \frac{|A_i A_j|}{|\Omega|} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

(β) Παρατηρούμε ότι $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (τύπος Poincaré)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Όμως $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$ (παρόμοια όπως πριν), $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, και δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιλογή δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_k$, παρά μόνο από το πλήθος τους. Άρα

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad , \forall x \in \mathbb{R},$ (2)

έχουμε $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (*) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$P(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right) \cong (\text{για μεγάλο } n)$$

$$\cong 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots\right) \overset{(*)}{=} 1 - e^{-1}.$$

(δ) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ είναι τ.μ. που ακολουθούν $Be\left(\frac{1}{n}\right)$, και εκφράζουν τις δείκτριες τ.μ. που μας πληροφορούν αν το i-άτομο εξυπηρετείτε σύμφωνα με τη σειρά άφιξής του, με πιθανότητα

$$P(X_i = 1) = P(A_i) \overset{(\alpha)}{=} \frac{1}{n}. \ (\text{δεν είναι όμως ανεξάρτητες τ.μ.}).$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1.$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j). \quad (1)$$

Όμως: $Var(X_i) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$ $\left(\text{αφού } Var(Be(p)) = p(1-p)\right)$. (2)

Επίσης: $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) - \frac{1}{n^2}$

$$= P(A_i A_j) - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}. \quad (3).$$

Απο (1), (2) και (3),

$$Var(X) = \frac{n(n-1)}{n^2} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1.$$

Θέμα 2

(α) Παρατηρούμε ότι $N = T-1$ και εκφράζει το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την $1^η$ επιτυχία σε μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας α, όσο και η πιθανότητα ο A να βάλει καλάθι σε μία βολή.
Άρα $N \sim Geo(\alpha)$ στο $0,1,2,3,\dots$. Άρα

- $P(N=n) = \alpha(1-\alpha)^n, \quad n=0,1,2,\dots$
- $E(N) = E(T-1) = E(T)-1 = \frac{1}{\alpha}-1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.
- $Var(N) = Var(T-1) = Var(T) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$.

(β) Ο αριθμός X των επιτυχημένων βολών του B μπορεί να αναπαρασταθεί ως $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, δηλ. ως ένα άθροισμα με τυχαίο πλήθος προσθετέων, όπου $(X_i)_{i\geq 1}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων $Be(\beta)$, όπου β η πιθανότητα ευστοχίας του B σε μία βολή.
Η N και η $(X_i)_{i\geq1}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού η N εξαρτάται μόνο από τις βολές του A, και όλες οι βολές έχουν υποτεθεί ανεξάρτητες μεταξύ τους. Έχουμε λοιπόν

- $E(X) = E(N)E(X_1) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\beta \qquad [E(X) = E[E(X|N)]]$
- $Var(X) = E(N)Var(X_1) + E^2(X_1)Var(N) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\beta(1-\beta) + \beta^2\frac{1-\alpha}{\alpha^2}$

$$= \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha^2}(\alpha+\beta-\alpha\beta) \qquad [Var(X) = E[Var(X|N)] + Var[E(X|N)]]$$

(γ) $P_X(z) = P_N(P_{X_1}(z))$.

Όμως
$$\left.\begin{aligned} P_{X_1}(z) &= E(z^{X_1}) = 1-\beta+\beta z \\ P_N(z) &= E(z^N) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha(1-\alpha)^n z^n = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- $P_X(z) = \dfrac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta+\beta z)}$

Έχουμε $P_X(z) = \dfrac{a}{1-(1-a)(1-b)-(1-a)bz} =$

$$= \frac{\dfrac{a}{1-(1-a)(1-b)}}{1-\dfrac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}z}.$$

Θέτουμε $p = \dfrac{a}{1-(1-a)(1-b)}$ και παρατηρούμε ότι

$$1-p = \frac{1-(1-a)(1-b)-a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{(1-a)\left(1-(1-b)\right)}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} \quad (*)$$

Άρα $P_X(z) = \dfrac{p}{1-(1-p)z}$ και από το χαρακτηρισμό των μη αρνητικών ακέραιων Τ.Μ. από τη πιθανογεννήτριά τους, συμπεραίνουμε ότι $X \sim Geo(p)$, στο $0, 1, 2, \ldots$, όπου $p = \dfrac{a}{1-(1-a)(1-b)}$.

(δ) $P(\text{"να κερδίσει ο } B\text{"}) = P(X>0) = 1-P(X=0)$

$$\overset{(\gamma)}{=} 1-p \overset{(*)}{=} \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}.$$

Θέμα 3

(α) α' τρόπος

$$f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0. \quad \text{Άρα}$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tx} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{(t-\frac{1}{2})x} dx \underset{u=(\frac{1}{2}-t)x}{\overset{t<\frac{1}{2}}{=\!=\!=}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\frac{1}{2}-t}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{1}{\frac{1}{2}-t} du$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-t\right)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du}_{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t<\frac{1}{2}.$$

Επειδή όταν $X \sim G(a,\theta)$, τότε $M_X(t) = \left(1-\theta^{-1}t\right)^{-a}$, $t<\theta$, είναι φανερό ότι $X \sim G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, από το Θεώρημα χαρακτηρισμού των κατανομών μέσω ροπογεννητριών συναρτήσεων.

[Η κατανομή $G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ λέγεται και χ_1^2, Χι-τετράγωνο με 1 βαθμό ελευθερίας, και δείχνεται ότι $X = Z^2$, όπου $Z \sim N(0,1)$].

β' τρόπος

Θα μπορούσε κάποιος εξ' αρχής να είχε αναγνωρίσει ότι

$$f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x>0$$

και άρα $X \sim G\left(a=\frac{1}{2}, \theta=\frac{1}{2}\right)$, αφού όταν $X \sim G(a,\theta)$, τότε

$$f_X(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}, \quad x>0.$$

Έτσι η εύρεση της ροπογεννήτριας $M_X(t)$ προκύπτει ως ειδική περίπτωση της εύρεσης της ροπογεννήτριας της $G(a,\theta)$ που διδάσκεται ως μέρος της θεωρίας του μαθήματος.

(β) α' τρόπος

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$M_X'(t) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-2)(1-2t)^{-\frac{3}{2}} = (1-2t)^{-\frac{3}{2}} \quad (1)$$

$$M_X''(t) = \left(-\tfrac{3}{2}\right)(-2)(1-2t)^{-\frac{5}{2}} = 3\,(1-2t)^{-\frac{3}{2}} \quad (2).$$

Όμως $M_X'(0) = E(X)$ και $M_X''(0) = E(X^2) \Rightarrow$

$$E(X) = M_X'(0) \quad \text{και} \quad Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = M_X''(0) - \left(M_X'(0)\right)^2 \overset{(1),(2)}{\Longrightarrow}$$

$$E(X) = 1 \quad \text{και} \quad Var(X) = 3 - 1^2 = 2.$$

β' τρόπος (μπορούν να υπολογιστούν όπως η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί $G(a,\theta)$)

(γ) $E(S_n) = n\,E(X) = n.$

$Var(S_n) = n\,Var(X) = 2n.$

Επειδή (S_n) είναι ακολουθία αθροισμάτων ανεξ. + ισον. τ.μ. με $0 < Var(X) < +\infty$, από το Κ.Ο.Θ. έχουμε ότι $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{d} Z \sim N(0,1)$.

Συμπεραίνουμε ότι $P(S_n > n) = P\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{2n}} > 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Z > 0) = \dfrac{1}{2}$,

και άρα για μεγάλες τιμές του n, $P(S_n > n) \cong \dfrac{1}{2}$.

(δ) Θέτουμε $Y = \sqrt{X}$ και βρίσκουμε πρώτα την κατανομή της Y.

Ο μετασχηματισμός $y = g(x) = \sqrt{x}$ είναι "1-1" στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι

$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = g^{-1}(y) = y^2$ που είναι και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Άρα $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = f_X(y^2)\cdot 2y = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y > 0.$

(είναι το διπλάσιο της πυκνότητας της τυποπ. κανονικής στο θετικό μέρος).

Άρα $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(I \cdot Y \leq z) \overset{\Theta.O.\Pi.}{=}$

$P(I=-1)P(-Y \leq z \mid I=-1) + P(I=1)P(Y \leq z \mid I=1) \overset{I \perp\!\!\!\perp Y}{=}$

$\frac{1}{2}P(Y \geq -z) + \frac{1}{2}P(Y \leq z) = \frac{1}{2}\left(1 - P(Y < -z)\right) + \frac{1}{2}P(Y \leq z)$

$\overset{Y \text{ συνεχής τ.μ.}}{=} \frac{1}{2}\left(F_Y(z) - F_Y(-z) + 1\right).$

Η Y έχει σ.π.π. που είναι συνεχής για $y \neq 0$, και άρα

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{2}\left(F_Y'(z) + F_Y'(-z)\right) = \frac{1}{2}\left(f_Y(z) + f_Y(-z)\right), \text{ για } z \neq 0.$$

Τελικά, επειδή $Y > 0$ (με πιθ. 1), έχουμε

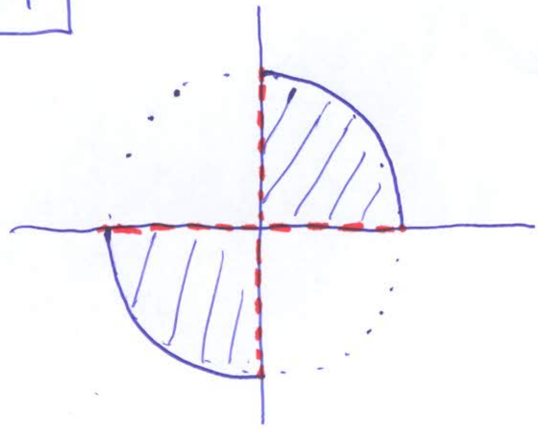
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_Y(z), & z > 0 \\ \frac{1}{2} f_Y(-z), & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, & z > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-z)^2}{2}}, & z < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \neq 0 \quad \left(= \phi(z), \text{ όπου } \phi \text{ η σ.π.π. της } N(0,1)\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι $Z \sim N(0,1)$.

Θέμα 4

a)



$$S_{(X,Y)} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ xy > 0 \right\}$$

Πρέπει (i) $f_{X,Y}(x,y) \geqslant 0 \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ και

(ii) $$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1 .$$

Πράγματι το (i) είναι άμεσο και επαληθεύουμε το (ii).

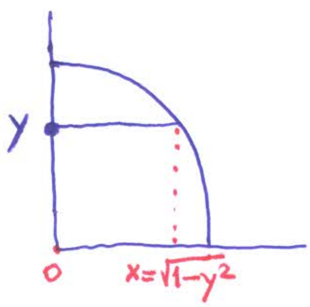
$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \iint_{S_{(X,Y)}} 4xy\, dx\, dy \overset{(*)}{=} 2 \iint_{S^+_{(X,Y)}} 4xy\, dx\, dy = 8 \iint_{S^+_{(X,Y)}} xy\, dx\, dy ,$$

όπου $S^+_{(X,Y)} = S_{(X,Y)} \cap \underbrace{\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \right\}}_{1^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο}}$, και

η (*) ισχύει διότι $f_{X,Y}(-x,-y) = f_{X,Y}(x,y)$ (συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων).

Τελικά, $$I = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\, dx\, dy = 8 \int_0^1 y \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\, dx \right) dy = 8 \int_0^1 y \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= 4 \int_0^1 y(1-y^2)\, dy = 4 \left(\int_0^1 y\, dy - \int_0^1 y^3\, dy \right) = 4 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = 1 .$$



(β) Είναι φανερό ότι $f_X(x) = 0$, για $|x| > 1$ και $x = 0$.

- Για $0 < x \leq 1$, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4xy\,dy = 4x\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = 2x(1-x^2).$$

- Για $-1 \leq x < 0$, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} 4xy\,dy = 4x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} = -2x(1-x^2).$$

Τελικά $f_X(x) = \begin{cases} 2|x|(1-x^2) & , \ 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

(μπορεί κάποιος να υπολογίσει $f_X(x)$, για $x>0$, και να παρατηρήσει ότι $f_X(-x) = f_X(x)$).

- Λόγω συμμετρίας ισχύει επίσης ότι $f_Y(y) = \begin{cases} 2|y|(1-y^2) & , \ 0 < |y| \leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

(αυστηρά: $f_{X,Y}(y,x) = f_{X,Y}(x,y) \overset{\text{ν.δ.ο.}}{\Longrightarrow} (X,Y) \overset{d}{=} (Y,X) \Rightarrow X \overset{d}{=} Y$).

Προφανώς, οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες τ.μ. αφού $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

(γ) Η $f_{X|Y}(x|y)$ ορίζεται για $0<y<1$, αφού $f_Y(y) > 0$, για $0<y<1$.

Τότε έχουμε $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, και άρα

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{4xy}{2|y|(1-y^2)} \overset{y>0}{=} \frac{2x}{1-y^2}, \quad \text{όταν } x^2+y^2 \leq 1 \text{ και } \underset{(y>0)}{xy > 0}$$

$$\Rightarrow \quad f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-y^2} & , \ 0 < x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (0<y<1)$$

(δ) • $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2\cdot x^2}{1-y^2}\, dx =$

$$\frac{2}{1-y^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{1-y^2} \frac{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^3}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{1-y^2} \quad (1)$$

• $Var(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - E^2(X|Y=y)$ (2).

$$E(X^2|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2x^3}{1-y^2}\, dx = \frac{2}{1-y^2} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^4}{1-y^2} = \frac{1-y^2}{2} . \quad (3).$$

Αντικαθιστώντας την (1) και (3) στην (2) έχουμε

• $Var(X|Y=y) = \frac{1-y^2}{2} - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1-y^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right)(1-y^2) = \frac{1-y^2}{18}$.

(ε) Η (X,Y) είναι δισδιάστατη συνεχής τ.μ (*), και άρα

$$P(X=Y) = P\big((X,Y) \in \ell\big), \text{ όπου } \ell \text{ είναι η ευθεία } y=x.$$

Όμως εμβαδόν $(\ell) = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} P(X=Y) = 0$.

Τέλος, $f_{X,Y}(y,x) = f_{X,Y}(x,y) \Rightarrow f_{Y,X}(x,y) = f_{X,Y}(y,x) = f_{X,Y}(x,y)$

$$\Rightarrow (X,Y) \overset{d}{=} (Y,X) \Rightarrow P(X<Y) = P(Y<X) . \ (**).$$

Άρα $1 = P(X<Y) + P(Y<X) + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P(X=Y)} \overset{(**)}{\Longrightarrow} P(X<Y) = \frac{1}{2}$.

Ερωτήματα BONUS

(α) $X \perp\!\!\!\perp X^3 \Rightarrow X^3 \perp\!\!\!\perp X^3 \Longrightarrow Cov(X^3, X^3) = 0$

$\Longrightarrow Var(X^3) = 0 \Longrightarrow X^3 = c$, με πιθ. 1.

$\Longrightarrow X = \sqrt[3]{c} = c'$, με πιθ. 1. (εναλλακτικά: $X \perp\!\!\!\perp X^3 \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp X \Rightarrow Var(X) = 0$)

Άρα δεν υπάρχει μη εκφυλισμένη τ.μ. με αυτήν την ιδιότητα.

(β) Είναι φανερό ότι $\{X=0\} = \bigcap_{n \geq 1} \{X_n = 0\}$,

δηλ. όλες οι "δοκιμές" $Be(p_n)$, να οδηγήσουν σε αποτυχία.

Άρα $\{X=0\}^c = \bigcup_{n \geq 1} \left(\{X_n = 0\}^c \right) = \bigcup_{n \geq 1} \{X_n = 1\}$, και

$P(X=0) > 0 \iff P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = 1\} \right) < 1 \quad (*)$.

Χρησιμοποιώντας ότι $P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = 1\} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$,

είναι φανερό, ότι οποιαδήποτε ακολουθία $(p_n)_{n \geq 1} : \sum_{n=1}^{+\infty} p_n < 1$

θα ικανοποιεί την $(*)$, π.χ. $(p_n)_{n \geq 1} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n \right)_{n \geq 1}$.

(με την υπόθεση της ανεξαρτησίας δείξτε ότι και η $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 1$ είναι μία τέτοια ακολουθία.)

• εναλλακτικά

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της ανεξαρτησίας, φτιάξτε απειρογινόμενα $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n) > 0$ και συσχετίστε με την $P(X=0)$.