Αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων και βασικοί υπολογισμοί
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

25 Μαρτίου 2010

***Άσκηση* 1 (Ross, Exer. 2.Theor6):** Έστω E, F και G τρία ενδεχόμενα σε πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο S. Να εκφράσετε τα παρακάτω ενδεχόμενα με βάση τα E, F, G και S, χρησιμοποιώντας συνολοθεωρητικές πράξεις (ένωση, τομή, συμπλήρωμα):

1. να συμβεί μόνο το E,
2. να συμβούν τα E και G αλλά όχι το F,
3. να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα E, F και G,
4. να συμβούν τουλάχιστον δυο από τα E, F και G,
5. να συμβούν και τα τρία από τα E, F και G,
6. να μην συμβεί ούτε το E, ούτε το F ούτε το G,
7. να συμβεί το πολύ ένα από τα E, F και G,
8. να συμβούν το πολύ δυο από τα E, F και G,
9. να συμβούν ακριβώς δυο από τα E, F και G,
10. να συμβούν το πολύ τρία από τα E, F και G.

***Άσκηση* 2 (Ross, Exer. 2.Theor7):** Να ανάγετε τα ακόλουθα ενδεχόμενα σε πιο απλή μορφή:

1. $(E \cup F)(E \cup F^c)$,
2. $(E \cup F)(E^c \cup F)(E \cup F^c)$,
3. $(E \cup F)(F \cup G)$.

***Άσκηση* 3 (Ross, Exer. 2.Theor11,Theor16):** Αν $P(E) = 0.9$ και $P(F) = 0.8$, αποδείξτε ότι $P(EF) \geq 0.7$. Γενικά για δυο ενδεχόμενα E και F αποδείξτε ότι $P(EF) \geq P(E)+P(F)-1$. Γενικεύστε και αποδείξτε την ανισότητα Bonferroni που ισχυρίζεται ότι για οποιαδήποτε n ενδεχόμενα $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ισχύει

$$P(E_1E_2 \cdots E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) - (n-1).$$

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 2.11): Το 28% των αμερικάνων καπνίζει τσιγάρο, το 7% καπνίζει πούρο και το 5% καπνίζει και τσιγάρο και πούρο.

1. Ποιο ποσοστό των αμερικάνων δεν καπνίζει τσιγάρο ούτε πούρο;
2. Ποιο ποσοστό των αμερικάνων καπνίζει πούρο αλλά όχι τσιγάρο;

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 2.19): Δυο συμμετρικά ζάρια (δηλαδή κανονικά εξάεδρα που εμφανίζουν ισοπίθανα κάθε έδρα τους σε κάθε ρίψη) έχουν δυο κόκκινες έδρες, δυο μαύρες έδρες, μια κίτρινη έδρα και μια λευκή έδρα. Τα δυο ζάρια ρίπτονται ταυτόχρονα. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουν και τα δυο το ίδιο χρώμα;

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 2.21): Μια γειτονιά έχει 20 οικογένειες, από τις οποίες οι 4 έχουν από ένα παιδί, οι 8 έχουν από δυο παιδιά, οι 5 έχουν από τρία παιδιά, 2 έχουν από τέσσερα παιδιά και 1 έχει πέντε παιδιά.

1. Επιλέγουμε στην τύχη μια οικογένεια. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει i παιδιά, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
2. Επιλέγουμε στην τύχη ένα παιδί. Ποιά είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει i παιδιά, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

Είναι συμβατά τα δυο αποτελέσματα; Συμφωνούν με τη διαίσθησή σας;

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 2.24): Δυο συνηθισμένα ζάρια ρίπτονται ταυτόχρονα μια φορά.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι i, $i = 2, 3, \ldots, 12$;
2. Ποια είναι η πιθανότητα η απόλυτη διαφορά των ζαριών να είναι i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 5$;
3. Ποια είναι η πιθανότητα η μικρότερη ζαριά να είναι i, $i = 1, 2, \ldots, 6$;

Άσκηση 8 (Tijms, Prob. 7.8): Ένα βέλος ρίχνεται εντελώς τυχαία στο εσωτερικού ορθογώνιου στόχου (τυχαία επιλογή σημείου στο εσωτερικό ορθογώνιου παραλληλογράμμου). Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $20cm \times 50cm$. Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να πέσει σε απόσταση το πολύ $5cm$ από κάποια κορυφή του ορθογωνίου;

Άσκηση 9 (Tijms, Prob. 7.12): Σε ένα τουρνουά τένις μεταξύ των παικτών A, B και C, κάθε παίκτης παίζει μια φορά με καθέναν από τους άλλους δυο παίκτες (συνολικά γίνονται 3 αγώνες). Οι δυνάμεις των παικτών δίνονται ως εξής: $P(\text{ο } A \text{ να νικήσει τον } B) = 0.5$, $P(\text{ο } A \text{ να νικήσει τον } C) = 0.7$ και $P(\text{ο } B \text{ να νικήσει τον } C) = 0.4$. Υποθέτοντας ανεξαρτησία στα αποτελέσματα των αγώνων, να υπολογίσετε την πιθανότητα ο A να τερματίσει πρώτος ή μεταξύ των πρώτων (δηλαδή να σημειώσει τουλάχιστον τόσες νίκες όσες οποιοσδήποτε άλλος παίκτης).

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 7.19): Ένας ακέραιος επιλέγεται τυχαία από τους $1, 2, \ldots, 1000$. Ποιά η πιθανότητα να διαιρείται με το 3 ή το 5; Ποιά η πιθανότητα να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους 3, 5, 7;

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 2.Theor6): Είναι:

1. EF^cG^c,
2. EF^cG,
3. $E \cup F \cup G$,
4. $EF \cup EG \cup FG$,
5. EFG,
6. $E^cF^cG^c$,
7. $E^cF^cG^c \cup EF^cG^c \cup E^cFG^c \cup E^cF^cG$,
8. $(EFG)^c$,
9. $EFG^c \cup EF^cG \cup E^cFG$,
10. S.

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 2.Theor7): Είναι:

1. E,
2. EF,
3. $EG \cup F$.

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 2.Theor11,Theor16): Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού για δυο ενδεχόμενα $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$ και χρησιμοποιούμε ότι $P(E \cup F) \leq 1$. Για τη γενίκευση χρησιμοποιούμε επαγωγή.

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 2.11): Έστω A το ενδεχόμενο ότι ένα τυχαία επιλεχθέν άτομο είναι καπνιστής τσιγάρου και B το ενδεχόμενο ότι είναι καπνιστής πούρου. Τότε έχουμε:

1. $1 - P(A \cup B) = 1 - (0.07 + 0.28 - 0.05) = 0.7$. Επομένως, το 70% δεν καπνίζει ούτε τσιγάρο ούτε πούρο.
2. $P(A^cB) = P(B) - P(AB) = 0.07 - 0.05 = 0.02$. Επομένως, το 2% καπνίζει πούρο αλλά όχι τσιγάρο.

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 2.19): Η πιθανότητα είναι $\frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 2.21): Είναι:

1. $p_1 = \frac{4}{20}$, $p_2 = \frac{8}{20}$, $p_3 = \frac{5}{20}$, $p_4 = \frac{2}{20}$, $p_5 = \frac{1}{20}$.
2. $q_1 = \frac{4}{48}$, $q_2 = \frac{16}{48}$, $q_3 = \frac{15}{48}$, $q_4 = \frac{8}{48}$, $q_5 = \frac{5}{48}$.

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 2.24): 1. Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι i είναι:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
πιθανότητα άθροισμα i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Η πιθανότητα η απόλυτη διαφορά των ζαριών να είναι i είναι:

i	0	1	2	3	4	5
πιθανότητα απόλυτη διαφορά i	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

3. Η πιθανότητα η μικρότερη ζαριά να είναι i είναι:

i	1	2	3	4	5	6
πιθανότητα μικρότερη ζαριά i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Άσκηση 8 (Tijms, Prob. 7.8): Η πιθανότητα είναι $\frac{25\pi}{20\times 50}$.

Άσκηση 9 (Tijms, Prob. 7.12): Παίρνουμε για δειγματικό χώρο $S = \{(i,j,k) : i,j,k = 0,1\}$, όπου $i = 1$ (αντίστοιχα $i = 0$) αν ο παίκτης A κερδίζει τον (αντίστοιχα χάνει από τον) B, $j = 1$ (αντίστοιχα $j = 0$) αν ο παίκτης A κερδίζει τον (αντίστοιχα χάνει από τον) C και $k = 1$ (αντίστοιχα $k = 0$) αν ο παίκτης B κερδίζει τον (αντίστοιχα χάνει από τον) C. Οι πιθανότητες $p_{i,j,k}$ των δειγματικών σημείων μπορούν εύκολα να βρεθούν για τα 8 δειγματικά σημεία. Είναι $p_{0,0,0} = 0.5 \times 0.3 \times 0.6 = 0.09$, $p_{1,0,0} = 0.5 \times 0.3 \times 0.6 = 0.09$, $p_{0,1,0} = 0.5 \times 0.7 \times 0.6 = 0.21$, $p_{0,0,1} = 0.5 \times 0.3 \times 0.4 = 0.06$, $p_{1,1,0} = 0.5 \times 0.7 \times 0.6 = 0.21$, $p_{1,0,1} = 0.5 \times 0.3 \times 0.4 = 0.06$, $p_{0,1,1} = 0.5 \times 0.7 \times 0.4 = 0.14$ και $p_{1,1,1} = 0.5 \times 0.7 \times 0.4 = 0.14$. Έστω E το ενδεχόμενο ο παίκτης A να είναι πρώτος ή μεταξύ των πρώτων, δηλαδή να κερδίσει τουλάχιστον τόσα παιχνίδια όσο οποιοσδήποτε άλλος παίκτης. Τότε έχουμε ότι $E = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(E) = 0.21 + 0.21 + 0.06 + 0.14 = 0.62$.

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 7.19): Έστω $A = \{3,6,9,12,\ldots,999\}$, $B = \{5,10,15,20,\ldots,1000\}$ και $C = \{7,14,21,28,\ldots,994\}$, τα υποσύνολα των πολλαπλασίων του 3, του 5 και του 7 αντίστοιχα του συνόλου $\{1,2,3,\ldots,1000\}$. Η πρώτη πιθανότητα είναι $P(A\cup B) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = 0.467$. Η δεύτερη πιθανότητα είναι $P(A\cup B\cup C) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{142}{1000} - \frac{66}{1000} - \frac{47}{1000} - \frac{28}{1000} + \frac{9}{1000} = 0.543$.

Πηγές

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.

2. Tijms, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life.* Cambridge University Press.