Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Ηλεκτρονική Τάξη: http://eclass.uoa.gr

Σημειώσεις Φοιτητών

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Μάθημα:

241. Πιθανότητες Ι

Διδάσκων: Σ. Τρέβεζας

Ευχαριστούμε για τις σημειώσεις τον/την: lilian

Πιθανότητες Ι

Μάθημα 1ο - 6/10/2014

Τυχαίο πείραμα: ή πείραμα τύχης: τυχαίο φαινόμενο ή φαινόμενο στο οποίο υπεισέρχονται τυχαίοι παράγοντες.

π.χ. i) Ρίψη ζαριού/νομίσματος
ii) Κατάσταση του καιρού αύριο σε μία συγκεκριμένη περιοχή.
iii) Παρατήρηση της διάρκειας ζωής μιας μηχανής/λαμπτήρα.
iv) Ο αριθμός και το ύψος των απαιτήσεων τον επόμενο μήνα σε μια ασφαλιστική εταιρεία.

Όχι τυχαίο πείραμα: η ελεύθερη πτώση μιας σφαίρας από 2m

Δειγματικός χώρος: $(\Omega, \underline{\Omega})$ Σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων

διάκριση δ.χ.
- → πεπερασμένος, $|\underline{\Omega}| < +\infty$, $\underline{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n \in \mathbb{N}$
- → αριθμήσιμως άπειρος, $|\underline{\Omega}| = |\mathbb{N}|$, $\underline{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$
- → συνεχής, $|\underline{\Omega}| > |\mathbb{N}|$

Δειγματικό σημείο: ένα δυνατό αποτέλεσμα ως $\underline{\Omega}$

Ενδεχόμενο: ένα κατάλληλο υποσύνολο του δ.χ. (συμβ. A, B, C, ...)
- → απλό ή στοιχειώδες : $|A| = 1$
- → σύνθετο $|A| > 1$

Πιθανότητα : Συνάρτηση που αποδίδει βαθμούς βεβαιότητας στα ενδεχόμενα, με τιμές στο $[0,1]$.

② Παραδείγματα

α) i) ρίψη 1 ζαριού $\longrightarrow$ $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

ii) ρίψη 1 νομίσματος $\longrightarrow$ $\Omega = \{K, \Gamma\}$

iii) ρίψη 2 ζαριών $\longrightarrow$ $\Omega_1 = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$

iv) ρίψη νομίσματος μέχρι η πρώτη φορά να είναι γραμ. $\rightarrow$

$$\Omega = \{\Gamma, K\Gamma, KK\Gamma, KKK\Gamma, \dots\}$$

β) Κατάσταση καιρού : $\Omega = \{$ήλιος, μόνο σύννεφα, βροχή, χιόνι, χαλάζι, ...$\}$

γ) Διάρκεια ζωής μηχανής/λαμπτήρα : $\Omega = [0, +\infty)$

	πχ. στο τάβλι $\rightarrow$	φυσιολ. δ.χ. όταν δεν παίζω	φυσιολ δ.χ όταν παίζω	P
Ρίχνω 2 ζάρια	$\rightarrow$ διαδοχικά	Ω_1	Ω_2	
	$\rightarrow$ μαζί και τα διακρίνω	Ω_1	Ω_2	
	$\rightarrow$ μαζί και δεν τα διακρίνω	Ω_2	Ω_2	

$$P(\text{"να φέρω ασόδυο"}) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}$$

Όμως, αν επέλεγα Ω_2 : $P(\text{"ασόδυο"}) \neq \frac{1}{21}$

$\Omega_1 \rightarrow A_1 = \{(1,2), (2,1)\}$

$\Omega_2 \rightarrow A_2 = \{(1,2)\}$

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ & (2,2) & & (2,6) \\ & & & \vdots \\ & & & (6,6) \end{array} \right\}$$

Συμπεράσματα

1. Ο δ.χ. δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος σε ένα π.τ.
2. Ο "βολικός" δ.χ. είναι αυτός που κάνει τα δ.σ. ισοπίθανα. (είναι πεπερασμένος)
3. Το ενδεχόμενο μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφ. υποσύνολα όταν έχω διαφ. δ.χ.
4. Προσοχή! Το τι παρατηρώ μπορεί να με βοηθά να βρω ένα δ.χ., αλλά μη συγχέεται με το τι μπορώ να καθορίσω ως δ.χ. του τυχαίου πειράματος. Ένα αποτέλεσμα του π.τ. μπορεί να μην είναι παρατηρήσιμο.

③ Διαφορετικές μορφές πιθανότητας

i) **κλασική πιθανότητα:** (Κατά Laplace)
προϋποθέτει πεπερασμένο δ.χ. και ισοπίθανα δ.σ.

• Αν A ενδεχόμενο, $P(A) = \dfrac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτ}}{\#\text{ δυνατών περιπτ.}} = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

πχ i) $P(\text{"να φέρω ασόδυο"}) = \dfrac{2}{36}$

ii) $P(\text{"οι ενδείξεις των ζαριών να διαφέρουν κατά 2"}) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

$B = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$

ii) οριακή σχετική συχνότητα: προϋποθέτει ότι το π.τ. μπορεί να επαναλαμβάνεται απεριόριστα.

• Αν A ενδεχόμενο, $P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{N_n(A)}{n}$

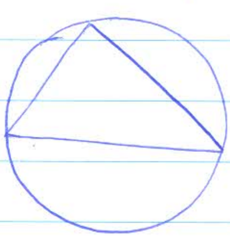
$N_n(A)$: Το πλήθος των φορών που πραγματοποιήθηκε το A σε n-επαναλήψεις του π.τ.

⟶ Προβλήματα που δημιουργούνται

1. ∃ π.τ. πολύ δύσκολα επαναλαμβανόμενα (κόστος, χρόνος πυρην. φυσική)
2. ∃ π.τ. που είναι αδύνατον να επαναληφθούν.
3. ∃ το όριο (?) αν ναι, ποιο είναι το n που σταματάω? τι σφάλμα έκανα?
4. Σφάλματα με όργανα μέτρησης + ερευνητή

iii) Γεωμετρική πιθανότητα: προϋποθέτει ότι ο δ.χ. και τα ενδεχόμενα μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά

π.χ. τυχαία ρίψη ενός νομίσματος σε ένα κυκλικό στόχο. ποια η πιθ. να πέσει το κέντρο του νομίσματος στο τρίγωνο;

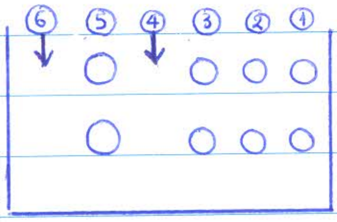


$$P(A) = \frac{\text{εμβαδόν "ευνοϊκής" περιοχής}}{\text{εμβαδόν κύκλου}}$$

iv) Εμπειρική πιθανότητα: υποκειμενική εκτίμηση της "πιθανότητας πραγματοποίησης" κάποιου ενδεχομένου ή ένα μέτρο της πεποίθησης μας.

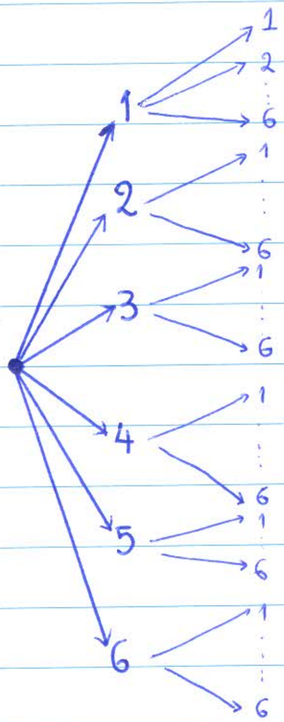
4 Ασκήσεις

1)



P("να μπω στο παιχνίδι στην επόμενη ζαριά")

A: "." = ("να φέρω 4 ή 6 σε κάποιο από τα 2 ζάρια").



$$|A| = 2+2+2+6+2+6 = 20$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

ή $2 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{9}$

(υπολογισμός πιθαν. με δεντροδιάγραμμα)

! Κάθε βέλος μου δίνει μία καινούρια διαδρομή με πιθανότητα $\frac{1}{6}$

Μάθημα 2ο - 8/10/2014

Ασκήσεις

① (συνέχεια) P("να φέρω 4 ή 6 σε τουλ. ένα ζάρι από τα 2")

β)

B	Γ
(4,1)	(1,4)
(4,2)	(2,4)
⋮ (4,4)	⋮ (4,4)
(4,6)	(6,4)
(6,1)	(1,6)
⋮	⋮
(6,4)	(4,6)
(6,6)	(6,6)

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|A| = 12 + 12 - 4 = 20 \Rightarrow$ τα κοινά στοιχεία που εμφ. 2 φορές

$A = B \cup \Gamma$

$|A| = |B| + |\Gamma| - |B\Gamma|$

$B\Gamma = \{(4,4), (4,6), (6,4), (6,6)\}$

(αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού)

$\rightarrow \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|B|}{|\Omega|} + \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} - \frac{|B\Gamma|}{|\Omega|} \Rightarrow P(A) = P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma)$

* Ο πιο πονηρός τρόπος *

$|A| = |\Omega| - |A^c|$

A^c: "να μη φέρω 4 ή 6 σε κανένα από τα 2 ζάρια".
"να φέρω 1, 2, 3 ή 5 και στα 2 ζάρια".

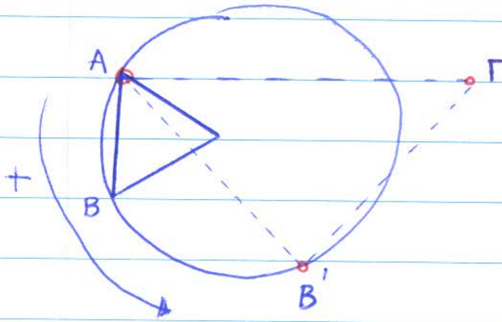
$A^c = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,5\}\}$ / $|A^c| = 4^2 = 16 \Rightarrow |A| = 36 - 16 = 20$

$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{9}$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} - \frac{|A^c|}{|\Omega|} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$$

② Γεωμετρική πιθανότητα

Επιλέγω τυχαία 2 σημεία Α και Β πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου. Ποια είναι η πιθανότητα το ισόπλευρο τρίγωνο που σχηματίζεται με χορδή την ΑΒ, να περιέχεται εξ' ολοκλήρου μέσα στον κύκλο;



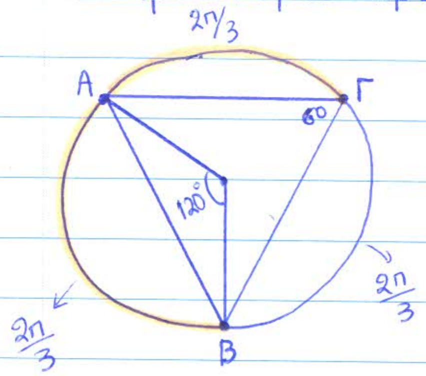
• έχουμε τυχαία επιλογή σημείων στην περιφέρεια ενός κύκλου.

$$P(\text{ενδεχομένου}) = \frac{\text{μήκος τόξου ευνοϊκής περιοχ.}}{\text{μήκος τόξου του κύκλου.}}$$

Λύση

Ονομάζω C την ευνοϊκή περιοχή

Το πρόβλημα πρέπει να αναχθεί σε μήκη τόξου.



* Το τρίγωνο γίνεται εγγεγραμμένο στον κύκλο, βγαίνει εκτός κύκλου στην περιοχή $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και ξανά εντός στην περιοχή ΓΑ.

Όλα τα τόξα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma A} = \frac{2\pi}{3}$

μήκος ευνοϊκής περιοχής = μήκος $C = \frac{2\pi}{3}$

$$P(C) = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi} = \frac{2}{3}$$

③ Το δίλημμα Monty-Hall (παράδοξο των πιθανοτήτων)

A B Γ

«1 αυτοκίνητο και 2 γίδες κρύβονται σε 3 κουτιά».

A: η επιλογή του παίκτη

Γ: το κουτί που ανοίγει ο τηλεπαρουσιαστής (γνωρίζοντας ότι δεν περιέχει το αυτοκίνητο).

B: εναλλακτική επιλογή του παίκτη.

Σ_1: "μένω πιστός στην επιλογή μου".

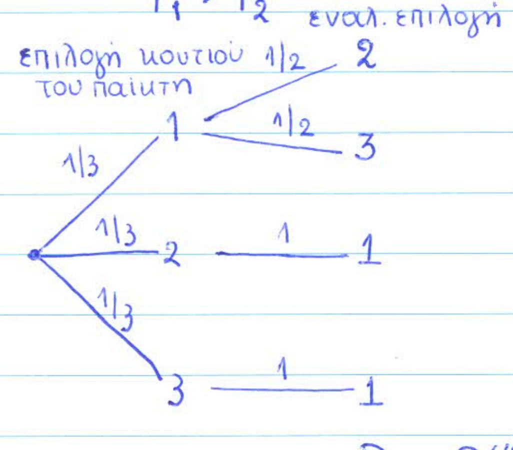
Σ_2: "αλλάζω το κουτί που διάλεξα".

$P_1 = P$('να κερδίσω κάτω από στρατ. Σ_1')

$P_2 = P$('να κερδίσω κάτω από στρατ. Σ_2')

- $P_1 < P_2$
- $P_1 = P_2$ (?)
- $P_1 > P_2$

Ονομάζω 1 το αυτοκίνητο, 2 και 3 τις γίδες.



$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$$

$P_1 = P$("να κερδίσω κάτω από στρατ. Σ_1") $\Longrightarrow$

$$A_1 = \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ στην πρώτη} \\ \text{θέση} \end{matrix} \right\} = \{ (1,2), (1,3) \}$$

αντίστοιχα: $A_2 = (\text{στρατ. } \Sigma_2) = \{ (2,1), (3,1) \}$

$$P_1 = P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = P(A_2) = \frac{2}{3}$$

2 Ορισμοί κ' πράξεις ενδεχομένων

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

$\emptyset$: αδύνατο

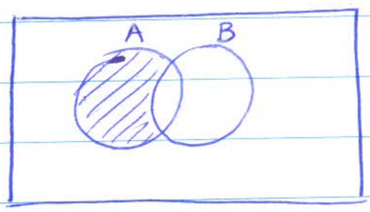
$\underline{\Omega}$: βέβαιο

A^c : συμπληρωματικό

- αν $AB = \emptyset$, τότε A, B ασυμβίβαστα.
- αν $(A_i)_{i \in I}$ με $A_i A_j = \emptyset$, για $i \neq j$ τότε έχω συλλογή ασυμβίβαστων (ή ξένων ανά 2) ενδεχομένων.

Διαγράμματα Venn

$\underline{\Omega}$



$A \setminus B = AB^c$

Τύποι De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

3 Αξιωματική Θεμελίωση (Kolmogorov 1933)

μαθηματική μοντελοποίηση του π.τ.

Χώρος πιθανότητας : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Ω: δ.χ. (αυθαίρετο σύνολο) → περιέχει τα δ.σ.

$\mathcal{A}$: σ-άλγεβρα (συλλογή υποσυνόλων του Ω που ικανοποιεί 3 ιδιοτ.) → ενδεχόμενα

$\mathbb{P}$: συνάρτηση πιθανότητας (πραγματική συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί 3 αξιωμ. → αποδίδει πιθανότητα στα ενδεχόμενα.)

(εκτός ύλης)

<u>Ορισμός</u>: Μια συλλογή υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα (επί του Ω) αν ικανοποιούνται:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \in \mathcal{A}$

iii) Αν $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ ακολουθία ενδεχομένων (στοιχεία της $\mathcal{A}$) τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι ενδεχόμενο $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}\right)$.

<u>Ορισμός</u>: Μια πραγμ. συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ θα λέγεται πιθανότητα αν:

i) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ασυμβ. ενδεχομένων, τότε

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

(ιδιότητα σ-προσθετικότητας)

*Ιδιότητες πιθανότητας *

1. $P(\emptyset) = 0$

Αποδ: $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

Ισχύει Αξ. 3) : $\cancel{P(\emptyset)} = \cancel{P(\emptyset)} + P(\emptyset) + \dots \Rightarrow$
$0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$
$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2. Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ ασυμβ. ενδεχ. (πεπερασμ. προσθετικότητα)

τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots}_{\text{διατηρούνται ξένα ανά 2.}}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \underset{\overset{\parallel}{0}}{P(\emptyset)} + P(\emptyset) + \dots$$

$$\overset{\text{ιδιοτ. 1}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. Αν $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ ⇐ Η Πιθανότητα ως αύξουσα συνολοσυνάρτηση.

Αποδ. $B = A \cup (B \setminus A)$, A και $B \setminus A$ είναι ξένα

Από ιδιοτ. πεπ. προσθ. $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

4) $0 \leq P(A) \leq 1$

$A \subset \underline{\Omega} \xrightarrow{\iota\delta.3} P(A) \leq P(\underline{\Omega}) = 1$

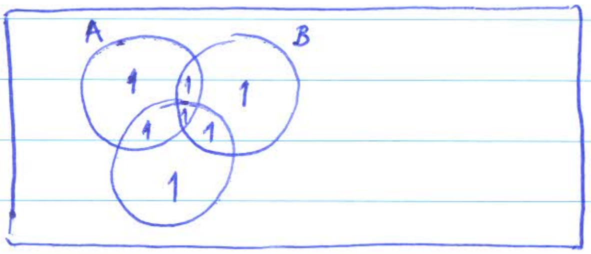
5) $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$

$A = (A \setminus B) \cup (AB) \xrightarrow{\xi\acute{\varepsilon}\nu\alpha} P(A) = P(A \setminus B) + P(AB) \Rightarrow$

$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$

6) $P(A^c) = 1 - P(A)$ || Αποδ.: $A^c = \underline{\Omega} \setminus A \xrightarrow{\text{ιδιοτ. }5} P(A^c) = P(\underline{\Omega}) - P(\underline{\Omega}A) =$
$= 1 - P(A)$ ■

$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$



(αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)

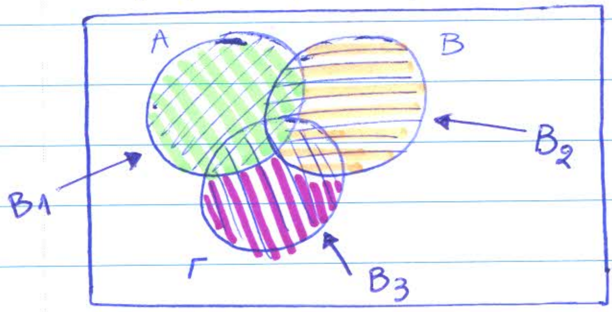
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$
$$- P(A_1A_2) \dots - P(A_{n-1}A_n)$$
$$+$$
$$+$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \dots A_n)$$

(τύπος Poincaré)

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \dots A_n)$$

9) $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ (ιδιότητα σ-υποπροσ/τητας της πιθανότητας)

(Χρώμα 1), (Χρώμα 2), (Χρώμα 3)



$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})$

Η ακολουθία (B_n) είναι ακολ. ξένων ανα 2 ενδεχ.

και $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \overset{Αξ. 3}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

(*): διότι $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subset A_n \Rightarrow$

$\overset{Ιδιοτ. 3}{\Longrightarrow} P(B_n) \leq P(A_n)$

ΜΑΘΗΜΑ 3ο - 10/10/2014

Ιδιότητες πιθανότητας (συνέχεια)

10) Αν $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ (αύξουσα ακολουθία δεδομένων)

τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

Παρατήρηση

Αν $\lim_{n \to +\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

τότε $P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

$\boxed{\text{Απόδ.}}$

Θέτω $B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}}_{= A_{n-1}})$

Ιδιότητες

1) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

2) $(B_n)_{n \geq 1}$ ~~να~~ αντιστοιχεί σε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα (ξένα ανά δύο)

Όμως $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \underset{\sigma-\pi\rho o\sigma\theta.}{\overset{\xi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \alpha\nu\acute{\alpha}\ 2}{=\!=}} \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \overset{\pi\varepsilon\pi.\ \pi\rho o\sigma\theta.}{=\!=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

11) Αν $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$ (φθίνουσα ακολ. ενδεχομένων)

τότε $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

παρατήρηση

Αν $\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$

τότε $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Χρησιμοποιώ τους τύπους DeMorgan + την έννοια του συμπληρώματος για να αποδείξω το ζητούμενο.

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c\right] =$$

$$= 1 - P\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right] \quad (1)$$

Η $(A_n^c)_{n\geq 1}$ είναι $\nearrow$ εφόσον $(A_n)_{n\geq 1}$ $\searrow$

$\longrightarrow$

και από Ιδιότητα. 10)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \qquad (2)$$

Από (1) και (2)

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1 - \left[\lim\left(1 - P(A_n)\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

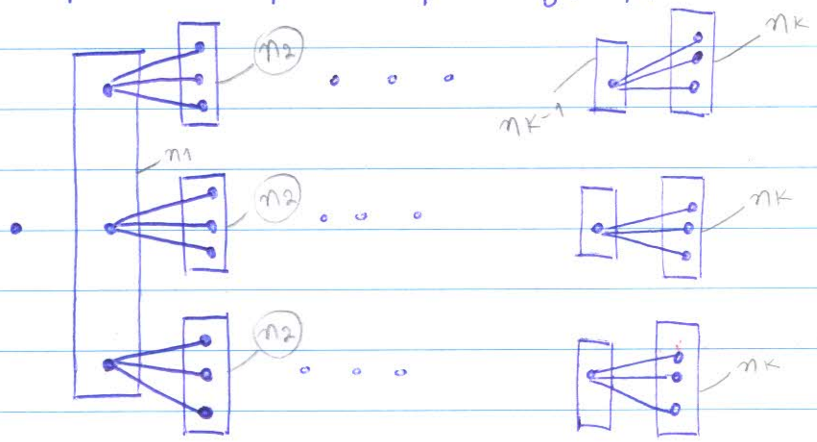
Κλασική πιθανότητα κ' Στοιχεία Συνδιαστικής

Αν A ενδεχόμενο $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

1. Πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή του γινομένου

- Έστω ότι η (καταγραφή) απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου A, μπορεί να χωριστεί σε κ. διαδοχικά βήματα, και έστω $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa)$ ένα στοιχείο του $\omega \in A$.
  Αν $\exists$ n_1-τρόποι επιλογής του στοιχείου α_1, και $\forall$ μία επιλογή του α_1, $\exists$ n_2-τρόποι επιλογής του α_2, ..., και
  $\forall$ μία επιλογή των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\kappa-1}$, $\exists$ n_κ-τρόποι επιλογής του α_κ, τότε $|A| = n_1 n_2 \cdots n_\kappa$

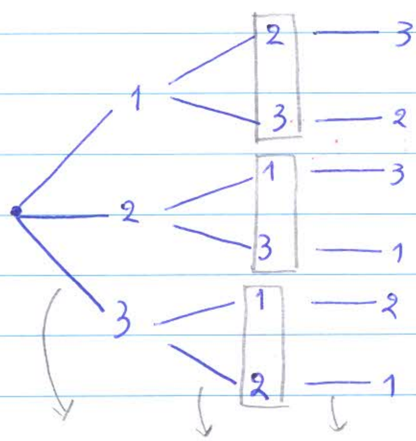
Αναπαράσταση με δεντροδιάγραμμα



Βήμα	1	2	κ-1	κ
Στοιχείο	α_1	α_2	$\alpha_{\kappa-1}$	α_κ
# Συνολικών διαδρομών μέχρι βήμα i	n_1	$n_1 n_2$	$n_1 n_2 \cdots n_{\kappa-1}$	$n_1 \cdot n_2 \cdots n_\kappa$

(*)

π.χ. Μεταθέσεις 3 στοιχείων $\{1, 2, 3\}$



α_1	α_2	α_3
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

3 2 1 $= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόποι

(*) Παρατήρηση: Το πλήθος των επιλογών στο βήμα -i- είναι n_i, αλλά το σύνολο επιλογών μπορεί να διαφέρει ανάλογα με τη διαδρομή που έχω ακολουθήσει μέχρι το βήμα (i-1)

2. Διατάξεις και Μεταθέσεις

Ορισμός : Διάταξη των n-στοιχείων ανά k, είναι μία τοποθέτηση k-στοιχείων του, σε μία σειρά (χωρίς επανάληψη)

\# διατάξεων n ανά k $\overset{\text{συμβ.}}{=} (n)_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$

Ορισμός : Μετάθεση των n-στοιχείων, είναι μία τοποθέτηση τους σε μια σειρά.
(αντιστοιχεί στις διατάξεις n ανά n)

\# μεταθέσεων n-στοιχείων $= n!$

Ορισμός : Διάταξη των n ανά k με επανάληψη (ή επαναληπτική διάταξη) είναι μία τοποθέτηση k-στοιχείων του σε μία σειρά με δυνατότητα επανάληψης.

\# επαναλ. διατάξεων n ανά k $= n^k$

π.χ. ① 8 αθλητές και θέλω # σειρών κατάταξης $\longrightarrow 8!$

Πόσες 3-άδες νικητών όπου η σειρά κατάταξης με ενδιαφέρει
$\longrightarrow (8)_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6$

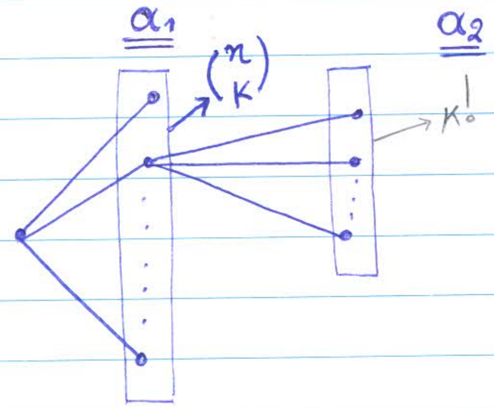
1 αθλητής σε 3 αγωνίσματα $\underset{\text{πόσοι τρόποι κατατάξης}}{\longrightarrow} 8^3$

Ορισμός: Συνδυασμός των n-στοιχείων ανά k είναι μια συλλογή k-στοιχείων του (χωρίς επανάληψη)

συνδυασμών n ανά k $\overset{\text{συμβ}}{=} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$

$\boxed{\text{Απόδ}}$

* δεντροδιάγραμμα



επιλέγω τα k-στοιχεία χωρίς σειρά

βάζω τα k σε σειρά

$\Omega = \{\text{Διατάξεις των } n \text{ ανά } k\}$
$\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$

$(n)_k = \binom{n}{k} k! \Longrightarrow \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

πολ/κή αρχή

Ορισμός: Επαναληπτικός συνδυασμός των n ανά κ, είναι μία επιλογή κ-στοιχείων του, με επανάληψη, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης.

4 κατανομές μεταλλίων

Στοιχεία : Χρ , Αρ , Χαλ. $\rightarrow n=3$

Πόσες επιλογές? $\rightarrow \kappa=4$

επαναλ.? → ΝΑΙ → επαναληπτικοί

σειρά? → ΟΧΙ → συνδυασμοί

$$\#\text{ επαναλ. συνδυασμών } n \text{ ανά } \kappa \overset{\text{συμβ.}}{=} \begin{bmatrix} n \\ \kappa \end{bmatrix} = \binom{n+\kappa-1}{\kappa} = \frac{n(n+1)\cdots(n+\kappa-1)}{1\cdot 2\cdots \kappa}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

\# διαφορετικών ζαριών σε 3 όμοια ζάρια

Στοιχεία: $\{1,2,3,4,5,6\}$ (έδρες των ζαριών) $n=6$

Επιλογές $\rightarrow$ $\kappa=3$

επανάληψη? → ΝΑΙ

σειρά? → ΟΧΙ

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Συνοπτικά ...

Ορισμός: επανάληψη ΟΧΙ, σειρά ΝΑΙ $\longrightarrow$ διατάξεις $(n)_k$

$\#$ στοιχείων $\rightarrow n$

$\#$ επιλογών $\rightarrow k$

επαναλ. ΟΧΙ, σειρά ΟΧΙ $\longrightarrow$ συνδυασμοί $\binom{n}{k}$

επαναλ. ΝΑΙ, σειρά ΟΧΙ $\longrightarrow$ επαναλ. συνδυασμοί $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$

επαναλ. ΝΑΙ, σειρά ΝΑΙ $\longrightarrow$ επαναλ. διατάξεις n^k

3. Ασκήσεις

① Το πρόβλημα Λόττο

$\{1, 2, \ldots, 49\}$
↓
φτιάχνω
6άδες

Σε 1 δελτίο

$P(\text{"να πιάσω } 6^{\text{αρι}}\text{"})$, $P(\text{"να πιάσω } 5^{\text{αρι}}\text{"})$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6!}{(49)_6} = \frac{1}{\frac{(49)_6}{6!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Θα μπορούσα να είχα χρησιμοποιήσει συνδυασμούς

$\Omega = \{\text{διατάξεις των 49 ανά 6}\}$ ή $\Omega = \{\text{συνδυασμοί των 49 ανά 6}\}$

$$P(A) = \frac{\text{"ευνοϊκές"}}{\text{"δυνατές"}}$$

από 6 νουμ.
5 επιτυχ.
↑
$\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$
↓
από 43 νουμ.
1 αποτυχ.

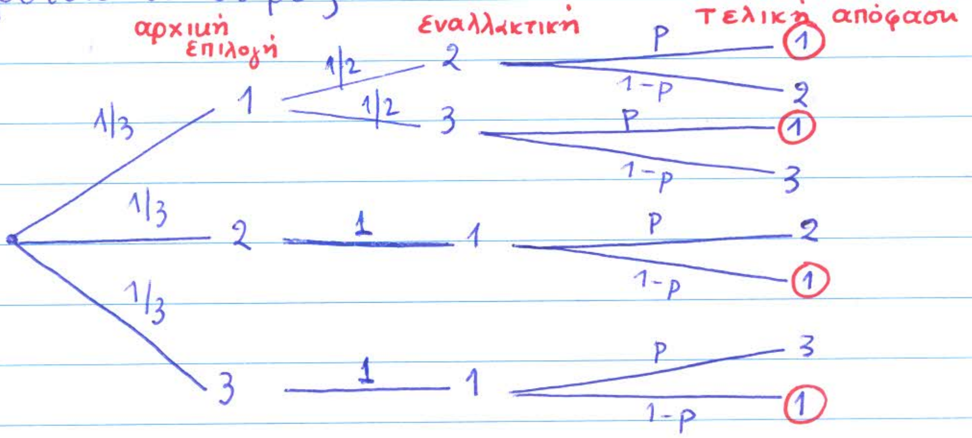
$$P(\text{"5άρι"}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}$$

(2) Παραλλαγή του Monty-Hall

Σ_p : επιλέγω με πιθανότητα p την αρχική μου επιλογή.
άρα με πιθανότητα $(1-p)$ την εναλλακτική

• Ποια τιμή του p μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσω το δώρο;

Βοηθητικό Σχήμα



$$P(\text{"να κερδίσω κάτω από στρατηγική } \Sigma_p\text{"})$$

$$= P(\text{"1 στην τελική απόφαση"})$$

$$= \frac{1}{6}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{3}(1-p)$$

$$= \frac{p}{3} + \frac{1}{3} - \frac{p}{3} + \frac{1}{3} - \frac{p}{3} = \boxed{\frac{2}{3} - \frac{p}{3}}$$

$\boxed{0 \leq p \leq 1}$ Για $p = 0 \rightsquigarrow \boxed{\frac{2}{3} - \frac{p}{3}} \longrightarrow$ Max.

$p = 0 \longrightarrow \frac{2}{3}$

Τελικά: Η βέλτιστη στρατηγική είναι να αλλάξω την απόφασή μου.