Μάθημα 7ο - 20/10/2014

Άσκηση 5, Φυλλάδιο 1

γ) "ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον 2 μαύρα".

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{945}{4}\left[\binom{55}{11} - \binom{30}{11} - \binom{25}{1}\binom{30}{10}\right]}{\binom{1000}{15}}$$

Γιατί δεν δουλεύει να επιλέξουμε τα 2 μαύρα ως 2η φάση και τα υπόλοιπα ως 3η φάση;

25 30

$$\underbrace{1\ 2 \cdots 945}_{\text{κόκκινα}} \quad \underbrace{946 \cdots 970}_{\text{μαύρα}} \quad \underbrace{971 \cdots 1000}_{\text{άσπρα}}$$

$$\cancel{\frac{\binom{945}{4}\binom{25}{2}\binom{53}{9}}{\binom{1000}{15}}}$$

ίδια δ.σ.

$\{\mu_1 = 946,\ \mu_2 = 947\}\ \{\mu_3 = 948, \ldots\}$

$\Updownarrow$

που τα πήραμε διαφορετικές διαδρομές

$\{\mu_1 = 946,\ \mu_2 = 948\}\ \{\mu_3 = 947, \ldots\}$

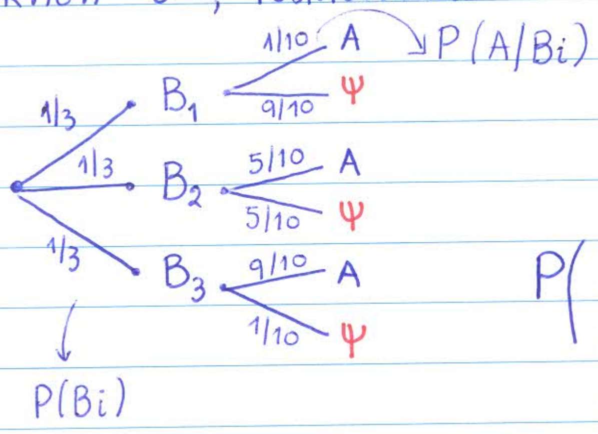
(Πρόβλημα!) $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}\ \{\mu_1\ \mu_2\}$ (946) (947)

Υπενθύμιση

- Πολ/κός νόμος : $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1})$
- Θ.Ο.Π. : $(B_i)_{i\in I}$: $P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i)P(A | B_i)$
- Bayes : $P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A) + P(A^c)\cdot P(B|A^c)}$

① ① ②

Άσκηση 3, Φυλλάδιο 2



$$\frac{4i-3}{10}, \quad i=1,2,3$$

P("να έχει απευθυνθεί στον B_i δεδομένου ότι πήρε το σωστό δρόμο") =

$$= P(B_i \mid A), \quad i=1,2,3$$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A\mid B_i)}$$

Για $i=1$

$$= \frac{\cancel{P(B_1)}\cdot P(A\mid B_1)}{\sum_{i=1}^{3} \cancel{P(B_i)}\cdot P(A\mid B_i)} = \frac{P(A\mid B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A\mid B_i)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{5}{10}+\frac{9}{10}} = \frac{1}{15}$$

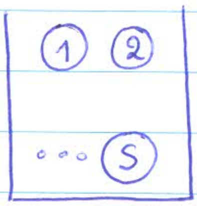
Για $i=2$

$$= \frac{P(A\mid B_2)}{\frac{15}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{15}{10}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Για $i=3$

$$= \frac{P(A\mid B_3)}{\frac{15}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{15}{10}} = \frac{3}{5}$$

Άσκηση 4, Φυλλάδιο 2 (ΘΕΜΑ - Ιούλιος 2011)



S-λαχνούς → έστω i

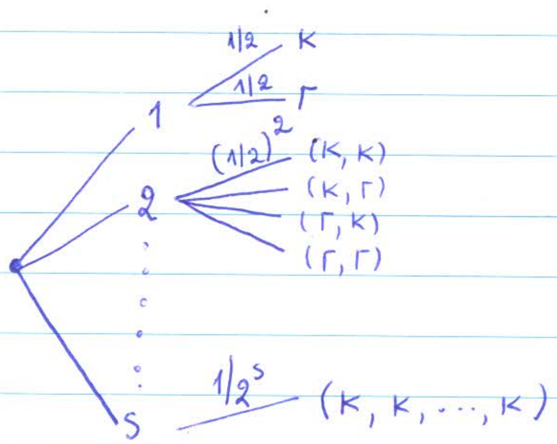
Ρίχνω i-φορές το δίκαιο νόμισμα

i) P("εμφάνισης τουλάχιστον 1 φορά γράμματα")

A^c: "εμφάνιση τουλάχιστον 1 φορά γράμματα".

A: "καμία φορά γράμματα". = "όλες κορώνες"

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



Έστω Λ_i: "επιλέγεται ο λαχνός i - στο 1º βήμα".

$$P(A) = \sum_{i=1}^{S} P(\Lambda_i) \cdot P(A \mid \Lambda_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{S} \frac{1}{S} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{S-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^S}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{S} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^S\right]$$

Γενικά: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \theta^i = \frac{1 - \theta^{n+1}}{1 - \theta}$, $|\theta| < 1$

Άρα: $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{S}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^S\right]$

ii) P("να έγιναν κ-ρίψεις του νομίσματος , κ=1,2,...,s αν σε μία επανάληψη του π.τ. δεν εμφανίστηκε γράμματα")

Λ_i = "ο λαχνός να είναι i"

$P(\Lambda_k | A)$, k = 1, 2, ..., s , $P(\Lambda_k|A) \to$ Bayes

$$P(\Lambda_k|A) = \frac{P(\Lambda_k)\cdot P(A|\Lambda_k)}{P(A)} = \frac{\overset{\frac{1}{s}}{\overset{\|}{P(\Lambda_k)}} \cdot \overset{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\overset{\|}{P(A|\Lambda_k)}}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{s} P(\Lambda_i)\cdot P(A|\Lambda_i)}_{= \frac{1}{s}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^s\right]}} \overset{(i)}{=}$$

Πότε $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ?

Ορισμός: Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n: ενδεχόμενα.

Τότε είναι αμοιβαία ανεξάρτητα αν $\forall\ 2 \le k \le n$, και

$L_1, L_2, \ldots, L_k$, κ-διακεκριμένους δείκτες ισχύει:

$$P(A_{L_1} A_{L_2} \cdots A_{L_k}) = P(A_{L_1})\cdot P(A_{L_2}) \cdots P(A_{L_k})$$

ή ισοδύναμα

αν $\forall\ J \subset I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Ορισμός: Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία ενδεχομενων.

Τότε είναι ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων

αν $\forall k \geq 2$, και $L_1, L_2, \ldots, L_k$, κ-διακεκριμένους δείκτες

ισχύει: $P(A_{L_1} A_{L_2} \cdots A_{L_k}) = P(A_{L_1}) \cdot P(A_{L_2}) \cdots P(A_{L_k})$

ή ισοδύναμα

αν $\forall J \subset \mathbb{N}$ με J: πεπερασμένο

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Ειδικά:

Έστω A, B, Γ 3 ενδεχόμενα. Τα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα αν:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ $\quad (A \perp\!\!\!\perp B)$

$P(A\Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$ $\quad (A \perp\!\!\!\perp \Gamma)$

$P(B\Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$ $\quad (B \perp\!\!\!\perp \Gamma)$

$P(AB\Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$

$A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \Gamma$, $B \perp\!\!\!\perp \Gamma$, τότε

(ανά δύο)

A, B, Γ λέγονται κατά ζεύγη ανεξάρτητα

$\left(A, B, \Gamma, \begin{array}{l} AB=\emptyset \\ B\Gamma=\emptyset \\ A\Gamma=\emptyset \end{array} \Rightarrow AB\Gamma=\emptyset \right)$ $\left(\begin{array}{lll} (1,0) & \text{γραμ.} & (0,1) \\ (1,0) & '' & (1,1) \\ (0,1) & '' & (1,1) \end{array} \right)$

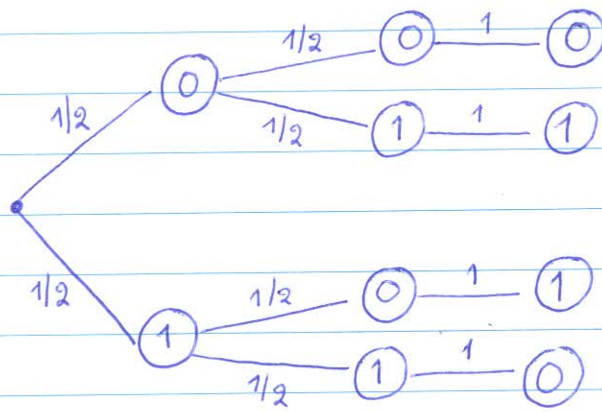
π.χ. η ιδιότητα μεταφέρεται και στα 3 αν ισχύει ανά δύο

π.χ. η ιδιότητα δεν μεταφέρεται και στα 3 ανα ισχύει ανά δύο

$(0,1), (1,0), (1,1)$ ΔΕΝ είναι γραμ. ανεξ.

γιατί $(1,1) = (0,1) + (1,0)$

- Γιατί είναι ανεξάρτητα ανά δύο $\not\Rightarrow$ (αμοιβαία ανεξ.) ανεξαρτ. ανά 3.



$$\Omega = \left\{ (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) \right\}$$

A: "1 στην 1η θέση"

B: "1 στη 2η θέση"

Γ: "1 στην 3η θέση"

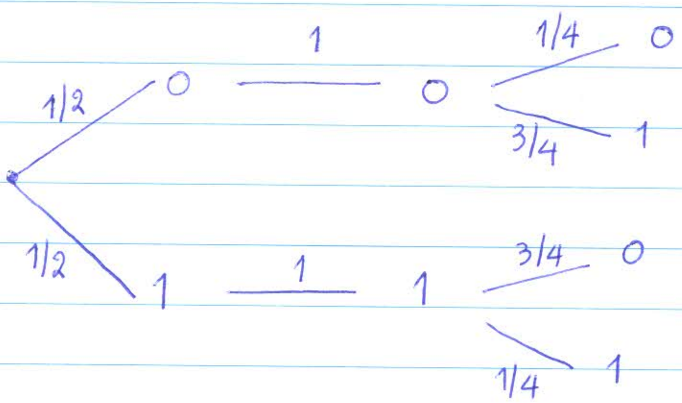
$\Rightarrow$ $AB = \{(1,1,0)\}$, $A\Gamma = \{(1,0,1)\}$, $B\Gamma = \{(0,1,1)\}$

$$P(AB) = P(A\Gamma) = P(B\Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(\Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$$

Ειδικά εδώ: $AB\Gamma = \emptyset$

$$P(AB\Gamma) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$$

• Γιατί $P(AB\Gamma) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$ δεν αρκεί για ανεξαρτησία?



A = "1 στην 1η θέση" $\quad \Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

B = "1 στη 2η θέση" $\quad AB\Gamma = \{(1,1,1)\}$

Γ = "1 στην 3η θέση"

$$P(AB\Gamma) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A)P(B)P(\Gamma) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(AB) = P\left(\{(1,1,0)\}\right) = \frac{1}{2} \neq P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{4}$$

$\{1,1,1\}$

Παρατηρήσεις

1) A, B, Γ ανεξάρτητα τότε $A \perp\!\!\!\perp B \cup \Gamma$, $A \perp\!\!\!\perp B\Gamma$

$A \perp\!\!\!\perp B\Gamma^c$

$$P[A(B\cup\Gamma)] = P[AB \cup A\Gamma] = P(AB) + P(A\Gamma) - P(AB\Gamma) =$$
$$P(A)[P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma)] = P(A)\,P(B\cup\Gamma).$$

$$A \cup B = \left[(A\cup B)^c\right]^c = (A^c B^c)^c$$

άλλος τρόπος

$$\left(P(A\cup B) = 1 - P(A^c B^c) = 1 - P(A^c) \cdot P(B^c)\right)$$

$$P[A(B\cup\Gamma)] = P\left[A(B^c\Gamma^c)^c\right] = P\left[A \setminus B^c\Gamma^c\right] =$$

$$= P(A) - P(AB^c\Gamma^c) =$$

$$P(A) - P(A)P(B^c)P(\Gamma^c) =$$

$$P(A)\left[1 - P(B^c)P(\Gamma^c)\right] =$$

$$P(A)\left[1 - (1-P(B))(1-P(\Gamma))\right] =$$

$$P(A)\left[P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma)\right] = P(A)\,P(B\cup\Gamma)$$

Μάθημα 8ο - 22/10/2014

Εφαρμογές της Ανεξαρτησίας

(1) Ανεξάρτητα πειράματα τύχης

Ορισμός: Έστω ότι ένα π.τ. Π μπορεί να αναλυθεί ως μία σειρά από -n- επιμέρους π.τ. Π_i, όπου τα αποτελέσματά τους δεν αλληλοεπηρεάζονται
$(\Pi_i \longrightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i))$

Τότε, λέμε ότι το π.τ. Π αναλύεται σε n διαδοχικά ανεξάρτητα π.τ. και μπορούμε να πάρουμε ως δ.χ. του π.τ. Π

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ και τότε

αν $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (όπου τα A_i είναι ενδεχόμενα στο πείραμα Π_i)

τότε: $P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \cdots P(A_n)$

(όπου καταχρηστικά γράφουμε P αντί για P_i)

Παρατηρήσεις

1) Οι ιδέες αυτές επεκτείνονται σε ακολουθίες πειραμάτων τύχης, κατά φυσιολογικό τρόπο.

π.χ. αν $L_1, L_2, \ldots, L_n$ διακεκριμένοι δείκτες

$$P(A_{L_1} \times A_{L_2} \times \ldots \times A_{L_n}) = P(A_{L_1}) \cdot P(A_{L_2}) \cdots P(A_{L_n})$$

2) Αν $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2) = \ldots = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$

Τότε μιλάμε για -n- επαναλήψεις του ιδίου π.τ. και κάθε επανάληψη λέγεται και δοκιμή.

Παραδείγματα

1) "Διαδοχικές ρίψεις 3 νομισμάτων"

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{K, \Gamma\}^3$$

$$P(\{(K,K,K)\}) = P^3(\{K\})$$ (λόγω ανεξαρτησίας δοκιμών)

2) "Διαδοχικές ρίψεις 2 ζαριών"

P("πρώτα άρτιο και μετά περιττό") = P("πρώτα άρτιο) · P("μετά περιττός) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\neq$

P(να έχω ένα άρτιο και ένα περιττό)

3) Σε μια ακολουθία ρίψεων ενός κύβου

P("να φέρω για πρώτη φορά 6, στη 10η ρίψη") =

= P("όχι 6 στην 1η ρίψη") ... P("όχι 6 στην 4η ρίψη) P("6 στην 10η ρίψη

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6}$$

② Δεσμευμένη Ανεξαρτησία

Ορισμός: Έστω A, B, Γ 3 ενδεχόμενα, με $P(\Gamma) > 0$.

Τα A και B λέγονται δεσμευμένα ανεξάρτητα δοθέντος του Γ, αν ισχύει:

$$P(AB|\Gamma) = P(A|\Gamma) \cdot P(B|\Gamma)$$

Παρατηρήσεις

1) Αν το Γ: $P(\Gamma) = 1$ ή τα A, B και Γ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα, τότε η ανεξαρτησία των A και B και η δεσμευμένη ανεξαρτησία των A και B δοθέντος του Γ είναι ισοδύναμες.

Ισχύει δηλαδή :

$$P(AB|\Gamma) = P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma) \overset{P(\Gamma)>0}{\Longleftrightarrow} P(AB) = P(A)\cdot P(B)$$

2) α) δεσμευμένα ανεξάρτητα $\overset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ ανεξάρτητα

και β) ανεξάρτητα $\overset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ δεσμευμένα ανεξάρτητα

* Αντιπαράδειγμα *

Αν A, B, Γ ενδεχόμενα με $0 < P(A), P(B), P(\Gamma) < 1$

και $A, B \subset \Gamma$, τότε

αν A και B ανεξάρτητα $\Rightarrow$ A και B <u>ΔΕΝ</u> είναι δεσμευμ. ανεξάρτητα. δοθέντος του Γ.

Τότε το α) έχει δειχτεί.

+ με αντιθετοαντιστροφή ,

Αν A και B δεσμευμ. ανεξάρτητα δοθέντος του Γ, τότε A και B όχι ανεξάρτητα , άρα και το β) ισχύει.

$$P(AB|\Gamma) \overset{\text{ορσ.}}{=} \frac{P(AB\Gamma)}{P(\Gamma)} \overset{AB\subset\Gamma}{=} \frac{P(AB)}{P(\Gamma)} \overset{A \perp\!\!\!\perp B}{=} \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(\Gamma)} =$$

$$= P(\Gamma)\cdot \frac{P(A)}{P(\Gamma)} \cdot \frac{P(B)}{P(\Gamma)} \overset{\frac{A\subset\Gamma}{B\subset\Gamma}}{} P(\Gamma)\cdot P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma) <$$

$$< 1 \cdot P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma)$$

$\Longrightarrow$ Άρα , A και B όχι δεσμευμ. ανεξάρτητα δοθέντος του Γ.

Εφαρμογές

Σε 2 ρίψεις νομίσματος

A : "Κ στην 1η ρίψη" $\quad A = \{(K,K),(K,\Gamma)\}$

B : "Κ στην 2η ρίψη" $\quad B = \{(\Gamma,K),(K,K)\}$

Γ : "τουλάχιστον ένα Κ στις 2 ρίψεις". $\quad \Gamma = \{(K,\Gamma),(\Gamma,K),(K,K)\}$

$A \perp\!\!\!\perp B$, $P(AB|\Gamma) = \frac{1}{3} \neq P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Άρα A, B όχι δεσμευμένα ανεξάρτητα δοθέντος του Γ.

Σε 3 ρίψεις νομίσματος

A : "Κ στις 2 πρώτες ρίψεις"

B : "Κ στις 2 τελευταίες ρίψεις"

Γ : "τουλ. 2 Κ"

A και B είναι δεσμ. ανεξ. δοθέντος του Γ.
ενώ δεν είναι ανεξ. ενδεχόμενα.

2) Για περισσότερα ενδεχόμενα, η δεσμευμ. ανεξαρτησία γενικεύεται όπως και η απλή ανεξαρτησία ενδεχομένων, αφού αντιστοιχεί σε ανεξαρτησία στον χ.π.
$(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|\Gamma))$

Άσκηση 1, Φυλ. 2 : Ένας φίλος βρίσκεται με πιθανότητα $\frac{p}{7}$ στον όροφο i ενός εμπορικού κέντρου. Ψάξαμε μάταια στους 6 από αυτούς. Ζητάμε την πιθανότητα να βρίσκεται στον όροφο που δεν ψάξαμε. $(0 \leq p \leq 1)$

Λύση

Αν B: "να μη βρίσκεται στους ορόφους που ψάξαμε" =
="να βρίσκεται στον όροφο που υπολείπεται ή εκτός εμπορικού κέντρου".

Αν A: "να βρίσκεται στον όροφο που υπολείπεται".

$$P(A|B) \overset{\text{ορσ.}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)} \overset{A \subset B}{=} \frac{P(A)}{P(B)} \overset{\substack{B: \text{ένωση} \\ 2 \text{ ξένων ενδεχ.}}}{=} \frac{\frac{p}{7}}{\frac{p}{7} + 1 - \left(\sum_{i=1}^{7} \frac{p}{7}\right)}$$

$$= \frac{\frac{p}{7}}{\frac{p}{7} + 1 - p} = \frac{p}{p + 7(1-p)} = \frac{p}{7 - 6p}$$

Άσκηση 2, Φυλ. 2

Ριχνουμε 2 τίμια ζάρια (ανεξ. ριψεις). Το ένα ζάρι είναι μαύρο και το άλλο άσπρο. Έστω:

A: "το ψηφίο του μαύρου ζαριού είναι άρτιος".
B: "το ψηφίο του άσπρου ζαριού είναι περιττός".
Γ: "τα ψηφία και των 2 ζαριών είναι και τα 2 άρτιοι ή και τα 2 περιττοί".

Ν.δ.ο. $A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \Gamma$ και $B \perp\!\!\!\perp \Gamma$, όμως

A, B και Γ δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητα.

Λύση

Από ανεξαρτησία ρίψεων

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$A\Gamma$ = "το ψηφίο του μαύρου είναι άρτιος" και το ψηφίο του άσπρου είναι άρτιος".

$$P(A\Gamma) = P(\text{"μαύρο άρτιος"}) \cdot P(\text{"άσπρο άρτιος"}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(\Gamma)$$

Ομοίως $P(B\Gamma) = P(B)P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, αφού

$$P(\Gamma) = P(\text{"και τα 2 ζάρια άρτιος"})$$

$$+ P(\text{"και τα 2 ζάρια περιττός"})$$

$$= P^2(\text{"άρτιος"}) + P^2(\text{"περιττός"}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

■

- $AB\Gamma = \emptyset \Rightarrow P(AB\Gamma) = 0 \neq \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(\Gamma)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

Άσκηση 5 , [ΘΕΜΑ Εξ. Ιούνιος 2013]

10 κάλπες αριθμημένες από 1 ... 10.
Τις ονομάζουμε $K_1, K_2, \ldots, K_{10}$ και
K_i : "να επιλέξουμε την K_i"

- Κάθε μία περιέχει 11 σφαιρίδια
  - $K_1, K_2, \ldots, K_7$: 3 λευκά και 8 μαύρα σφαιρίδια
  - K_8, K_9, K_{10} : 5 λευκά και 6 μαύρα σφαιρίδια.

Επιλέγεται τυχαία μια κάλπη $\left(P(K_i) = \frac{1}{10}\right)$

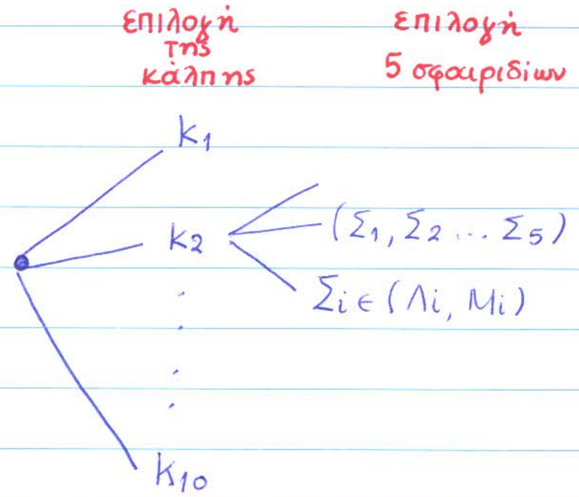
και επιλέγουμε με επανάθεση 5 σφαιρίδια.

$\Rightarrow$

1) P("να επιλεγεί η κάλπη k_3, τα πρώτα 3 σφαιρίδια λευκά και τα 2 τελευταία μαύρα.").

2) P("να επιλεγεί η κάλπη k_3 και να έχουμε συνολικά 3 λευκά και 2 μαύρα").

Ονομάζουμε Λ_i : "να επιλεγεί λευκό σφαιρίδιο στην i-επιλογή"
M_i : " —''— μαύρο —''— "



$$P(K_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 M_4 M_5) \overset{\text{πολ/κος νόμος}}{=} P(K_3) \cdot P(\Lambda_1 | K_3) \cdot P(\Lambda_2 | K_3 \Lambda_1) \cdot P(\Lambda_3 | K_3, \Lambda_1, \Lambda_2) \cdot P(M_4 | K_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3) \cdot P(M_5 | K_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 M_4) =$$

$$= P(K_3) \cdot P(\Lambda_1 | K_3) \cdot P(\Lambda_2 | K_3) \cdot P(\Lambda_3 | K_3) \cdot P(M_4 | K_3) \cdot P(M_5 | K_3)$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{3}{11}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^2$$

εφόσον $P(\Lambda_i | K_3) = \frac{3}{11}$

$P(M_i | K_3) = \frac{8}{11}$

$$P\left(K_3 \cap \{\text{συνολικά 3 λευκές και 2 μαύρες}\}\right)$$

$$= P\left(K_3 \cap \left(\bigcup_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} \Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\right)\right), \text{ όπου}$$

$$\{j_1, j_2\} = \{1,2,\ldots,5\} \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$$

$$= P\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\right) =$$

$$= \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} P\left(K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\right) =$$

$$= \binom{5}{3} P\left(K_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3M_4M_5\right),$$

αφού $P\left(K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\right) = P\left(K_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3M_4M_5\right) =$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^3\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^2$$

Τελικά $P = \binom{5}{3}\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^3\left(\frac{8}{11}\right)^2$

(3) $P(\text{"όλα τα σφαιρίδια λευκά"})$

Α' Τρόπος (θ.ο.π) στα $K_i, i=1,\ldots,10$. $= P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\right) = \sum_{i=1}^{10} P(K_i)\cdot P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5 \mid K_i\right)$

Β' Τρόπος (θ.ο.π) στα $\bigcup_{i=1}^{7} K_i$ και $\bigcup_{i=8}^{10} K_i$

$$P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{7}K_i\right)P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5 \,\Big|\, \bigcup_{i=1}^{7}K_i\right)$$

$$+ P\left(\bigcup_{i=8}^{10}K_i\right)P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5 \,\Big|\, \bigcup_{i=8}^{10}K_i\right)$$

$$= \frac{7}{10} \prod_{i=1}^{5} P(\Lambda_i \mid \bigcup_{i=1}^{7} K_i) + \frac{3}{10} \prod_{i=1}^{5} P(\Lambda_i \mid \bigcup_{i=8}^{10} K_i)$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^5 + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^5$$

(4) $$P(K_3 \mid \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(K_3) \cdot P(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5 \mid K_3)}{\underbrace{P(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5)}_{\overset{\parallel}{(iii)\ \text{ερωτ.}}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^5}{\frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^5 + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^5} = \ldots$$

Μάθημα 9ο - 24/10/2014

Άσκηση 2.8

- 0,1% ενός πληθυσμού πάσχει από ασθένεια Χ.
- ένα τεστ κάνει λάθος διάγνωση 5% όταν κάποιος έχει ασθένεια και 1% όταν κάποιος είναι υγιής.

Δεδομένου ότι το τεστ δείχνει ασθένεια σε κάποιο άτομο που επιλέχθηκε στην τύχη, ποια η πιθανότητα το άτομο αυτό να έχει όντως την ασθένεια;

A_1, Y_1 : "το άτομο που επιλέχθηκε στην τύχη να έχει όντως την ασθένεια ή όχι αντίστοιχα".

A_2, Y_2 : "το τεστ να δείξει ότι το άτομο είναι ασθενής ή υγιής αντίστοιχα".

$$P(A_1 \mid A_2) \overset{Bayes}{=\!=} \frac{P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)}{P(A_2)} =$$

$$= \frac{P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)}{P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1) + P(Y_1)\cdot P(A_2 / Y_1)} =$$

$$= \frac{0.001 \times 0.95}{0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.01} = \frac{95}{95+999} = \frac{95}{1094}$$

■

Άσκηση 2.6.

K_1: 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια
K_2: 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια

Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την K_1 και το τοποθετούμε στην K_2.
Έπειτα, επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο τυχαία από την K_2.

- P("2º σφαιρίδιο να είναι άσπρο?")

A_1: "το 1º σφαιρίδιο να είναι άσπρο"
M_1: "το 1º σφαιρίδιο να είναι μαύρο"
A_2: "το 2º σφαιρίδιο να είναι άσπρο"

$$P(A_2) \overset{Θ.Ο.Π}{=\!=} P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1) + P(M_1)\cdot P(A_2 \mid M_1) =$$

$$= \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{9} + \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{\underset{8+1}{\underbrace{9}}} = \frac{41}{108}$$

■

Άσκηση 2.9

Πείραμα τύχης: ακολουθία (ανεξάρτητων) ρίψεων 2 ζαριών μέχρι να φέρω άθροισμα ενδείξεων 6 ή 7.

1) P("να σταματήσουμε στη δοκιμή $-n-$") , $n \geq 1$

2) P("να φέρουμε άθροισμα 6 πριν φέρουμε άθροισμα 7").

E : "να φέρουμε άθροισμα 6 ή 7 σε 1 ρίψη"
E_i : "να φέρουμε άθροισμα i σε 1 ρίψη"

$E = E_6 \cup E_7$, $A = E^c$ (να μη φέρουμε άθροισμα 6 ή 7 σε 1 ρίψη)

$\Omega = \{E, AE, AAE, \ldots\}$

Λύση

(1): P("να σταματήσουμε στη δοκιμή n") =

$$= P(\underbrace{AA\ldots A}_{n-1}E) \underset{\text{ρίψεων}}{\overset{\text{ανεξαρτησία}}{=}} (P(A))^{n-1} \cdot P(E)$$

• $P(E) = P(E_6 \cup E_7) = P(E_6) + P(E_7)$

$E_6 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$E_7 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$$P(E_6)=\frac{|E_6|}{36}=\frac{5}{36}\ ,\quad P(E_7)=\frac{|E_7|}{36}=\frac{6}{36}$$

$$P(E)=P(E_6)+P(E_7)=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=\frac{11}{36}\qquad (2)$$

$$P(A)=1-P(E)=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}\qquad (3)$$

Από (1),(2),(3) : $P(\underbrace{AA\ldots A}_{n-1}E)=\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\cdot\frac{11}{36}\ ,\ n\geq 1$

(2) P("να φέρω άθροισμα 6 πριν φέρω άθροισμα 7"). =

Α' ΤΡΟΠΟΣ : (θ.ο.π)

$$=\sum_{n=1}^{+\infty} P(\text{"να σταματήσουμε στη δοκιμή } n\text{"})$$

$$\times\ P\left(\begin{array}{c}\text{"να φέρουμε 6"}\\ \text{στη δοκιμή } -n-\end{array}\middle|\ \text{"σταματάμε στη δοκιμή } -n-\text{"}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty} P_n\cdot P\left(\begin{array}{c}\text{"να φέρουμε άθροισμα"}\\ \text{6 στη δοκιμή } -n-\end{array}\middle|\ \begin{array}{c}\text{"φέρνουμε άθροισμα}\\ \text{6 ή 7 στη δοκιμή } -n-\text{"}\end{array}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty} P_n\cdot\frac{P(\text{"να φέρουμε άθροισμα 6"})}{P(\text{"να φέρουμε άθροισμα 6 ή 7"})}=\sum_{n=1}^{+\infty} P_n\,\frac{P(E_6)}{P(E)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\frac{11}{36}\ \frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{5}{36}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}=\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}}$$

$$=\frac{5}{11}.$$

Β' Τροπος: $P(\text{"να φέρω άθροισμα 6 πριν από 7"}) =$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(\underbrace{AA\cdots A}_{n-1} E_6) = \cdots = \cdots = \frac{5}{11}$$

Γ' Τροπος: (Πιο έξυπνος?)

$B_1 =$ "να φέρω αθρ. 6 στην 1η δοκιμή"

$B_2 =$ "να φέρω αθρ. 7 στην 1η δοκιμή"

$B_3 =$ "δεν φέρνω αθρ 6 ή 7 στην 1η δοκιμή".

$$r \overset{(\text{θοπ})}{=} P(B_1)\cdot P\left(\text{"να φέρω 6 πριν από 7"} \middle| B_1\right) + P(B_2)\cdot P\left(\text{" . "} \middle| B_2\right) + P(B_3)\cdot P\left(\text{" . "} \middle| B_3\right) =$$

$$= \frac{5}{36}\cdot 1 + \frac{6}{36}\cdot 0 + \frac{25}{36}\cdot r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r = \frac{5}{36} + \frac{25}{36} r \Longrightarrow \frac{11}{36} r = \frac{5}{36} \Longrightarrow r = \frac{5}{11}$$

(3): όπως πριν $p = \dfrac{6}{11}$

(4): $P(\text{"να σταματήσουμε το παιχνίδι"}) =$

$= P(\text{"να φέρω αθρ. 6 πριν από 7"}) + P(\text{"να φέρω αθρ. 7 πριν από 6"})$.

$$= \frac{5}{11} + \frac{6}{11} = 1$$

Τυχαίες Μεταβλητές

① Ορισμός τ.μ. και παραδείγματα.

τυχαία μεταβλητή : αριθμητικό χαρακτηριστικό που αντιστοιχίζεται στα δ.σ. (δυνατά αποτελέσματα) ενός π.τ.

π.χ. 1) π.τ. : 100 (ανεξαρτ.) ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος
τ.μ. : # φορών που φέραμε κορώνα
ή # φορών που είχαμε διαδοχή Κορώνα-Γράμματα.

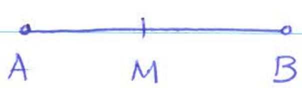
2) π.τ. : ακολουθία (ανεξαρτ.) ρίψεων 2 ζαριών
τ.μ. : # φορών που είχαμε εξάρες στις 1000 πρώτες δοκιμές.

ή # φορών που οι ενδείξεις των ζαριών συμπίπτουν.

\# φορών μέχρι να φέρουμε πρώτη φορά ασσόδυο.

3) π.τ. : παρατήρηση του χρόνου λειτουργίας μιας μηχανής / λαμπτήρα
τ.μ. : ο χρόνος λειτουργίας της μηχανής ($t \geq 0$, συνεχής χρόνος)
ή πόσες μέρες λειτούργησε η μηχανή ?

4) π.τ. : τυχαία επιλογή ενός σημείου Μ σε ένα ευθ. τμήμα ΑΒ



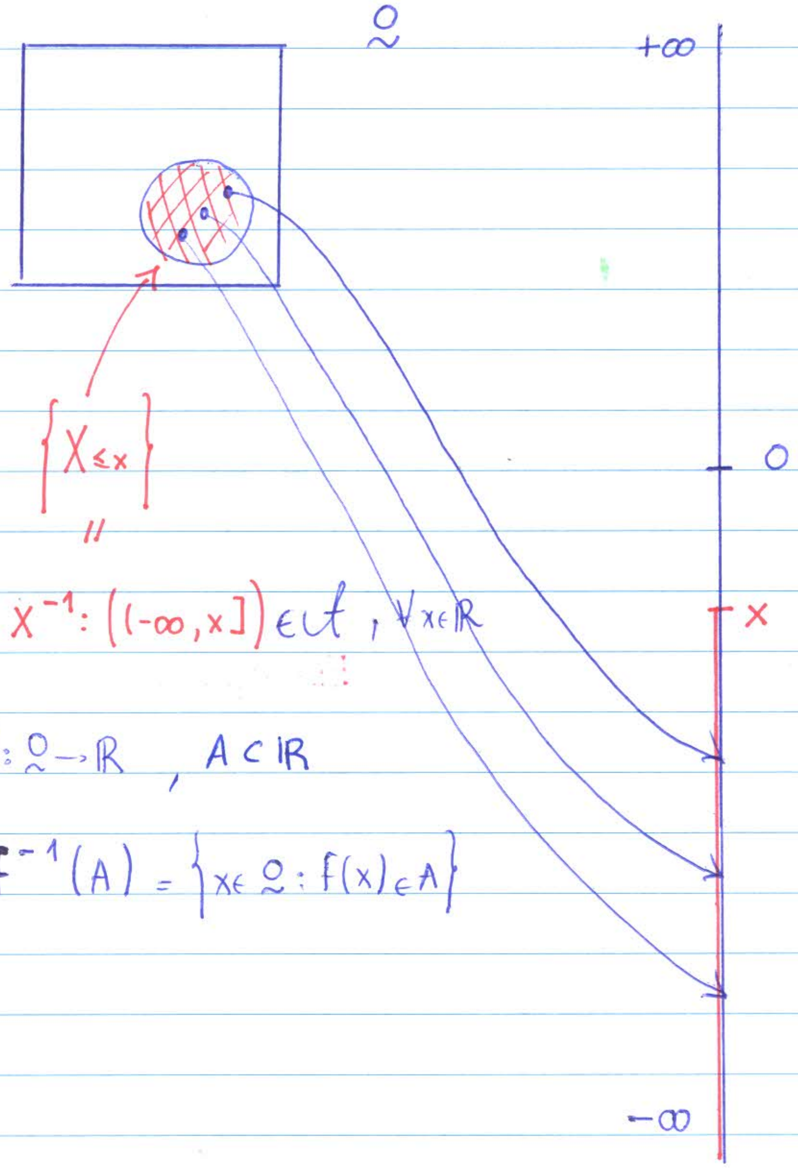
τ.μ. : η απόσταση του Μ από το Α, δηλ. το μήκος (ΑΜ) ή ο λόγος $\frac{(AM)}{(MB)}$, όταν $M \neq B$.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π.

Τότε μια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$, λέγεται τυχαία μεταβλητή αν:

$$\{X \le x\} \overset{\text{ορσ.}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = X^{-1}((-\infty, x])$$

$\in \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (δηλ. $\{X \le x\}$ είναι ενδεχόμενο $\forall x \in \mathbb{R}$)



$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$

$f^{-1}(A) = \{x \in \Omega : f(x) \in A\}$

Παρατήρηση

Αν ο Ω είναι διακριτός δ.χ.
(πεπερασμένος ή αριθμησίμως άπειρος), τότε μπορούμε να επιλέξουμε

$\mathcal{A} = P(\Omega)$ και τότε κάθε συνάρτηση $X:\Omega \to \mathbb{R}$ είναι τ.μ.

Αντίθετα, σε συνεχείς δ.χ. αυτό δεν είναι πάντα εφικτό.

Όμως αυτό δεν θα μας απασχολήσει, αφού
στο μάθημα αυτό κάθε συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$
θα είναι τ.μ.

2 Κατανομή μιας τ.μ.

Όταν θεωρούμε τ.μ. τότε το ενδιαφέρον μιας
συνήθως φεύγει από τον αρχικό δ.χ. Ω και
υπολογισμούς πιθανοτήτων τύπου $P(A)$ και εστιάζεται
στο $\mathbb{R}$ και σε υπολογισμούς πιθανοτήτων τύπου $P(X\in A)$

Αρχικός χ.π. $\quad$ Επαγόμενος χ.π.

$$(\underbrace{\Omega}_{\text{δ.χ.}}, \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{ενδεχομ.}}, \underbrace{P}_{\text{συναρτ. πιθαν.}}) \xrightarrow{X:\Omega\to\mathbb{R} \text{ τ.μ.}} (\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{δ.χ}}, \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R})}_{\substack{\text{(ενδεχόμενα)}\\ \text{(Borel υποσύνολα)}}}, \underbrace{P_X}_{\substack{\text{επαγόμενη συνάρτηση}\\ \text{πιθανότητας}}})$$

όπου $P_X(A) \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X\in A) = P(\{w\in\Omega : X(w)\in A\})$

$A \in \mathcal{A}$

περιέχει $\left\{\begin{array}{l}\text{ανοιχτά, κλειστά,} \\ \text{διαστήματα του } \mathbb{R}, \\ \dots \end{array}\right\}$

* $B(\mathbb{R}) = \sigma\left(\begin{array}{l}\text{ανοικτά} \\ \text{υποσύνολο} \\ \text{του } \mathbb{R}\end{array}\right)$

ελάχιστη
σ-άλγεβρα
που περιέχει τα ανοικτά σύνολα.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ.

Τότε η επαγόμενη συνάρτηση πιθανότητας
$P_X : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ λέγεται κατανομή (πιθανότητας) της τ.μ. X.

Ερώτηση: Υπάρχει κάποιος πιο οικονομικός τρόπος να χαρακτηρίσουμε την κατανομή μιας τ.μ.;

Απάντηση: Ναι, είναι η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ενας χ.π. και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μία τ.μ.

Τότε η συνάρτηση $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, όπου

$$F_X(x) \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X \leq x),$$ λέγεται συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Μάθημα 10ο - 27/10/

1 Συνάρτηση Κατανομής μιας τ.μ.

Υπενθύμιση: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ μία τ.μ. Η συνάρτηση $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$, με

$F_X(x) = P(X \leq x)$ λέγεται (αθροιστική) συνάρτηση

κατανομής της τ.μ. X.

Παρατηρήσεις.

1) Η συνάρτηση κατανομής F_X καθορίζει μονοσήμαντα (χαρακτηρίζει) την κατανομή (πιθανότητας) P_X της τ.μ. X. Δηλ., αν X και Y είναι τ.μ. και $F_X = F_Y$, τότε: $P_X = P_Y$

2) Αν X και Y είναι 2 τ.μ., με $F_X = F_Y$, τότε θα λέμε ότι οι X και Y είναι ισόνομες και γράφουμε

$$X \overset{d}{=} Y \quad (d: \text{distribution})$$

Επίσης: αν $X = Y \implies X \overset{d}{=} Y$. Όμως

$$X \overset{d}{=} Y \not\Rightarrow X = Y$$

② Παραδείγματα

#1 π.τ. : 3 (ανεξάρτητες) ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος.

τ.μ. X : # ρίψεων που έχουμε κορώνα.

$$\Omega = \{(Γ,Γ,Γ),\ (Γ,Γ,Κ),\ (Γ,Κ,Γ),\ (Γ,Κ,Κ),\ (Κ,Γ,Γ),\ (Κ,Γ,Κ),\ (Κ,Κ,Γ),\ (Κ,Κ,Κ)\}$$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

ω	(Γ,Γ,Γ)	(Γ,Γ,Κ)	(Γ,Κ,Γ)	(Γ,Κ,Κ)	(Κ,Γ,Γ)	(Κ,Γ,Κ)	(Κ,Κ,Γ)	(Κ,Κ,Κ)
$X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3

Βλέπουμε $X(\omega) \in \{0, 1, 2, 3\}$

Υπενθύμιση

$$\{X \in A\} \overset{ορσ.}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$$

Ειδικά: $\{X \in \{x\}\} \overset{ορσ.}{=} \{X = x\}$

$$\{X \in (-\infty, x]\} \overset{ορσ.}{=} \{X \leq x\}$$

Έστω $A_0 \overset{ορσ.}{=} \{X = 0\} = \{(Γ,Γ,Γ)\}$

$A_1 \overset{ορσ.}{=} \{X = 1\} = \{(Γ,Γ,Κ),\ (Γ,Κ,Γ),\ (Κ,Γ,Γ)\}$

$A_2 \overset{ορσ.}{=} \{X = 2\} = \{(Γ,Κ,Κ),\ (Κ,Γ,Κ),\ (Κ,Κ,Γ)\}$

$A_3 \overset{ορσ.}{=} \{X = 3\} = \{(Κ,Κ,Κ)\}$

Αντιστοιχα :

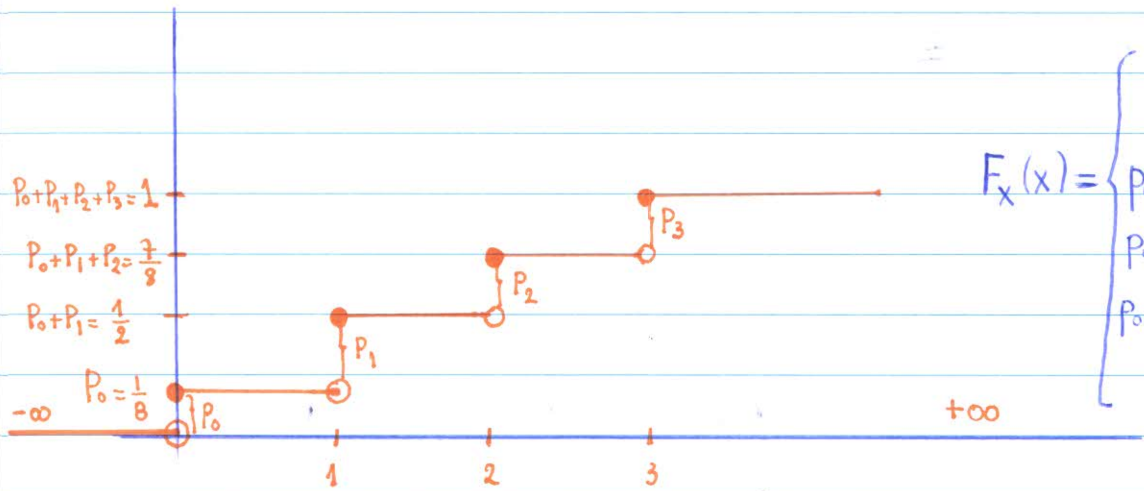
$$P_0 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=0) = P(A_0) = \frac{|A_0|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

$$P_1 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=1) = P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

$$P_2 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=2) = P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

$$P_3 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=3) = P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

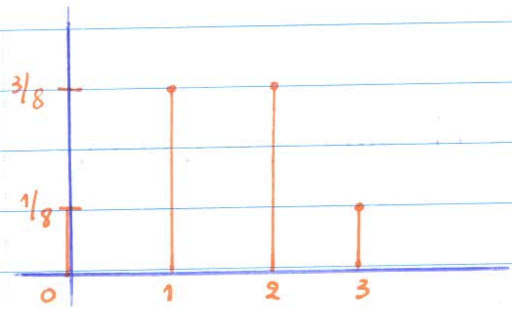
x	$-\infty$ …	0	…	1	…	2	…	3	… $+\infty$
$\{X=x\}$	$\emptyset$	$\boxed{A_0}$	$\emptyset$	$\boxed{A_1}$	$\emptyset$	$\boxed{A_2}$	$\emptyset$	$\boxed{A_3}$	$\emptyset$
$\{X\le x\}$	$\emptyset$	$\boxed{A_0}$	A_0	$\boxed{\bigcup_{i=0}^{1} A_i}$	$\bigcup_{i=0}^{1} A_i$	$\boxed{\bigcup_{i=0}^{2} A_i}$	$\bigcup_{i=0}^{2} A_i$	$\bigcup_{i=0}^{3} A_i = \Omega$	
$P(X=x)$	0	$\boxed{P_0}$	0	$\boxed{P_1}$	0	$\boxed{P_2}$	0	$\boxed{P_3}$	0
$P(X\le x)$	0	$\boxed{P_0}$	P_0	$\boxed{\sum_{i=0}^{1} P_i}$	$\sum_{i=0}^{1} P_i$	$\boxed{\sum_{i=0}^{2} P_i}$	$\sum_{i=0}^{2} P_i$	$\sum_{i=0}^{3} P_i = 1$	1



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ P_0 = \frac{1}{8} & , 0 \le x < 1 \\ P_0 + P_1 = \frac{1}{2} & , 1 \le x < 2 \\ P_0 + P_1 + P_2 = \frac{7}{8} & , 2 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$

Συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της τ.μ. X.

$$f_X(x) \overset{\text{ορσ.}}{=\!=} P(X=x)$$



$$f_X(x) = \begin{cases} 1/8 & , x=0 \\ 3/8 & , x=1 \\ 3/8 & , x=2 \\ 1/8 & , x=3 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

1) Η συνάρτηση κατανομής F_X είναι αύξουσα (i), δεξιά συνεχής (ii) και (iii) $F_X(-\infty) \overset{\text{ορσ.}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F_X(+\infty) \overset{\text{ορσ}}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

2) Η F_X είναι ασυνεχής, εκεί όπου $P(X=x) > 0$, και μάλιστα το άλμα ασυνέχειας είναι
$P(X=x) = F(x) - F(x-)$, όπου: $F(x-) = \lim\limits_{y\to x^-} F(y)$

3) Η $f_X(x) = P(X=x)$ μας δίνει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε την F_X:

$$F_X(x) = \sum_{k:\, x_k \le x} f_X(x_k)$$

εδώ, $\underset{0}{\overset{x_0}{\shortparallel}}, \underset{1}{\overset{x_1}{\shortparallel}}, \underset{2}{\overset{x_2}{\shortparallel}}, \underset{3}{\overset{x_3}{\shortparallel}}$

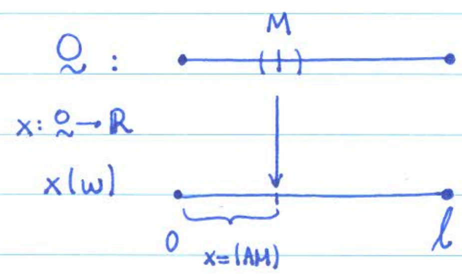
Αντίστροφα, αν έχουμε την F_X, μπορούμε να υπολογίσουμε την f_X, $f_X(x) = P(X=x) = F_X(x) - F_X(x-)$

4) Αν πάρουμε Y = #ριψεων που έχουμε γράμματα

Τότε: $X \overset{d}{=} Y$, ενώ $X + Y = 3$ $(\forall \omega \in \Omega : X(\omega) + Y(\omega) = 3)$

#2 Π.Τ. : τυχαία επιλογή ενός σημείου M από ευθ. τμήμα AB μήκους ℓ.

τ.μ. X: η απόσταση του σημείου M από το A, δηλ. το μήκος (AM).

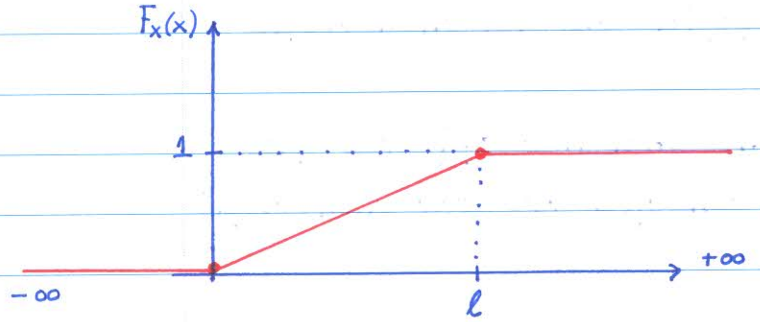


Αν Γ: ενδεχόμενο , $P(\Gamma) = \dfrac{\text{μήκος}(\Gamma)}{\text{μήκος}(\Omega)}$.

(έχουμε γεωμετρική πιθανότητα σε 1 διάσταση)

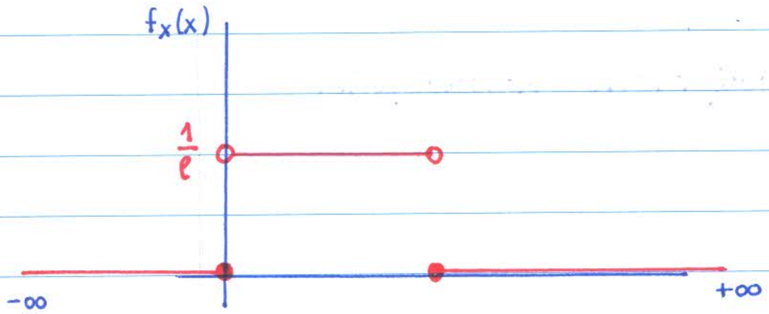
$$\{X \leq x\} = \begin{cases} \emptyset &, x < 0 \\ AM_x , (M_x : (AM_x) = x) &, 0 \leq x \leq \ell \\ AB = \Omega &, x > \ell \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \dfrac{(AM_x)}{(AB)} = \dfrac{x}{\ell} & , 0 \le x \le \ell \\ 1 & , x > \ell \end{cases}$$



$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-) \overset{\text{λόγω συνέχειας}}{=} 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ορίζουμε: $f_X(x) = F_X'(x)$ (εκεί που ορίζεται) η f_X λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X.



$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} , & 0 < x < \ell \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Εκεί που η F_X δεν είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να ορίζουμε αυθαίρετα την τιμή της f_X. Παρ'όλα αυτά προτιμάμε να την ορίζουμε ίση με μηδέν.

Παρατηρήσεις

1) Η F_X είναι αύξουσα , είναι συνεχής και $F(-\infty)=0$
και $F(+\infty)=1$

2) Η F_X δεν έχει ασυνέχειες και επομένως η συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας : $P(X=x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Άρα δεν μας δίνει καμία πληροφορία για τον υπολογισμό της F_X.

3) Αντίθετα, Η $f_X(x) = F_X'(x)$ εκεί που ορίζεται μας δίνει όλη την πληροφορία που θέλουμε για τον υπολογισμό της F_X.

Πράγματι, $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad , \forall x\in\mathbb{R}$$

Και αντίστροφα, από την F_X , μπορούμε να παίρνουμε την f_X με παραγώγιση.

③ Ιδιότητες συνάρτησης κατανομής.

Βασικές Ιδιότητες

1) Η F_X είναι αύξουσα

2) Η F_X είναι δεξιά συνεχής

3) $F(-\infty)=0$ και $F(+\infty)=1$

* Αποδείξεις ιδιοτήτων

1. Η F_X είναι αύξουσα

$\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$

Αν $x<y$, $F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F_X(y)$

2. Η F_X είναι δεξιά συνεχής

Πρέπει αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

Κάθε αύξουσα συνάρτηση έχει πάντα πλευρικά όρια, άρα υπάρχει το όριο από τα δεξιά.
Βρίσκουμε την τιμή παίρνοντας οποιαδήποτε ακολουθία με $x_n \to x_0^+$

Άρα : $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = \lim_{n \to \infty} F_X(x_n)$

Παίρνουμε : $x_n = x_0 + \frac{1}{n} \longrightarrow x_0^+$

Ορίζουμε : $A_n = \{X \leq x_n\}$, $n \geq 1$

Η $A_n \downarrow$ και $\bigcap_n A_n = \{X \leq x_0\}$. Τότε :

$\lim_{n \to \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq x_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) \overset{A_n \downarrow}{\underset{\text{ιδ. πιθαν.}}{=}} P(\bigcap_n A_n) =$

(Τελικά: η F_X είναι δεξιά συνεχής.) $= P(X \leq x_0) = F_X(x_0)$

3. $F(-\infty)=0$

Υπόδειξη: $x_n=-n$, $A_n=\{X\leq -n\}$

$F(+\infty)=1$

Υποδειξη: $x_n=n$, $A_n=\{X\leq n\}$

και $A_n\nearrow$ και όριο $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)=P(\cup A_n)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ και ικανοποιεί τις ιδιότητες 1)-3) (αύξουσα, δεξιά συνεχής και $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$), τότε υπάρχει χ.π. $(\Omega,\mathcal{A},P)$ και τ.μ. $X:\Omega\to\mathbb{R}$, όπου $F_X=F$.

Μια F που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1)-3) λέμε ότι είναι μία **συνάρτηση κατανομής**.

4 Κατηγορίες τ.μ.

X τ.μ. $\to$ διακριτή

X τ.μ. $\to$ συνεχής $\to$ απόλυτα συνεχής

συνεχής $\to$ ιδιάζουσα συνεχής

- **διακριτή**: υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, ώστε $P(X \in A) = 1$

- **συνεχής**: αν η σ.κ. F_X είναι συνεχής

- **απόλυτα συνεχής**: υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση f, $(f \geq 0)$ και επιπλέον ολοκληρώσιμη με $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, όπου $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

* **ιδιάζουσα συνεχής**: όταν $F_X' = 0$, εκεί που ορίζεται
(δεν θα την χρησιμοποιήσουμε πολύ)

Υπολογισμός $P(X \in I)$ ως συνάρτηση F_X, για I: διάστημα.

I	$P(X \in I)$ σμβ	$P(X \in I)$ ως συνάρτηση της F_X
$(-\infty, b]$	$P(X \leq b)$	$F_X(b)$
$(-\infty, b)$	$P(X < b)$	$F_X(b-)$
$[\alpha, +\infty)$	$P(X \geq \alpha)$	$1 - F_X(\alpha-)$
$(\alpha, +\infty)$	$P(X > \alpha)$	$1 - F_X(\alpha)$
$[\alpha, b]$	$P(\alpha \leq X \leq b)$	$F_X(b) - F_X(\alpha-)$
$(\alpha, b]$	$P(\alpha < X \leq b)$	$F_X(b) - F_X(\alpha)$
$[a, b)$	$P(a \leq X < b)$	$F_X(b-) - F_X(a-)$
(a, b)	$P(a < X < b)$	$F_X(b-) - F_X(a)$