ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1º Μάθημα
7/1/2015

α) Έστω X τ.μ. με σ.π.π. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{x-2}{3}} & , x\geq 2\\ 0 & , \text{διαφ.}\end{cases}$

Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της X

α' τρόπος: $M_X(t)=E(e^{t\cdot X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f_X(x)=\int_{2}^{+\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{3}e^{-\frac{x-2}{3}}dx =$

$\left(\begin{array}{l} y=\frac{x-2}{3}\\ x=3y+2\\ dx=3dy\end{array}\right)$ $\quad = \int_0^{+\infty}e^{t(3y+2)}\frac{1}{3}e^{-y}\cdot 3dy =$

α' τρόπος υπολ. ολοκλ. $\quad = e^{2t}\int_0^{+\infty}e^{(3t-1)y}dy =$ | για να είναι εκθετ θέλω ένα (−) $(e^{-\theta})$

$\left(\begin{array}{l}\theta e^{-\theta} \text{ σ.π.π. } \exp(1-3t)=1\\ \text{όταν } 1-3t>0,\ t<\frac{1}{3}\end{array}\right)$ $\quad = \frac{e^{2t}}{3t-1}\int_0^{+\infty}(3t-1)\cdot e^{(3t-1)y}dy = \frac{e^{2t}}{1-3t}\int_0^{+\infty}(1-3t)e^{-(1-3t)y}dy$

$$= \frac{e^{2t}}{1-3t} \quad t<\frac{1}{3}$$

β' τρόπος υπολ. ολοκλ.

ή $e^{2t}\int_0^{+\infty}e^{(3t-1)y}dy = \frac{e^{2t}}{(3t-1)}\cdot\int_0^{+\infty}(3t-1)e^{(3t-1)y}dy =$

$$= \frac{e^{2t}}{3t-1}\int_0^{+\infty}\left(e^{(3t-1)y}\right)'dy = \frac{e^{2t}}{3t-1}\left[e^{(3t-1)y}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{e^{2t}}{3t-1}(0-1) = -\frac{e^{2t}}{3t-1} \quad \left(\text{όταν } 3t-1<0,\ t<\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{2t}}{1-3t}$$

β' Τρόπος : Υποψιάζομαι ότι $X = Y+2$ όπου $Y \sim \exp\left(\frac{1}{3}\right)$

(Αλλαγή Μεταβλ.)

* $f_X(x) = f_Y\left(g^{-1}(x)\right)\left|\dfrac{dg^{-1}(x)}{dx}\right|$ όπου $x = y+2 = g(x)$
$y = x-2 = g^{-1}(x)$

* $\Rightarrow \left[f_X(x) = f_Y(x-2)\cdot 1\right]$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y>0 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases} \Longrightarrow \cancel{f_Y(y)}\ f_Y(x-2) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x-2}{3}}, & x \geq 2 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

Άρα $f_X(x) = f(x)$ και πράγματι $X = Y+2$

Άρα $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = E\left(e^{t(Y+2)}\right) = E\left(e^{2t}e^{tY}\right) = e^{2t}M_Y(t) =$

$$= e^{2t}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-t} = \frac{e^{2t}}{1-3t}$$

για εύρεση σ.π.π. ξεκινώντας από σ.κ.

* ή $F_X(x) = P(X \leq x) = P(Y+2 \leq x) = P(Y \leq x-2) = F_Y(x-2)$

* $\overset{\text{παραγ}}{\Longrightarrow} f_X(x) = f_Y(x-2)$

β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολ. ανεξ. τ.μ. με $E(X_n) = 2n$ και $Var(X_n) \leq c$, όπου $0 < c < +\infty$. Αν ο $\overline{X}_n$ είναι δ.μ. (δειγματικός μέσος) νδο $\overline{X}_n - n \xrightarrow{P} 1$

Θέλουμε ΝΔΟ $\overline{X}_n - n \xrightarrow{P} 1$

$\forall \varepsilon > 0 \qquad P\left[\,|(\overline{X}_n - n) - 1| > \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$E(\overline{X}_n) = \frac{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2i = \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} =$$
$= n+1$

Δηλ. ΘΝΔΟ $\forall \varepsilon > 0 \quad P\left[\overline{X}_n - E(\overline{X}_n) > \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ * $\boxed{\text{με τετράγωνο}}$ *

$$P\left[\,|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| > \varepsilon\right] \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{Var\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot c}{\varepsilon^2} = \frac{c}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\varepsilon^2,\ \varepsilon \text{ σταθ})$$

SOS ροπογεν., συγκλ. SOS

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μάθημα 2ο
9/1/2015

① Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθ. αιτμ όπου $X_n \sim Bin(2, \frac{1}{2})$.
1. Να υπολ. η σ.π. της $Y_n = X_n \cdot X_{n+1}$, $\forall n \geq 1$
2. Μελετήστε την ανεξαρτ. των Y_n και Y_m $(n \leq m)$ $n, m \in \mathbb{N}$
3. Υπολογ. την συνδιακύμανση $Cov(Y_n, Y_m)$ για $n \leq m$.

Λύση

1. $X \sim Bin(n, p)$ τότε $x \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$E(x) = n \cdot p$, $Var(x) = np(1-p)$

$X_n \sim Bin(2, \frac{1}{2})$, $X \in \{0, 1, 2\}$ $\quad P(X_n = 0) = \frac{1}{4}$

$P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$

$P(X_n = 2) = \frac{1}{4}$

$X_n, X_{n+1} \in \{0, 1, 2\} \Longrightarrow Y_n \in \{0, 1, 2, 4\}$

$$P(Y_n = 1) = P(X_n \cdot X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1) \cdot P(X_{n+1} = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P(Y_n = 2) = P(X_n \cdot X_{n+1} = 2) = P(X_n = 1, X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2, X_{n+1} = 1) = 2P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y_n = 4) = P(X_n \cdot X_{n+1} = 4) = P(X_n = 2, X_{n+1} = 2) = P(X_n = 2) \cdot P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{16}$$

$$P(Y_n = 0) = 1 - \left(P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2) + P(Y_n = 4)\right) = \frac{7}{16}$$

$$P(Y_n = y) = \begin{cases} 7/16 & y=0 \\ 1/4 & y=1 \\ 1/4 & y=2 \\ 1/16 & y=4 \end{cases}$$

(εναλλακτική εύρεση της $P(Y_n=0)$)

Αν θέσω $(Y_n=0)$: $P(Y_n=0) = P(X_n \cdot X_{n+1}=0) =$

$= P(\{X_n=0\} \cup \{X_{n+1}=0\}) = P(X_n=0) + P(X_{n+1}=0) -$

$- P(X_n=0, X_{n+1}=0)$

2. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις α) $n=m$

β) $m=n+1$

γ) $m \geq n+2$

α) $P(Y_n=1, Y_m=1) = P(Y_n=1, Y_n=1) = P(Y_n=1) = \frac{1}{4}$

$\neq P(Y_n=1) \cdot P(Y_n=1) = \frac{1}{16}$

Άρα Y_n εξαρτημένη με τον εαυτό της.

β) $P(Y_n=1, Y_{n+1}=1) = P(X_n \cdot X_{n+1}=1, X_{n+1} \cdot X_{n+2}=1) =$

$= P(\{X_n=1, X_{n+1}=1\} \cap \{X_{n+1}=1, X_{n+2}=1\})$

$= P(X_n=1, X_{n+1}=1, X_{n+2}=1) =$

$\overset{\text{ανεξ. δμων.}}{=} P(X_n=1) \cdot P(X_{n+1}=1) \cdot P(X_{n+2}=1) =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \neq P(Y_n=1) \cdot P(Y_{n+1}=1) = \frac{1}{16}$

Άρα Y_n, Y_{n+1} εξαρτημένες.

γ) $Y_n = X_n \cdot X_{n+1} = g(X_n, X_{n+1})$

$Y_m = X_m \cdot X_{m+1} = g(X_m, X_{m+1}) = h(X_{n+2}, X \ldots, X_{m+1})$

Αφού η X_n είναι ακολουθία ατμ. έχουμε ότι το

$(X_n, X_{n+1}) \perp\!\!\!\perp (X_{n+2}, \ldots, X_{m+1})$

$\Rightarrow g(X_n, X_{n+1}) \perp\!\!\!\perp h(X_{n+2} \ldots X_{m+1}) \Rightarrow$

$X_n \perp\!\!\!\perp Y_m$

3. Για (γ): Ανεξάρτητες $\Rightarrow$ Ασυσχέτιστες $(Cov = 0)$

Για (β) $Cov(Y_n, Y_{n+1}) = Cov(X_n \cdot X_{n+1}, X_{n+1} \cdot X_{n+2}) =$

$= E[X_n \cdot X_{n+1}^2 \cdot X_{n+2}] - E[X_n \cdot X_{n+1}] \cdot E(X_{n+1}, X_{n+2}) =$

$= E(X_n) \cdot E(X_{n+1}^2) \cdot E(X_{n+2}) - E(X_n) \cdot E^2(X_{n+1}) \cdot E(X_{n+2})$

Όμως $X_i \sim Bin(2, \frac{1}{2}) \Rightarrow E(X_i) = 1 \quad Var(X_i) = \frac{1}{2}, \quad i \in \{n, n+1, n+2\}$

Άρα $E(X_{n+2}) = 1$

Άρα $Cov(Y_n, Y_{n+1}) = E(X_{n+1}^2) - 1 = Var(X_{n+1}) + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{E^2(X_{n+1})}} - 1 = \frac{1}{2}$

γ) $Cov(Y_n, Y_n) = Var(Y_n) = E(Y_n^2) - E^2(Y_n) = E(X_n^2 X_{n+1}^2) - E^2(X_n X_{n+1})$

$= E(X_n^2) \cdot E(X_{n+1}^2) - E^2(X_n) \cdot E^2(X_{n+1}) = V_0 =$

$= (Var(X_n) + E^2(X_n))^2$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$

③ Έστω Y μια θετική συνεχής τ.μ. Αν $X=\log Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ τότε λέμε ότι η $Y \sim \log N(\mu,\sigma^2)$ (ακολουθεί τη λογαριθμική κατανομή) με παραμέτρους μ,σ^2.

(i) Να βρεθούν $E(Y^k)$, $k=1,2,\dots$

(ii) Να προσδιοριστεί η κατανομή του γινομένου $Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n$ όπου $Y_1,\dots,Y_n$ ανεξαρτ. και $Y_i \sim \log N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $i=1,2,\dots,n$

Δίνεται η ροπογεννήτρια $N(\mu,\sigma^2) \longrightarrow e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}$

Λύση

(i) Α' Τρόπος: $E(Y^k)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y^k \cdot \underbrace{f_X(y)}_{\text{εύρεση}}\,dy$

Β' Τρόπος: (Αλλαγή μτβλ)

Να εκφράσουμε την Y ως συναρτ. της X

$X=\log Y \Rightarrow Y=e^X$

$$\left.\begin{aligned} &E(Y^k)=E\left[(e^X)^k\right]=E\left[e^{kX}\right]=M_X(k) \\ &\text{όπου από Υποθ. } M_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2} \end{aligned}\right\} \quad E(Y^k)=M_X(k)=e^{\mu k+\frac{\sigma^2}{2}k^2}$$

Α' Τρόπος: $X=\log Y \Rightarrow Y=e^X$ Άρα $Y=g(X)$ $g(x)=e^x$

$y=e^x \Rightarrow x=\log y=g^{-1}(y)$

- $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}\right| = f_X(\log y)\cdot\frac{1}{y}$ $\quad y>0$

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log y-\mu}{\sigma}\right)^2}, & y>0\\ 0, & \text{διαφ.}\end{cases}$$

$\Longrightarrow$

ή $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{X} \le y) = P(X \le \log y) = F_X(\log y)$

$f_Y(y) = F'_X(\log x) \cdot \log' y = f_X \cdot (\log y) \cdot \frac{1}{y}$

$$E(Y^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^k f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} Y^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \frac{1}{y} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right)^2} dy \overset{u=\log Y}{=} \dots$$

(ii) Θέτω $Z = Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n \Rightarrow \log Z = \log Y_1 + \log Y_2 \cdots + \log Y_n$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$: ανεξ. $\rightarrow$ $\underline{\log Y_1, \log Y_2 \ \cdots}$ ανεξάρτητες

$Y_i \sim \log N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \underline{\log Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)}$ $\Big\} \Rightarrow$

Αθρ. ανεξ. κατανομ.

$\Rightarrow \log Z = \sum_1^n \log Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\underline{\mu = \sum \mu_i}$ $\underline{\sigma^2 = \sum \sigma_i^2}$ ως άθροισμα ανεξ. κανον. τ.μ.

$\Rightarrow Z \sim \log N(\mu, \sigma^2)$

④ Ένας δρομέας των 100m πρόκειται να τρέξει στην $6^{η}$ λωρίδα ενός στίβου με 9 λωρίδες.
Αν γνωρίζει ότι στον αγώνα παίρνουν μέρος εκτός από αυτόν άλλοι 4 αθλητές, οι οποίοι τοποθετούνται εντελώς τυχαία στις 8 υπόλοιπες λωρίδες, ποια είναι η πιθανότητα να μην τρέχει δίπλα του (σε γειτονική λωρίδα) κανένας αντίπαλος.

Λύση

A: "να μην τρέχει δίπλα στον αθλητή που είναι στην $\overset{5^{η}\ \ 7^{η}}{6^{η}}$ λωρίδα, κάποιος από τους άλλους 4". =

= "Οι 4 αθλητές να τοποθετηθούν στις λωρίδες $\{1,2,3,4,8,9\}$".

• Κάθε τοποθέτηση 4 αθλητών σε λωρίδες αντιστοιχεί σε μια επιλογή 4 στοιχείων από $\{1,2,3,4,8,9\}$

Ω = "σύνολο όλων των δυνατών τοποθετήσεων των 4 αθλητών σε 8 λωρίδες"

Έχουμε ισοπιθαν. δ.σ. άρα κλασσ. πιθανότητα.

σειρά : ΟΧΙ (δεν με ενδιαφέρει ποιος θα πάει πού)

επαναθ : ΟΧΙ (το πολύ ένας σε 1 λωρίδα)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{8}{4}} = \dots = \frac{3}{14} \quad \blacksquare$$

② Πραγματοποιούμε μια ακολουθία ανεξ. ρίψεων ενός τίμιου ζαριού και έστω X: #ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για 1η φορά η ένδειξη "2" ή "5".
Στην συνέχεια από μία κάλπη που περιέχει 6 κόκκινα και 4 μπλε σφαιρίδια επιλέγουμε τυχαία με επανάθεση X σφαιρίδια και έστω Y: # κόκκινα σφαιρ. που επιλ.
Να υπολογ $P(Y=1)$.

Θ.Ο.Π.

$$P(Y=1) = \sum_{x=1}^{+\infty} P(X=x)\, P(Y=1 \mid X=x) \quad ①$$

X: # δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία σε ανεξ. δοκιμ. $Be\left(\frac{1}{3}\right)$
όπου η επιτυχία : "2 ή 5 σε μία ζαριά".

$$P(\text{'επιτυχίας'}) : \frac{\#\text{ ευνοϊκ.}}{\#\text{ δυνατών}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Άρα έχω $Be\left(\frac{1}{3}\right)$ άρα $X \sim Geom\left(\frac{1}{3}\right)$

Άρα $P(X=x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \quad x = 1, 2, \ldots \quad ②$

$[Y \mid X=x]$ = # επιτυχ. σε x-ανεξ. δοκ. $Be\left(\frac{3}{5}\right)$
όπου επιτυχία : "η επιλογή κοκκ σφαιρ. σε μία επιλογή σφαιρίδ. μέσα από την κάλπη".

$$P(\text{"επιτυχ."}) = \frac{\#\text{ ευνοϊκων}}{\#\text{ δυνατών}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

→

$$[Y|X=x] \sim Bin\left(X, \frac{3}{5}\right)$$

$$P(Y=1|X=x) = \binom{x}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(1-\frac{3}{5}\right)^{x-1} \quad ③$$

$$P(Y=1) = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\binom{x}{1}\,\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \frac{1}{5}\sum x\left(\frac{4}{15}\right)^{x-1}$$

α' τρόπος : Παραγώγιση γεωμ. σειράς.

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \lambda^x \overset{|\lambda|<1}{=} \frac{1}{1-\lambda} \overset{\partial/\partial\lambda}{=} \sum_{x=1}^{+\infty} x\cdot\lambda^{x-1} = \frac{1}{(1-\lambda)^2}$$

Άρα για $\lambda = \frac{4}{15}$

$$\sum x\left(\frac{4}{15}\right)^{x-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{4}{15}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{11}{15}\right)^2} = \frac{15^2}{11^2}$$

$$\Rightarrow P(Y=1) = \frac{1}{5} \times \frac{15}{11} \times \frac{15}{11} = \frac{45}{121}$$

β' τρόπος :

$$\frac{1}{5}\sum_{x=1}^{+\infty} x\left(\frac{4}{15}\right)^{x-1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{15}{11}\cdot\underbrace{\sum x\cdot\frac{11}{15}\cdot\left(\frac{4}{15}\right)^{x-1}}_{E\left(Geom\left(\frac{11}{15}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{15}{11}\cdot\frac{15}{11} = \frac{45}{121}$$

* $E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \qquad X \sim Geom(p)$ ■

ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Μάθημα 3ο

12/1/2015

① Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{49}$ ανεξ + ισον. τμ $X \sim Unif(0,1)$

Θέτουμε: $T_i = -2\ln X_i \quad i=1,2,\dots,49$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμα:

$S_{49} = \sum_{i=1}^{49} T_i$ να είναι τουλ. 70.

Λύση

$$P(S_{49} \geq 70)$$

Έχουμε $S_{49} = \sum_{i=1}^{49} T_i$ άρα ένα άθροισμα ανεξ + ισον. τ.μ. αφού $T_i = -2\ln(x_i) = g(x_i)$ για $i=1,2,\dots,49$ και οι $\{X_i\}_1^{49}$ είναι ανεξ. και ισόνομες

Εφαρμογή Κ.Ο.Θ. $(0<\sigma<+\infty)$

i) $\sqrt{n} \cdot \dfrac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

ii) $\dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

Αν θέσουμε $E(T_i) = \mu$ κ' $Var(T_i) = \sigma^2 \quad i=1,\dots,49$ τότε

$$\frac{S_{49} - 49\mu}{\sqrt{49} \cdot \sigma} \approx N(0,1) \quad (1)$$

$$P(S_{49} \geq 70) = P\left(\frac{S_{49} - 49\mu}{7 \cdot \sigma} \geq \frac{70 - 49\mu}{7 \cdot \sigma}\right) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow P\left(Z \geq \frac{70 - 49\mu}{7 \cdot \sigma}\right) \text{ όπου } Z \sim N(0,1)$$

$$1 - P\left(Z < \frac{70-49\mu}{7\cdot\sigma}\right) \overset{Z\sim N(0,1)}{\underset{\text{συνεχ.}}{=\!=\!=}} 1 - P\left(Z \leq \frac{70-49\mu}{7\cdot\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{70-49\mu}{7\cdot\sigma}\right), \text{ όπου } \Phi \text{ σ.κ. της } N(0,1)$$

$$= \Phi\left(\frac{49\mu-70}{7\cdot\sigma}\right), \text{ όπου } 1-\Phi(x) = \Phi(-x)$$

$$T_i = -2\ln X_i = g(X_i)$$

$1^{\underline{os}}$ Τρόπος: $E(T_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_T(x)\, dx$

$2^{\underline{os}}$ Τρόπος: $E(T_i) = E(g(X_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$

$1^{\underline{os}}$ Τρόπος: (για την πυκνότητα)

A' τρόπος: Αν g παραγ. και αντιστρεψ. $T_i = g(X_i)$

$$f_{T_i}(x) = f_{X_i}(g^{-1}(x)) \left| \frac{d g^{-1}(x)}{dx} \right|$$

B' τρόπος: $F_{T_i}(x) = P(T_i \leq x) \overset{x>0}{=\!=\!=} P(-2\ln X_i \leq x) =$

$$= P\left(\ln X_i \geq -\frac{x}{2}\right) = P(X_i \geq e^{-x/2}) =$$

$X_i \sim U(0,1)$

$$= 1 - P(X_i < e^{-x/2}) =$$

$\Rightarrow T_i > 0$ με πιθ. 1

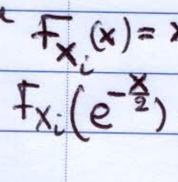
$$\overset{X_i \text{ συνεχ.}}{=} 1 - P(X_i \leq e^{-x/2}) =$$

$x > 0$

$$= 1 - F_{X_i}(e^{-x/2}) \overset{(*)}{=}$$

Ομοιομ. σ.κ.

$$= 1 - e^{-x/2}$$



(*)

$$\Rightarrow f_{T_i}(x) = F'_{T_i}(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \quad (\theta \cdot e^{-\theta x}, \exp(\theta))$$

άρα $F_{X_i}(x) = x$, $0<x<1$

Άρα $T_i \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow F_{X_i}(e^{-\frac{x}{2}}) = e^{-\frac{x}{2}}$

Γενικότερα,
αν $X \sim Gamma(\alpha,\theta) \Rightarrow E(X)=\frac{\alpha}{\theta}$, $Var(X)=\frac{\alpha}{\theta^2}$
[Για $\alpha=1$, εκθετική].

* Θυμόμαστε ότι αν $X \sim exp(\theta)$ $\theta>0$, τότε $E(X)=\frac{1}{\theta}$ $Var(X)=\frac{1}{\theta^2}$

στις διακριτές $X \sim Geom(p)$ $E(X)=\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p^2}(1-p)$

$E(T_i)=2$, $Var(T_i)=4$

$\mu=2$, $\sigma^2=4 \Rightarrow \sigma=2$

Άρα $P(S_{49} \geq 70) \cong \Phi\left(\frac{49\cdot 2-70}{7\cdot 2}\right)=\Phi(2)$

(3) ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Από μια κάλπη που περιέχει 50 διακεκριμένα σφαιρίδια που φέρνουν τους αριθμούς από 1 μέχρι 50, επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο. Έστω N η τ.μ. που αντιστοιχεί στον αριθμό του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι N φορές.
Έστω $X=$ #ρίψεων που εμφανισαν "6".
Να υπολογιστούν:

(α) $P(N=n, X=x)$ $n=1,2,\ldots,50$ $x=0,1,\ldots,n$

(β) $P(X=0)$

(γ) $P(N=n|X=0)$ $n=1,2,\ldots,50$

(δ) $E[X|N=n]$ $n=1,2,\ldots,50$

(ε) $E(X)$

Λύση

(α)

$$P(N=n, X=x) = P(N=n)\cdot P(X=x \mid N=n) \quad ①$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Πολλαπλ. νόμος} \\ P(AB) = P(A)\cdot P(B|A)\end{array}\right)$

$N \sim d.\,Unif(50) \quad N \in \{1, 2, \ldots, 50\}$

$$P(N=n) = \frac{1}{50} \quad n = 1 \cdots 50 \quad ②$$

$[X|N=n]$ = # επιτυχιών **σε** n ανεξ. δοκιμ. $Be\left(\frac{1}{6}\right)$

όπου επιτυχ: "να εμφανιστεί 6 σε μια ζαριά"

$$P(\text{επιτ.}) = \frac{\#\,\text{ευνοϊκών}}{\#\,\text{δυνατων}} = \frac{1}{6}$$

$$[X|N=n] \sim Bin\left(n, p=\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X=x \mid N=n) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n \quad ③$$

$$②, ③ \longrightarrow ① \quad P(N=n, X=x) = \frac{1}{50}\binom{n}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, \ldots, 50 \\ x = 0 \cdots n \end{array}$$

(β) $P(X=0) \Longrightarrow$ περιθ. συναρτ. μιας διακριτ.

$$P(X=0) = \sum_{n=1}^{50} P(N=n, X=0) = \sum_{n=1}^{50}\frac{1}{50}\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{50}\sum_{n=1}^{50}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{50}\cdot\frac{5}{6}\cdot\sum_{n=0}^{49}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{50}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}\right)}{1-\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{5}{50\cdot 6}\cdot\frac{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}\right)}{1/6} = \frac{1}{10}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}\right]$$

γ) $P(N=n \mid X=0)$

<u>1ος Τρόπος</u> : $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(N=n \mid X=0) = \frac{P(N=n, X=0)}{P(X=0)} = \frac{\frac{1}{50}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{10}\cdot\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}\right]} = \dots$$

<u>2ος Τρόπος</u> : Bayes $P(A \mid B) = \dfrac{P(A)\cdot P(B \mid A)}{P(B)}$

$$P(N=n \mid X=0) = \frac{P(N=n)\cdot P(X=0 \mid N=n)}{P(X=0)}$$

$$(X \mid N=n) \sim Bin\left(n, \frac{1}{6}\right)$$

δ) $[X \mid N=n] \sim Bin\left(n, \frac{1}{6}\right)$ Αν $Y \sim Bin(n,p) \Rightarrow E(Y) = np$.

<u>Άρα</u> $E(X \mid N=n) = n\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{n}{6}$

ε) $E(X) = ?$ Θεωρ. διπλής μ.τ.

$$E(X) = E\Big(\underbrace{E(X \mid N)}_{g(N)}\Big)$$

α' τρόπος : $E(E(X \mid N)) = \sum_{1}^{50} P(N=n)\, E(X \mid N=n)$

β' τρόπος : $E(X \mid N=n) = \dfrac{n}{6} \Rightarrow E(X \mid N) = \dfrac{N}{6}$

$$E(X) = E\big((X \mid N)\big) = E\left(\frac{N}{6}\right) = \frac{1}{6}\, E(N) = \frac{1}{6}\cdot\frac{51}{2} = \frac{17}{4}$$

$N \sim d.Unif(n) \Rightarrow E(X) = \dfrac{n+1}{2}$
$\{1, 2, \dots, n\}$

με ορισμό ~~α' τρόπος~~: $\sum_{1}^{50} \dfrac{1}{50}\cdot\dfrac{n}{6} = \dfrac{1}{50\cdot 6}\cdot\dfrac{50\cdot 51}{2} = \dots$

④ ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Σε ένα διαγώνισμα πολ/πλής επιλογής, για κάθε ερώτηση προτείνονται 5 απαντήσεις από τις οποίες η μία είναι σωστή. Κάθε σωστή απάντηση παίρνει +1 και κάθε λάθος παίρνει x $(x<0)$. Ένας μαθητής που λύνει τα θέματα γνωρίζει την απάντηση σε μία τυχαία ερώτηση με πιθ. p. και δεν έχει ιδέα για την απάντηση με πιθ. $1-p$. Ο μαθητής ακολουθεί την στρατηγική να επιλέγει εντελώς στην τύχη όταν δεν έχει ιδέα για τη σωστή απάντηση.

(α) Αν σε μία ερώτηση έχει δώσει σωστή απάντηση, ποια η πιθ. να την γνώριζε?

(β) Ποιο θα πρέπει να είναι το ποσό της ποινής X εαν επιθυμούμε ο μαθητής να έχει αναμενόμενη βαθμολογία σε τυχαία ερώτηση $= p$

Έστω Γ: "ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση"
Σ: "ο -"- απαντά σωστά στην ερώτηση"

Δεδομένα: $P(\Gamma)=p$, $P(\Gamma^c)=1-p$, $P(\Sigma|\Gamma^c)=\frac{1}{5}$

(α) $$P(\Gamma|\Sigma) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(\Gamma)\,P(\Sigma|\Gamma)}{P(\Sigma)} = \frac{P(\Gamma)\cdot P(\Sigma|\Gamma)}{P(\Gamma)\cdot P(\Sigma|\Gamma)+P(\Gamma^c)\cdot P(\Sigma|\Gamma^c)}$$

$$= \frac{P\cdot 1}{P+(1-P)\cdot\frac{1}{5}} = \frac{5P}{5P+(1-P)} = \frac{5P}{4P+1}$$

(β) Έστω X = "βαθμός μαθητή στην ερώτηση"

$$X=\begin{cases} +1 & \text{με πιθ. } P(\Sigma) \\ x & \text{με πιθ. } 1-P(\Sigma) \end{cases}$$

→

$$E(x) = p \Leftrightarrow 1 \cdot P(\Sigma) + x(1 - P(\Sigma)) = P$$

Όμως : $P(\Sigma) \overset{\text{θ.ο.π}}{=} P(\Gamma) \cdot P(\Sigma|\Gamma) + P(\Gamma^c) \cdot P(\Sigma|\Gamma^c) = P + \dfrac{1-P}{5}$

$$E(x) = P \Leftrightarrow P + \frac{1-P}{5} + x\left(1 - P - \frac{1+P}{5}\right) = P$$

$$\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

② ΘΕΜΑ

Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανά δύο ασυσχέτιστων τ.μ. με $E(X_n) = 4n$, $Var(X_n) = \dfrac{1}{3^n}$. Αν : $\overline{X}_n$ είναι ο δειγματικός μέσος των $X_1, \ldots, X_n$

<u>ΝΔΟ</u> : $\overline{X}_n - 2n \xrightarrow{P} 2$ (συγκλίνει στοχαστικά)

ή κατά πιθανότητα

<u>Λύση</u>

ΘΝΔΟ :

$$\overline{X}_n - 2n \xrightarrow{P} 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P\left[|\overline{X}_n - 2n - 2| > \varepsilon\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(Αν $(2n+2) \overset{n}{=}$ μέση τιμή τότε μπορώ να εφαρμόσω Chebyshev)

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{\sum_1^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n E(x_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n 4i = \frac{4}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2(n+1)$$

ΘΝΔΟ : $\forall \varepsilon > 0 \quad P\left[|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| > \varepsilon\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Chebyshev

Έχουμε: $P\left[\,|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \varepsilon\right] \leq \dfrac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$ (1)

! Chebyshev: Για οποιαδήποτε τ.μ. με $E(x) < +\infty$ τότε $P\left[\,|x - E(x)| > \varepsilon\right] \leq \dfrac{Var(x)}{\varepsilon^2}$

$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{\sum_1^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot Var\left(\sum_1^n x_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_1^n Var(x_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(x_i, x_j)\right)$$

ανά δύο ασυσχέτιστες

x_i, x_j ασυσχ.

$i \neq j \rightarrow$ συνδ$=0$.

$$= \frac{1}{n^2}\sum_1^n Var(x_i) \quad (2)$$

$$P\left[\,|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{n^2 \cdot \varepsilon^2}\sum_1^n Var(x_i) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^i \leq$$

$$\leq \frac{\sum_1^n 1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\cdot\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

Θέλω να φτάσω σε κάτι μικρότερο από n^2 για να $\rightarrow 0$

∎

4ο Μάθημα Ασκήσεων

ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

(1) α) Κατασκευάζουμε εναν 15-ψήφιο αριθμό που το κάθε ψηφίο του επιλέγεται ανεξάρτητα από την ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1,2,\ldots,9\}$
Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το ψηφίο 8 ακριβώς 3 φορές και μάλιστα σε διαδοχικές θέσεις;

β) Από ένα κουτί που περιέχει 3 κόκκινες, 3 μαύρες και 4 ασπρ. μπάλες εξάγουμε διαδοχικά με επανάθεση μια μπάλα κάθε φορά.
(i) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός εξαγωγών (δοκιμών) μέχρι να εμφανιστεί για 1η φορά κόκκινη μπάλα;
(ii) Ίδια ερώτηση αλλά για να εμφανιστούν και τα 2 χρώματα, κόκκινο και μαύρο.

Λύση

Έστω X η πολυδιάστατη τ.μ. που εκφράζει την επιλογή του 15ψήφιου αριθμού.
Τότε $X=(X_1, X_2, \ldots, X_{15})$, όπου X_i η τ.μ. που εκφράζει την επιλογή του i-ψηφίου, $i=1,2,\ldots,15$

α' τρόπος: Έστω $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{15}) \in \{1,2,\ldots,9\}^{15}$

Τότε $P(X=x) = P(X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_{15}=x_{15}) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^{15} P(X_i=x_i)$

$= \left(\frac{1}{9}\right)^{15}$, αφού $X_i \sim$ discrete. Uniform (9), αφού

$P(X_i=x_i)=\frac{1}{9}$

<u>Άρα</u> μπορούμε να πάρουμε $\underline{\Omega} = \{1, 2, \dots, 9\}^{15}$ και όλα τα δ.σ. είναι ισοπίθανα λόγω της παραπάνω σχέσης

A : "εμφανίζεται το ψηφίο 8 ακριβώς 3 φορές σε διαδοχικές θέσεις".

Ζητείται η P(A). Λόγω πεπερασμ. δ.χ. και ισοπίθανων δ.σ. έχουμε:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\underline{\Omega}|}$$

$|\underline{\Omega}| = 9^{15}$ (επαναληπτικές διατάξεις των $\overset{n}{\overset{\shortparallel}{9}}$ ανα $\overset{k}{\overset{\shortparallel}{15}}$) $(n^k = 9^{15})$

$$A = \bigcup_{i=1}^{13} A_i \quad ,\text{όπου}$$

A_i = "εμφανίζεται το ψηφίο 8 στις θέσεις $i, i+1, i+2$, και τα υπόλοιπα δεν είναι 8".

Τότε τα A_i είναι προφανώς ξένα μεταξύ τους και

$$|A| = \sum_{i=1}^{13} |A_i|$$

<u>Πολ/κή αρχή</u>: $|A_i| = \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{\# τρόπων που βάζουμε 8 στις θέσεις } i,\, i+1,\, i+2}}{1} \times \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{\# τρόπων που μπορώ να συμπληρώσω 12 θέσεις με στοιχεία διαφορετικά του 8.}}}{8^{12}}$

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{13 \times 8^{12}}{9^{15}}}$$

β' Τρόπος

$$P(A) = \sum_{i=1}^{13} P\left(X_i = 8,\ X_{i+1} = 8,\ X_{i+2} = 8,\ X_j \neq 8,\ j \in \{1,2,\dots,15\} \setminus \{i, i+1, i+2\}\right)$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} \sum_{i=1}^{13} P(X_i = 8) \cdot P(X_{i+1} = 8) \cdot P(X_{i+2} = 8) \prod_{\substack{j \in \\ \{1,2,\dots,15\} \\ \setminus \{i, i+1, i+2\}}} P(X_j \neq 8) =$$

$$\overset{X_i \sim \text{discr. Unif}(9)}{=} \sum_{i=1}^{13} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^{12} = \boxed{13 \cdot \frac{8^{12}}{9^{15}}}$$

αφού $P(X_i = 8) = P(X_{i+1} = 8) = P(X_{i+2} = 8) = \frac{1}{9}$

και $P(X_j \neq 8) = 1 - P(X_j = 8) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

β) Έστω X = # εξαγωγών (δοκιμών) μέχρι να εμφανιστεί για $1^{η}$ φορά κόκκινη μπάλα.

Ζητούμε, δηλ, $E(X)$

X = # δοκιμών μέχρι $1^{η}$ επιτυχία σε ανεξ. δοκιμές $Be(\ )$.
όπου επιτυχία : "εξαγωγή κόκκινης μπάλας σε 1 επιλογή μπάλας από το κουτί". και $\Longrightarrow$

και $P(\text{"επιτυχία"}) = \dfrac{\#\,\text{ευνοϊκών}}{\#\,\text{δυνατών}} = \dfrac{3}{10}$

Άρα $X \sim Geo\left(\frac{3}{10}\right)$ και $E(X) = \frac{10}{3}$, αφού αν $X \sim Geo(p)$ στο $1,2,\dots$ τότε $E(X) = \dfrac{1}{p}$

(ii) Έστω Y = # εξαγωγών μέχρι να εμφανιστούν για 1η φορά και τα 2 χρώματα στις μπάλες, κόκκινο και μαύρο.

Έστω Y_1 = # εξαγωγών μέχρι να εμφανιστεί κάποιο χρώμα μπάλας από τα 2 (κόκκινο ή μαύρο)

Θέτω $Y_2 = Y - Y_1$

Τότε:

Y_2 = # εξαγωγών που υπολείπονται μετά την εμφάνιση του 1ου χρώματος, για να εμφανιστεί και το 2ο.

Τότε: $Y = Y_1 + Y_2$

Y_1 = # δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία σε ανεξ. δοκιμές $Be\left(\frac{6}{10}\right)$

επιτυχία: "εμφανίζεται μαύρη ή κόκκινη μπάλα σε 1 εξαγωγή μπάλας από το κουτί".

και $P(\text{"επιτυχίας"}) = \dfrac{\#\,\text{ευνοϊκών}}{\#\,\text{δυνατών}} = \dfrac{3+3}{10} = \dfrac{6}{10}$

Άρα $Y_1 \sim Geo\left(\frac{6}{10}\right)$

Y_2 = # δοκιμών μέχρι $1^{η}$ επιτυχία σε ανεξ. δοκιμές $Be(\ )$

όπου επιτυχία "εμφανίζεται η μπάλα του χρώματος που υπολείπεται σε 1 εξαγωγή μπάλας από το κουτί".

και $P(\text{"επιτυχία"}) = \dfrac{\#\ \text{ευνοϊκών}}{\#\ \text{δυνατών}} = \dfrac{3}{10}$

διότι ανεξάρτητα από το $1^{ο}$ χρώμα που εμφανίστηκε αυτό που μένει έχει 3 επιλογές.

Τότε $Y = Y_1 + Y_2$

Y_1 = # δοκιμών μέχρι $1^{η}$ επιτυχία σε ανεξ. δοκιμές $Be\left(\frac{6}{10}\right)$

$Y_2 \sim Geo\left(\frac{3}{10}\right)$

Άρα $Y = Y_1 + Y_2 \longrightarrow E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = \dfrac{10}{6} + \dfrac{10}{3}$

② Άσκηση

Ο αριθμός των περαστικών που περνάνε έξω από μία τράπεζα σε 1 μέρα ακολουθεί την κατανομή Poisson (θ), $\theta > 0$. Κάθε περαστικός μπαίνει μέσα στην τράπεζα (ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους) με πιθανότητα p, $0<p<1$.
Ποια είναι η πιθαν. σε 1 μέρα να μπουν μέσα στην τράπεζα n-πελάτες $n=0,1,2,\ldots$

Λύση

Έστω X = # περαστικών που περνάνε έξω από την τράπεζα σε 1 μέρα.

Y = # περαστικών που τελικά μπαίνουν μέσα στην τράπεζα σε 1 μέρα.

Ζητείται $P(Y=n)$, $n=0,1,2,\ldots$

$$P(Y=n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k)\,P(Y=n \mid X=k)$$

→ Προσοχή!

αφού ~~[illegible]~~ για να μπουν n-περαστικοί πρέπει να περάσουν από την τράπεζα τουλ. n. $\left(\text{δηλ. } Y=n \Rightarrow X \geq n\right)$

$$X \sim \text{Poisson}(\theta) \Longrightarrow P(X=k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

$[Y \mid X=k]$

$X \sim Poisson(\theta) \Rightarrow P(X=\kappa) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^\kappa}{\kappa!}, \kappa = 0,1,2,\ldots$

$[Y | X=\kappa] =$ # επιτυχιών σε κ ανεξ. δοκιμές $Be(p)$.

$\left[\sum_{i=1}^{\kappa} Y_i \ , Y_i \sim Be(p)\text{, ανεξαρτ.}\right]$

Άρα $[Y|X=\kappa] \sim Bin(\kappa, p)$ $\quad Y_i = \begin{cases} 1 & \text{, με πιθ. } p \\ 0 & \text{, με πιθ. } 1-p \end{cases}$

Επομένως $P(Y=n | X=\kappa) = \binom{\kappa}{n} p^n (1-p)^{\kappa-n}, \ n = 0,1,\ldots,\kappa$

$$P(Y=n) = \sum_{\kappa=n}^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^\kappa}{\kappa!} \binom{\kappa}{n} p^n (1-p)^{\kappa-n} =$$

$$= e^{-\theta} \cdot \theta^n \cdot p^n \cdot \sum_{\kappa=n}^{+\infty} \frac{\kappa!}{\kappa!\, n!\, (\kappa-n)!} [\theta \cdot (1-p)]^{\kappa-n} =$$

$$= e^{-\theta} \cdot \frac{(\theta p)^n}{n!} \cdot \sum_{\kappa=n}^{+\infty} \frac{[\theta(1-p)]^{\kappa-n}}{(\kappa-n)!} =$$

$$= e^{-\theta} \frac{(\theta p)^n}{n!} \cdot \sum_{\kappa=0}^{+\infty} \frac{[\theta(1-p)]^\kappa}{\kappa!} = e^{-\theta} \cdot e^{\theta(1-p)} \cdot \frac{(\theta p)^n}{n!} =$$

$$= e^{-\theta p} \cdot \frac{(\theta p)^n}{n!} \quad , n = 0,1,2,\ldots$$

β' Τρόπος: $Y = \sum_{i=1}^{X} Y_i$ (άθροισμα με τυχαίο πλήθος προσθεταίων), $Y_i \sim Be(p)$, $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ οικογ. ανεξ. τ.μ.

$P_Y(z) = P_X(P_{Y_i}(z))$

(Λύση ακριβώς ίδια όπως προηγ. θέμα εξετάσεων με "επιβίωση με αυγά εντόμων)

③ ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Έστω X (απόλυτα) συνεχής τ.μ. με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 1 \\ \frac{\alpha}{\lambda^\alpha}(x-1)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^\alpha} & , x > 1 \end{cases}$$

όπου $\alpha, \lambda > 0$ θεωρούμε την τ.μ. $Y = \left(\frac{X-1}{\lambda}\right)^\alpha$

(i) Να βρεθεί η σ.κ. της τ.μ. X.
(ii) Να βρεθούν η σ.κ. και η σ.π.π. της Y.
(iii) Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της Y.

Λύση

(i) Για $x \le 1$, $F_X(x) = 0$

Για $x > 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_X(t)}_{f(t)} dt = \int_1^x \frac{\alpha}{\lambda^\alpha}(t-1)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t-1}{\lambda}\right)^\alpha} dt$

Παραγωγίζω: $\left[e^{-\left(\frac{t-1}{\lambda}\right)^\alpha}\right]' = \frac{-1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha-1}}(t-1)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t-1}{\lambda}\right)^\alpha} =$

$$= -\frac{\alpha}{\lambda^\alpha}(t-1)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t-1}{\lambda}\right)^\alpha}$$

Άρα $F_X(x) = -\int_1^x \left(e^{-\left(\frac{t-1}{\lambda}\right)^\alpha}\right)' dt = -\left[e^{-\left(\frac{t-1}{\lambda}\right)^\alpha}\right]_1^x =$

$$= -\left(e^{-\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^{\alpha}} - 1\right) = 1 - e^{-\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^{\alpha}}$$

Τελικά: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^{\alpha}} & , x > 1 \end{cases}$

(ii) $Y = \left(\frac{X-1}{\lambda}\right)^{\alpha} = g(X)$, όπου $g(x) = \left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^{\alpha}$

Μάλιστα παρατηρούμε ότι το <u>στήριγμα</u> της X,

$S_X = (1, +\infty)$

<u>Άρα</u> $x > 1 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^{\alpha} = g(x) > 0$

<u>Άρα</u> $S_Y = g(S_X) = (0, +\infty)$

<u>Άρα</u> για $y \leq 0$, έχουμε $F_Y(y) = 0$.

Για $y > 0$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\left(\frac{X-1}{\lambda}\right)^{\alpha} \leq y\right)$ "$\boxed{1}$"

$$y = \left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^{\alpha} \Rightarrow y^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha} = \frac{x-1}{\lambda} \Rightarrow x = \lambda \cdot y^{\frac{1}{\alpha}} + 1$$

<u>Άρα</u> $x = g^{-1}(y) = \lambda \cdot y^{1/\alpha} + 1$

Από σχέση (1): $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$

$F_X(x) = 1 - e^{-g(x)}$

Τελικά, $F_Y(y) \overset{= F_X(g^{-1}(y))}{=} 1 - e^{-g(g^{-1}(y))} = 1 - e^{-y}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & , y \geq 0 \end{cases}$$

Για $y > 0$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = e^{-y}$, $y > 0$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ e^{-y} & , y > 0 \end{cases}$$

Άρα παρατηρούμε $Y \sim Exp(1)$

αφού αν $X \sim Exp(\theta)$, τότε $\overset{\sigma.\pi.\pi.}{f_X}(x) = \theta \cdot e^{-\theta x}$, $x > 0$.

iii) $Y \sim Exp(1)$

Αν $X \sim Exp(\theta) \Rightarrow E(x) = \frac{1}{\theta}$, $Var(x) = \frac{1}{\theta^2}$

Άρα $E(y) = Var(y) = 1$ ■