Στοχαστικός Λογισμός
Εργασία 1

Προθεσμία υποβολής: Πέμπτη 13 Νοεμβρίου 2014

1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A_0 \in \mathcal{F}$ με $\mu(A_0) > 0$.
(α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \mu(A \cap A_0)$$

είναι μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$. Αυτό το μέτρο ονομάζεται περιορισμός του μ στο A_0. Κανονικοποιώντας το (δηλαδή διαιρώντας το με την συνολική του μάζα) παίρνουμε το μέτρο πιθανότητας

$$\hat{\nu}(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{\mu(A \cap A_0)}{\mu(A_0)}.$$

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη με $\int |X| \, d\mu < \infty$ ή με $X \geq 0$ ισχύει ότι

$$\int X \, d\hat{\nu} = \frac{1}{\mu(A_0)} \int_{A_0} X \, d\mu.$$

2. (Αλλαγή μέτρου και δεσμευμένη μέση τιμή) Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και $f : \Omega \to (0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f) = 1$. Να δειχθεί ότι:
(α) Η συνάρτηση $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ με $\mathbf{Q}(A) := \int_A f \, d\mathbf{P} = \int f \mathbf{1}_A \, d\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας. [Γράφουμε $d\,\mathbf{Q} = f \, d\mathbf{P}$.]
(β) Για κάθε $X \geq 0$ τυχαία μεταβλητή ισχύει

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Xf).$$

Και για $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή, $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(|X|) < \infty \Leftrightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|X| f) < \infty$.
(γ) Για $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα και $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X \,|\, \mathcal{G}) = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Xf \,|\, \mathcal{G})}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f \,|\, \mathcal{G})}.$$

3. Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ με τις X_n να παίρνουν τιμές[1] στο $[0, M]$ για κάθε $n \geq 1$, όπου M είναι θετική σταθερά. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X_n X_{n-1} \cdots X_2 X_1) \geq \mathbf{E}(X_1^n).$$

4. Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε κοινό χώρο πιθανότητας και με τιμές στο $[0, \infty)$. Θέτουμε

$$S_0 := 0, \qquad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$
$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

για $n \geq 1$. Για $a > 0$ σταθερό θέτουμε $V := \sup\{n : S_n \leq a\}$. Να δειχθεί ότι ο χρόνος $T := V + 1$ είναι χρόνος στάσης ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

5. (Το πρόβλημα εξόδου για τον ασυμμετρικό τυχαίο περίπατο) Έστω $(S_n)_{n \geq 1}$ ο ασυμμετρικός τυχαίος περίπατος (Δείτε Παρατήρηση 3.19 στις σημειώσεις για τους ορισμούς και τον συμβολισμό). Υποθέτουμε ότι $p > q$ (και άρα $p > 1/2$). Για κάθε ακέραιο r, θέτουμε $T_r := \inf\{k \geq 0 : S_k = r\}$. Και έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $\phi(x) = (q/p)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

[1] Δηλαδή $X_n : \Omega \to [0, M]$.

(α) Για ακεραίους a, b με $a < 0 < b$, να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(T_a < T_b) = \frac{\phi(b) - \phi(0)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

[Σημείωση: Ξέρουμε ήδη από την Παρατήρηση 3.19 ότι $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$.]

(β) Για $a < 0$ ακέραιο, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T_a < \infty) = 1/\phi(a) < 1$.

(γ) Για $b > 0$ ακέραιο, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T_b < \infty) = 1$.

(δ) Για $b > 0$ ακέραιο, να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(T_b) = b/(p - q)$.

6. Έστω B τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι για κάθε $s, t \geq 0$ ισχύει ότι

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t.$$

7. Έστω B τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Για καθεμία από τις παρακάτω ανελίξεις

(α) $X_1(t) := \frac{1}{3} B_{3t}$,

(β) $X_2(t) := -\frac{1}{2} B_{4t}$,

(γ) $X_3(t) :=:= B_{2t} - B_t$,

(δ) $X_4(t) := \begin{cases} B_{t^2}/t & \text{αν } t > 0, \\ 0 & \text{αν } t = 0, \end{cases}$

(ε) $X_5(t) = |B_t|^2$,

να απαντηθούν τα εξής:

(i) Για σταθερό $t > 0$ καθορίστε την κατανομή της $X_i(t)$.

(ii) Είναι η ανέλιξη X_i κίνηση Brown;

8. Έστω B τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής

$$X := \int_0^1 B_t B_{1-t} \, dt$$

.

Υποδείξεις

1. (β) Με τη γνωστή μέθοδο της θεωρίας μέτρου. Ξεκινάμε με X δείκτρια, έπειτα με X απλή, έπειτα θετική, και τέλος ολοκληρώσιμη.

2. (β) Με την ίδια μέθοδο όπως στο 1 (β).

(γ) Ονομάζουμε Y το δεξί μέλος της ισότητας, και δείχνουμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες ώστε να ισούται με $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{G})$. Μία από αυτές είναι

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X\mathbf{1}_A) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y\mathbf{1}_A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Για ευκολία, θέτουμε $Z = \mathbf{1}_A$, που είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. Με βάση το (β), η πιο πάνω ισότητα ισοδυναμεί με

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(XZf) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YZf).$$

Το δεξί μέλος της ισότητας ισούται με

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YZf) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YZf \mid \mathcal{G})\} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{YZ\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f \mid \mathcal{G})\} = ...$$

3. Δοκιμάστε να την αποδείξετε για $n = 2, 3$.

5. Από την Άσκηση 3.6 των σημειώσεων, η $\phi(S_n)$ είναι martingale.

8. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fubini. Χρήσιμη είναι και η Άσκηση 6 πιο πάνω. Δείτε επίσης τις Ασκήσεις 8.2, 8.3 των σημειώσεων.