

Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Εργασία 2

Προθεσμία υποβολής: Πέμπτη 18 Δεκεμβρίου 2014

Σε όλες τις ασκήσεις πιο κάτω, B είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

1. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ στοιχείο του $L^2[0, 1]$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή

$$X := \int_0^1 f(t) \{ \sin B_t + \cos B_t \} dB_t$$

έχει διασπορά $\text{Var}(X) = \int_0^1 f^2(t) dt$.

2. (α) Έστω $f, g \in \mathcal{V}(0, 1)$ (συμβολισμός Oksendal). Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E} \left\{ \int_0^1 f(t, \omega) dB_t \cdot \int_0^1 g(t, \omega) dB_t \right\} = \int_0^1 \mathbf{E} \{ f(t, \omega) g(t, \omega) \} dt$$

(β) Ποιά η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $B_t, \int_0^1 B_s dB_s$ όπου $t \in (0, 1)$;

3. Άσκηση 11.1 των σημειώσεων.

4. Άσκηση 11.2 των σημειώσεων.

5. Άσκηση 11.4 των σημειώσεων.

6. Δειξτε ότι η ανέλιξη

$$X_t := e^{tB_t} - \int_0^t e^{sB_s} \left\{ B_s + \frac{s^2}{2} \right\} ds, \quad t \geq 0$$

είναι martingale.