Στοχαστικες Διαφορικες Εξισώσεις
Εξετάσεις Φεβρουαρίου

2 Φεβρουαρίου 2015

1. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ ώστε $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι
$$\mathbf{E}((X_{n+1} - X_n)(X_n - X_{n-1})) = 0$$
για κάθε $n \geq 2$.

2. Έστω $(B_t)_{t\geq 0}, (W_t)_{t\geq 0}$ δύο ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown, και $\rho \in (0, 1)$. Θέτουμε
$$X_t := \rho B_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t$$
για κάθε $t \geq 0$. Δείξτε ότι η X είναι τυπική κίνηση Brown.

3. Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown. Να δεχθεί ότι η ανέλιξη
$$X_t := \cos B_t + \frac{1}{2}\int_0^t \cos B_s \, ds$$
είναι martingale.

4. (i) Λυστε τη στοχαστικη διαφορική εξισωση
$$dX(t) = -\beta(X(t) - \alpha)dt + \sigma \, dW(t),$$
με αρχικη συνθήκη $X(0) = x_0$, και $\beta > 0$, α, $\sigma > 0$ γνωστές σταθερές.
[Υπόδειξη: Υπολογίστε το διαφορικό $d(e^{\lambda t}X(t))$ και επιλέξτε κατάλληλο λ.]

   (ii) Υπολογίστε τη μεση τιμή και τη διασπορά της στοχαστικης διαδικασίας $\{X(t)\}$ για κάθε $t > 0$ σαν συνάρτηση των παραμετρων.

5. (i) Δώστε τον ορισμό του γεννήτορα τελεστή για μια διαδικασια Itō.

   (ii) Υπολογιστε τη μορφή του για τη μονοδιάστατη διαδικασία Itō
$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

   (iii) Αν A ο γεννήτορας τελεστης για την παραπάνω διαδικασια συνδέστε την κλασσική λύση του προβλήματος Cauchy
$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = Au(t, x),$$
$$u(0, x) = f(x)$$
με κατάλληλο συναρτησιακό που σχετίζεται με τις τροχιές της διαδικασιας $\{X(t)\}$ (αναπαράσταση Feynman-Kac) αιτιολογώντας τα διάφορα βήματα.

   (iv) Τι μορφή παιρνει το παραπάνω για την περίπτωση όπου $X(t) = W(t)$;

Τα θέματα επιστρέφονται μαζί με το γραπτό.

Καλή επιτυχία.