Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Εξέταση 30 Σεπτεμβρίου 2015

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, και $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες. Να δειχθεί ότι
$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_1)^2) \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_2)^2).$$
Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας;

2. Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown. Να δεχθεί ότι η ανέλιξη
$$X_t := (B_t - t)e^{B_t - \frac{1}{2}t}, t \geq 0$$
είναι martingale ως προς την συνήθη διήθηση $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\}), t \geq 0$.

3. Για $a, b \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη στοχαστικη διαφορική εξισωση
$$dX_t = \frac{b - X_t}{1 - t}\, dt + dB_t, t \in [0, 1)$$
με αρχικη συνθήκη $X_0 = a$.

   (i) Υπολογίστε το διαφορικό της $Z_t := (b - X_t)/(1 - t)$ και δείξτε ότι η ΣΔΕ έχει λύση την
$$X_t := a(1 - t) + bt + (1 - t)\int_0^t \frac{1}{1 - s}\, dB_s.$$
   (ii) Για την λύση του (i) δείξτε ότι $\lim_{t\to 1^-} X_t = b$ στον L^2.

4. (i) Λυσετε την στοχαστικη διαφορική εξισωση
$$dX(t) = -\beta(X(t) - \alpha)dt + \sigma\, dW(t),$$
με αρχικη συνθήκη $X(0) = x_0$, και $\beta > 0$, α, $\sigma > 0$ γνωστές σταθερές.

   (ii) Υπολογίστε την μεση τιμή και την διασπορά της στοχαστικης διαδικασίας $\{X(t)\}$ για κάθε $t > 0$ σαν συνάρτηση των παραμετρων.

5. (i) Δώστε τον ορισμό του γεννήτορα τελεστή για μια διαδικασια Itō.

   (ii) Υπολογιστε την μορφή του για την μονοδιάστατη διαδικασία Itō
$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t),$$
όπου μ, σ γνωστές σταθερές (iii) Αν A ο γεννήτορας τελεστης για την παραπάνω διαδικασια συνδέστε την κλασσική λύση του προβλήματος Cauchy
$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = Au(t, x),$$
$$u(0, x) = f(x)$$
με κατάλληλο συναρτησιακό που σχετίζεται με τις τροχιές της διαδικασιας $\{X(t)\}$ (αναπαράσταση Feynman-Kac) αιτιολογώντας τα διάφορα βήματα.

Τα θέματα επιστρέφονται μαζί με το γραπτό.

Καλή επιτυχία.