# Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική.

## Τόμος I: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση

Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

2 Φεβρουαρίου 2003

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Βασικές Μαθηματικές Έννοιες

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να φέρει τον αναγνώστη σε επαφή με τις βασικές μαθηματικές έννοιες που απαιτούνται για την κατανόηση ορισμένων προχωρημένων θεμάτων της θεωρίας πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης. Η κύρια δυσκολία του κεφαλαίου αυτού είναι ότι ο αναγνώστης θα συναντήσει και θα πρέπει να αφομοιώσει μία σειρά απο ορισμούς οι οποίοι ενώ εκ πρώτης όψεως φαίνονται περίπλοκοι είναι στην πραγματικότητα πολύ φυσικοί. Οι περισσότεροι απο αυτούς γενικεύουν έννοιες απο τις στοιχειώδη θεωρία πιθανοτήτων οι οποίες θα πρέπει να είναι ήδη γνωστές στην πλειοψηφία των αναγνωστών. Ο λόγος που διαλέξαμε να επισκοπήσουμε την θεωρία πιθανοτήτων κατά αυτό τον τρόπο είναι γιατί έτσι θα μπορέσουμε να εισάγουμε έννοιες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στις εφαρμογές και δεν μπορούν αλλιώς να περιγραφούν. Επίσης, θέλουμε να προετοιμάσουμε τον αναγνώστη που πιθανόν θα ήθελε να ασχοληθεί με την ερευνητική βιβλιογραφία στον χώρο της στοχαστικής ανάλυσης και των εφαρμογών της (πχ. φυσική, μαθηματική βιολογία, χρηματοοικονομική κ.α.) κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να παρακολουθεί τις εξελίξεις οι οποίες είναι εκπεφρασμένες στην γλώσσα αυτή. Θα προσπαθήσουμε σε όλη την διάρκεια του κεφαλαίου αυτού να παραθέτουμε όσο το δυνατόν περισσότερα παραδείγματα που θα ξεκαθαρίζουν τους ορισμούς που εισάγονται.

## 1.1 Βασικές έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων

Όταν μιλάμε για πιθανότητες, αυτόματα σκεπτόμαστε το πόσο εύκολο (ή δύσκολο) είναι να συμβεί κάποιο γεγονός. Για να διατυπώσουμε μία μαθηματική θεωρία των πιθανοτήτων θα πρέπει συνεπώς να ορίσουμε κατάλληλα τις έννοιες *γεγονός* και *εύκολο*. Αυτός είναι και ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου.

### 1.1.1 $\sigma$-άλγεβρες

Για να ορίσουμε μαθηματικά την έννοια του γεγονότος, ή της συλλογής γεγονότων, θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια της $\sigma$-άλγεβρας.

**Ορισμός 1.1.1** *Έστω $\Omega$ κάποιο σύνολο. Μία $\sigma$-αλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω στο σύνολο $\Omega$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του $\Omega$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow F^c \equiv \Omega \setminus F \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Longrightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Από τον πιο πάνω ορισμό μπορούμε εύκολα να συνάγουμε την παρακάτω ιδιότητα: Αν $\mathcal{F}$ είναι μία $\sigma$-αλγεβρα και $A_i \in \mathcal{F}$ τότε

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{F}.$$

**Παράδειγμα 1.1.1** *Έστω*

$$\Omega = \{1, 2, 3\}$$

*Τότε η*

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1, 3\}\}$$

*είναι μία $\sigma-$άλγεβρα αφού μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού.*

**Παράδειγμα 1.1.2** *Έστω*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

*Τότε η*

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3, 4\}\}$$

**δεν** *είναι μία $\sigma-$ άλγεβρα γιατί περιέχει τα υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2\}$ αλλά όχι το $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$.*

*Η*

$$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

*είναι μία $\sigma-$άλγεβρα. Είναι μικρότερη απο την $\sigma-$ άλγεβρα που περιέχει όλα τα υποσύνολα του $\Omega$.*

Οι $\sigma-$ άλγεβρες συνήθως χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν **δομές πληροφορίας**. Τα στοιχεία του συνόλου $\Omega$ μπορούν να θεωρηθούν σαν οι πιθανές **καταστάσεις του κόσμου** ή τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος. Μία $\sigma-$ άλγεβρα, η οποία εξ ορισμού είναι ένα σύνολο των υποσυνόλων του $\Omega$ είναι κατά κάποιο τρόπο το σύνολο όλων των πιθανών ερωτήσεων που μπορεί κάποιος να θέσει για το πείραμα αυτό ή την κατάσταση του κόσμου. Στην θεωρία πιθανοτήτων πολλές φορές τα υποσύνολα του $\Omega$ ονομάζονται **γεγονότα**. Η ονομασία αυτή θα χρησιμοποιηθεί αρκετά συχνά στο βιβλίο αυτό. Οι ιδιότητες της $\sigma-$ άλγεβρας επιλέχθηκαν κατά τέτοιο τρόπο ώστε αν κάποιος μπορεί να κάνει τις ερωτήσεις:
(α) μπορεί να συμβεί το γεγονός $A \subset \Omega$ και
(β) μπορεί να συμβεί το γεγονός $B \subset \Omega$
τότε μπορεί να κάνει και την ερώτηση
(γ) μπορεί να συμβει το γεγονός $A$ **και** το γεγονός $B$ το οποίο μαθηματικά ισοδυναμεί με το σύνολο $A \cap B$
(ή ισοδύναμα (γ$'$) μπορεί να συμβεί το γεγονός $A$ **ή** το γεγονός $B$ το οποίο ισοδυναμεί με το σύνολο $A \cup B$) καθώς και την ερώτηση (δ) μπορεί να **μην** συμβεί το γεγονός $A$ (το οποίο ισοδυναμεί με το $A^c$).
Θα επανέλθουμε στο σημείο αυτό στην παράγραφο 1.1.7.

Θα συνεχίσουμε με την παράθεση μερικών ακόμη ορισμών.

**Ορισμός 1.1.2** *Η* **ελάχιστη** *$\sigma$-***άλγεβρα** *που ορίζεται απο ένα σύνολο $A$, είναι η μικρότερη $\sigma$-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο $A$. Η άλγεβρα αυτή συνήθως συμβολίζεται $\sigma(A)$.*

**Παράδειγμα 1.1.3** *Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την άλγεβρα*

$$\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

*Αυτή είναι η* **ελάχιστη** *$\sigma$-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο $A$, οπότε είναι η $\sigma(A)$.*

**Παράδειγμα 1.1.4** *Έστω $A_1$ και $A_2$ υποσύνολα του $\Omega$ τέτοια ώστε*

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{και} \quad A_1 \cup A_2 = \Omega$$

*Η $\sigma-$ άλγεβρα*

$$\{\emptyset, A_1, A_2, \Omega\}$$

*είναι η* **ελάχιστη** *άλγεβρα $\sigma(A)$ η οποία περιέχει το $A = \{A_1, A_2\}$.*

**Παράδειγμα 1.1.5** *Έστω $A_1$, $A_2$ και $A_3$ υποσύνολα του $\Omega$ τέτοια ώστε*

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \;\; i \neq j \quad \text{και} \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$$

*Η $\sigma-$ άλγεβρα*

$$\{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_3, \Omega\}$$

*είναι η ελαχίστη $\sigma-$ άλγεβρα $\sigma(A)$ η οποία περιέχει το $A = \{A_1, A_2, A_3\}$.*

**Ορισμός 1.1.3** *Η μικρότερη σ-άλγεβρα η οποία περιέχεται σε κάθε σ-άλγεβρα είναι η* **τετριμένη** *ή* **εκφυλισμένη** *σ-άλγεβρα $\mathcal{O} = \{\emptyset, \Omega\}$.*

Στο παράρτημα του κεφαλαίου (βλ. παράγραφο 1.8.3) αναφέρονται και κάποιες άλλες κλάσεις υποσυνόλων οι οποίες είναι χρήσιμες, όπως π.χ. τα π-συστήματα και τα λ-συστήματα και πως μπορεί αυτά να χρησιμοποιηθούν για να χαρακτηρίσουμε τις ιδιότητες μίας σ-άλγεβρας (βλ. Θεώρημα μονότονης κλάσης 1.8.5). Τα θέματα αυτά μπορεί να παραληφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

### 1.1.2 Άλγεβρα Borel

Θα ορίσουμε τώρα μία συγκεκριμένη σ-άλγεβρα η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην μελέτη της θεωρία πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης. Θα θεωρήσουμε $\Omega = \mathbb{R}$ και θα κατασκευάσουμε μία σ-άλγεβρα που αποτελείται από υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

**Ορισμός 1.1.4** *Η άλγεβρα Borel , την οποία συμβολίζουμε σαν $\mathcal{B}$, είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση $C$ όλων των διαστημάτων της μορφής $(-\infty, x)$, τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ως υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Τα στοιχεία του $\mathcal{B}$ ονομάζονται σύνολα Borel.*

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{B}$ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας όλων των διαστημάτων της μορφής $(a, b)$. Περιέχει επίσης όλα τα υποσύνολα που περιέχουν μόνο ένα σημείο (singletons ) $\{x\}$ και μετρήσιμες ενώσεις τέτοιων υποσυνόλων (πχ. το υποσύνολο $\{0, 1, 2, ...\}$ είναι ένα σύνολο Borel). Έτσι το $\mathcal{B}$ περιέχει **πρακτικά** όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τα οποία θα ασχοληθούμε. Για παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τα οποία δεν ανήκουν στην $\mathcal{B}$ παραπέμπουμε στον [37].

Οι έννοιες της άλγεβρας Borel και των συνόλων Borel μπορούν να γενικευθούν και σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ δηλαδή όταν $\Omega = \mathbb{R}^d$. Λέμε ότι ένα παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^d$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ της μορφής

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, ..., d\}$$

όπου $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^d$ και $b = (b_1, ..., b_d) \in \mathbb{R}^d$.

**Ορισμός 1.1.5** *Η $\sigma-$άλγεβρα Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι η ελάχιστη $\sigma-$ άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα παραλληλόγραμμα της μορφής $(a, b]$ ή με άλλα λόγια την $\sigma-$άλγεβρα που παράγεται απο τα παραλληλόγραμμα.*

Κατά αναλογία με τα προηγούμενα η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ περιέχει **πρακτικά** όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που θα μας απασχολήσουν.

Πολλές φορές θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τις άλγεβρες Borel που παράγονται από ορισμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$ ή γενικότερα του $\mathbb{R}^d$. Αν $d = 1$ και θεωρήσουμε το διάστημα $[a, b] \in \mathbb{R}$ τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα που ανήκουν στον $[a, b]$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{B}([a, b])$. Η γενίκευση για οποιοδήποτε $d$ είναι προφανής.

### 1.1.3 Μετρήσιμος χώρος

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του μετρήσιμου χώρου.

**Ορισμός 1.1.6** *Έστω ένα σύνολο $\Omega$ και μία $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}$ που αποτελείται από υποσύνολα του $\Omega$. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F})$ καλείται* **μετρήσιμος χώρος (measurable space)**.

**Παράδειγμα 1.1.6** *(i) Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3\}$ και την $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1, 3\}\}$. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος.*
*(ii) Ας θεωρήσουμε και πάλι το σύνολο $\Omega$ όπως και παραπάνω αλλά ας πάρουμε τώρα την $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F}_2)$ είναι επίσης ένας μετρήσιμος χώρος.*

**Παράδειγμα 1.1.7** *(i) Το ζεύγος $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος.*
*(ii) Το ζεύγος $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος.*

### 1.1.4 Μέτρο πιθανότητας

Στις προηγούμενες παραγράφους θέσαμε σε αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο την έννοια του γεγονότος. Θα αντιμετωπίσουμε τώρα το ερώτημα του πόσο *εύκολα* μπορεί να συμβεί κάποιο γεγονός. Το εύκολα θα σχετιστεί με έναν αριθμό ο οποίος θα αντιστοιχεί με κάποιο γεγονός που όπως είδαμε μέχρι τώρα στην μαθηματική γλώσσα μεταφράζεται σε κάποιο σύνολο που ανήκει σε μία κατάλληλα επιλεγμένη $\sigma-$άλγεβρα. Πρέπει λοιπόν να εισάγουμε την έννοια συναρτήσεων που παίρνουν ένα σύνολο και το αντιστοιχούν σε κάποιο αριθμό. Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται **μέτρα**. Στην θεωρία πιθανοτήτων θα χρειαστεί να εισάγουμε μία ειδική περίπτωση μέτρου, το **μέτρο πιθανότητας**.

**Ορισμός 1.1.7** *Ένα* **μέτρο πιθανότητας** *$P$ επάνω σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ είναι μία απεικόνιση $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ με τις ιδιότητες*

*(i)* $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$

*(ii) Αν $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ και τα $\{A_i\}$ είναι ανά δύο ξένα, τότε*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

**Παρατήρηση:** Αν παραλείψουμε την συνθήκη $P(\Omega) = 1$ τότε λέμε ότι η $P$ είναι ένα **μέτρο** και όχι ένα **μέτρο πιθανότητας**. Στο βιβλίο αυτό θα κρατήσουμε τον συμβολισμό $P$ για μέτρα πιθανοτήτων και θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mu$ για γενικά μέτρα.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι σαφές ότι ένα μέτρο είναι μία απεικόνιση που απεικονίζει ένα σύνολο σε ένα πραγματικό αριθμό. Κατά κάποιο τρόπο ένα μέτρο εκφράζει το μέγεθος ενός συνόλου. Επειδή για κάποιο σύνολο μπορούμε να ορίσουμε περισσότερα από ένα μέτρα το νοήμα του μεγέθους του συνόλου που πριν λίγο αναφέραμε, εξαρτάται απο το είδους του μέτρου που έχουμε ορίσει.

Η έννοια του μέτρου μπορεί να φαίνεται αφηρημένη εκ πρώτης όψεως (και πράγματι μπορεί να είναι!) είναι όμως πολύ φυσική. Συγκεκριμένα, ο καθένας μας απο πολύ μικρή ηλικία έχει έρθει σε επαφή με την έννοια του μέτρου. Παραφράζοντας τον Αρχοντοχωριάτη του Μολιέρου, πολλοί απο εμάς χρησιμοποιούν το μέτρο όλη τους την ζωή χωρίς να το ξέρουν. Αν το σύνολο στο οποίο αναφερόμαστε είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, τότε το μήκος του είναι ένα είδος μέτρου το οποίο ονομάζεται μέτρο Lebesgue. Ομοίως, το εμβαδό ενός παραλληλεπιπέδου, ή ο όγκος ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^3$ είναι παραδείγματα της γενίκευσης του μέτρου Lebesgue στα σύνολα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα (βλ. παραδείγματα 1.1.10,1.1.12).

Στη συνέχεια θα δώσουμε παραδείγματα μέτρων που θα δείξουν το πως η έννοια του μέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πιο αφηρημένες καταστάσεις. Τα παραδείγματα αυτά θα αποσαφηνήσουν τους πιο πάνω ορισμούς. Για μία πιο εκτενή εισαγωγή στην εφαρμογή της θεωρίας μέτρου στην θεωρία πιθανοτήτων βλ. π.χ. [17].

**Παράδειγμα 1.1.8 Μέτρο αρίθμησης (counting measure)** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ ένας αριθμήσιμος χώρος. Για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{F}$ μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $\mu(A)$ να είναι ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου $A$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η συνάρτηση $\mu$ είναι ένα μέτρο επάνω στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}$ το οποίο αποκαλείται* **μέτρο αρίθμησης**. *Μπορούμε να αλλάξουμε τον ορισμό αυτό λίγο και να ορίσουμε την συνάρτηση $P : \mathcal{F} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ έτσι ώστε $P(A) = \mu(A)/card(\Omega)$ (όπου $card(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του $\Omega$. Τότε η συνάρτηση $P$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας.*

**Παράδειγμα 1.1.9 Μέτρο υπο συνθήκη πιθανότητας** *Ας θεωρήσουμε δύο υποσύνολα $A$ και $B$ τα οποία είναι υποσύνολα ενός συνόλου $\Omega$ και ας συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$άλγεβρα που περιέχει το $A$. Μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $A \to P(A \mid B)$, όπου $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ η οποία ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας στο $\mathcal{F}$ το οποίο ονομάζεται το* **υπό συνθήκη μέτρο πιθανότητας**.
*Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το νέο μέτρο αυτό ικανοποιεί τις ιδιότητες του μέτρου. Πράγματι, αν $Q(A) = P(A \mid B)$ για δεδομένο $B$ έχουμε*

$$Q(\emptyset) = 0, \quad Q(\Omega) = 1$$

$$Q(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n), \quad A_n \, \text{ανά δύο ξένα}$$

*Για να δείξουμε την τελευταία σχέση εργαζόμαστε ως ακολούθως*

$$Q(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \quad = \quad P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B) = \frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B))}{P(B)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n)$$

*όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι εφόσον τα $A_n$ είναι ανά δύο ξένα και τα $C_n = A_n \cup B$ είναι ανά δύο ξένα.*

Όταν το σύνολο $\Omega$ είναι **αριθμήσιμο**, η κατασκευή του μέτρου πιθανότητας είναι απλή. Στην περίπτωση που το $\Omega$ είναι **μη αριθμήσιμο** η κατασκευή του μέτρου πιθανότητας δεν είναι τόσο απλή διαδικασία μιά και στην περιπτωση αυτή εν γένει θα έχουμε $P(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι απαραίτητη η εισαγωγή προχωρημένων εννοιών της θεωρίας μέτρου για να δικαιολογηθεί η κατασκευή μέτρων πιθανότητας. Αν και στο παρόν θα χρησιμοποιήσουμε μέτρα πιθανότητας σε μη αριθμήσιμα σύνολα (π.χ. στο $\mathbb{R}$), δεν θα ασχοληθούμε με την κατασκευή τους. Κάτι τέτοιο είναι αρκετά έξω από τις βλέψεις του παρόντος και παραπέμπουμε σε εγχειρίδια θεωρίας μέτρου ή ανάλυσης π.χ.[18], [35]. Θα αρκεστούμε εδώ να αναφέρουμε μερικά παραδείγματα μέτρων στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{R}^d$.

**Παράδειγμα 1.1.10 Το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$** *Όπως αναφέραμε και προηγουμένως ένα μέτρο στον $\mathbb{R}$ είναι το μέτρο Lebesgue $\mu_L$. Στο παράδειγμα αυτό λοιπόν θεωρούμε ότι $\Omega = \mathbb{R}$ και ότι $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Για το μέτρο αυτό ισχύει $\mu_L([a,b]) = b - a$ όπου $[a,b] \in \mathbb{R}$ είναι ένα κάποιο διάστημα. Το μέτρο αυτό δεν είναι μέτρο πιθανότητας*[1].

**Παράδειγμα 1.1.11** *Ας θεωρήσουμε πάλι $\Omega = \mathbb{R}$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο $P : \mathcal{B} \to [0,1]$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε κάτω από αυτό η εικόνα του διαστήματος $I = (-\infty, x]$ να είναι η*

$$P(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{-y^2}{2}\right) dy$$

*Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το μέτρο $P$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}$. Όπως θα δούμε και παρακατω, το μέτρο αυτό σχετίζεται με την κανονική κατανομή στο $\mathbb{R}$.*

**Παράδειγμα 1.1.12 Το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^d$** *Ας θεωρήσουμε τώρα $\Omega = \mathbb{R}^d$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Μπορούμε να ορίσουμε το ανάλογο του μέτρου Lebesgue στις $d$ διαστάσεις ως εξής. Τυπικά στοιχεία του $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι διαστήματα της μορφής $[a_1, b_1] \times ... \times [a_d, b_d]$, $a_i \leq b_i, i = 1, ..., d$. Η εικόνα του διαστήματος αυτού κάτω από το μέτρο Lebesgue $\mu_{L,d}$ είναι*

$$\mu_{L,d}([a_1, b_1] \times ... \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1)...(b_d - a_d)$$

[1] Μπορεί να γίνει ένα μέτρο πιθανότητας αν αντί για όλο το $\mathbb{R}$ πάρουμε ένα διάστημα $[x_1, x_2]$ και αντί την $\mathcal{B}$ πάρουμε την άλγεβρα Borel που παράγεται από όλα τα διαστήματα που περιέχονται στο $[x_1, x_2]$, και ορίσουμε το μέτρο $P = \frac{\mu_L}{x_2 - x_1}$. Όπως θα δούμε και παρακάτω, το μέτρο αυτό σχετίζεται με την ομογενή κατανομή στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

*Το μέτρο αυτό δεν είναι μέτρο πιθανότητας* [2].

**Παράδειγμα 1.1.13** *Ας θεωρήσουμε $\Omega = \mathbb{R}^d$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε κάτω από αυτό η εικόνα του διάστήματος $I = (-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_d]$ να είναι η*

$$P(I) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_d} \exp\left(-\frac{y_1^2 + ... + y_d^2}{2}\right) dy_1 ... dy_d$$

*Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το μέτρο $P$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$. Όπως θα δούμε και παρακατω, το μέτρο αυτό σχετίζεται με την κανονική κατανομή στο $\mathbb{R}^d$.*

Πολλές φορές στην κατασκευή των μέτρων πιθανότητας χρειάζονται ορισμένα αποτελέσματα από την θεωρία μέτρου τα οποία αναφέρονται κάτω από την γενική ονομασία 'θεωρήματα επέκτασης'. Μία σύντομη αναφορά στο θέμα αυτό γίνεται στην παράγραφο 1.8.4 του παραρτήματος του κεφαλαίου όπου αναφέρεται το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή (βλ. Θεώρημα 1.8.8). Τα θέματα αυτά μπορεί να παραληφθούν σε μία πρώτη ανάγνωση.

### 1.1.5 Χώρος πιθανοτήτων

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του χώρου πιθανοτήτων.

**Ορισμός 1.1.8** *Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο $\Omega$, μία $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω σε αυτό και ένα μέτρο πιθανότητας $P$. Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ονομάζεται* **χώρος πιθανοτήτων**.

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα χώρων πιθανοτήτων.

**Παράδειγμα 1.1.14** *Έστω $\Omega = \{1, 2, 3\}$ και*

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

*Ας ορίσουμε το μέτρο αρίθμησης $P$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε*

$$P(\emptyset) = 0,\ P(\{1\}) = \frac{1}{3},\ P(\{2\}) = \frac{1}{3},\ P(\{3\}) = \frac{1}{3},\ P(\{1,2\}) = \frac{2}{3},$$
$$P(\{1,3\}) = \frac{2}{3},\ P(\{2,3\}) = \frac{2}{3},\ P(\{1,2,3\}) = 1$$

*Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.*

**Παράδειγμα 1.1.15** *Ας θεωρήσουμε $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ και $P$ το μέτρο πιθανότητας που ορίσαμε στο παράδειγμα 1.1.11. Η τριάδα $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.*

**Παράδειγμα 1.1.16** *Ας θεωρήσουμε $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και $P$ το μέτρο πιθανότητας που ορίσαμε το παράδειγμα 1.1.13. Η τριάδα $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.*

---

[2] Μπορεί να γίνει ένα μέτρο πιθανότητας αν αντί για όλο το $\mathbb{R}$ πάρουμε ένα διάστημα $I_d = [x_{1,1}, x_{2,1}] \times ... \times [x_{1,d}, x_{2,d}]$, αντί την $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ πάρουμε την άλγεβρα Borel που παράγεται από όλα τα διαστήματα που περιέχονται στο $I_d$, και ορίσουμε το μέτρο $P = \frac{\mu_{L,d}}{(x_{2,1} - x_{1,1}) ... (x_{2,d} - x_{1,d})}$. Το μέτρο αυτό σχετίζεται με την ομογενή κατανομή στο διάστημα $I_d$.

### 1.1.6 Μετρήσιμο σύνολο

Μία πολύ σημαντική έννοια είναι η έννοια του μετρήσιμου συνόλου. Η έννοια αυτή ορίζεται πάντοτε ως πρός μία συγκεκριμένη σ-άλγεβρα.

**Ορισμός 1.1.9** *Τα υποσύνολα $F$ του $\Omega$ που ανήκουν στη $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$ αποκαλούνται $\mathcal{F}$-* **μετρήσιμα**.

**Παράδειγμα 1.1.17** *Έστω $\Omega = \{1,2,3\}$ και ας θεωρήσουμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1,3\}\}$ και $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\}$. Το σύνολο $\{1\} \subset \Omega$ είναι $\mathcal{F}_2-$μετρήσιμο αλλά δεν είναι $\mathcal{F}_1-$μετρήσιμο.*

**Παράδειγμα 1.1.18** *Έστωσαν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Κάθε διάστημα της μορφής $[a,b]$ όπου $a,b \in \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμο.*

### 1.1.7 Αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως οι έννοιες που ορίσαμε μέχρι τώρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την έκφραση εννοιών της θεωρίας πίθανοτήτων.

Ένα υπόδειγμα πειράματος που εμπεριέχει κάτι το τυχαίο μπορεί να περιγραφεί σαν ένας χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Πιο συγκεκριμένα

- $\Omega$ είναι ο **χώρος δειγμάτων** (**sample space**). Αυτός είναι ο χώρος στον οποίο περιέχονται όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος.
- Ένα στοιχείο $\omega \in \Omega$ αποκαλείται σημείο δείγματος (**sample point**,) και είναι η συγκεκριμένη έκβαση ενός πειράματος.
- Η $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}$ αποκαλείται **οικογένεια γεγονότων** (**family of events**). Στην άλγεβρα αυτή εμπεριέχονται όλες οι πιθανές ερωτήσεις που μπορεί κάποιος να κάνει για ένα πείραμα.
- Ένα γεγονός είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{F}$, με άλλα λόγια ένα $\mathcal{F}$-μετρήσιμο υποσύνολο του $\Omega$. Τα γεγονότα μπορεί να είναι πιο περίπλοκα απο μία απλή έκβαση ενός πειράματος.
- Το μέτρο πιθανότητας $P$ μας πληροφορεί πόσο εύκολο ή δύσκολο είναι να συμβεί κάποιο γεγονός. Πιο συγκεκριμένα το $P(F)$ μας πληροφορεί το πόσο εύκολο είναι να συμβεί το γεγονός $F \in \mathcal{F}$. Αν $P(F_1) > P(F_2)$ για δύο σύνολα $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ τότε λέμε ότι το γεγονός $F_1$ είναι πιο πιθανό από το γεγονός $F_2$.

Η διατύπωση της θεωρίας πιθανοτήτων με βάση την χρήση μίας τριάδας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ συνηθίζεται να ονομάζεται **αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων** και ένας από τους πρωτεργάτες της είναι ο Kolmogorov[16].

**Παράδειγμα 1.1.19** *Ας θεωρήσουμε τώρα σαν παράδειγμα ένα πείραμα που συνίσταται στο στρίψιμο δύο νομισμάτων. Θα συμβολίσουμε την κορώνα με το $H$*

*και τα γράμματα με το $T$. Έτσι αν γράψουμε πχ $TH$ σημαίνει ότι το πρώτο νόμισμα έφερε γράμματα και το δεύτερο κορώνα. Για το πείραμα αυτό ο χώρος δειγμάτων είναι ο $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. Η συλλογή όλων των υποσυνόλων του $\Omega$ (οικογένεια γεγονότων) μπορεί να είναι η σ-άλγεβρα*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \;=\; & \{\emptyset, \Omega, \{HH\}, \{HT\}, \{TH\}, \{TT\}, \{HH, HT\}, \\ & \{HH, TH\}, \{HH, TT\}, \{HT, TH, TT\}, \{HH, TH, TT\}, \{HH, HT, TT\}, \\ & \{HH, HT, TH\}, \{TH, TT\}, \{HT, TT\}, \{HT, TH\}\} \end{aligned}$$

*Βλέπουμε λοιπόν ότι ενώ το $\Omega$ περιέχει μόνο την πιθανή έκβαση ενός συγκεκριμένου πειράματος, το $\mathcal{F}$ περιέχει όλες τις πιθανές ερωτήσεις που μπορεί κάποιος να κάνει για ένα πείραμα όπως πχ την ερώτηση που σχετίζεται με το να φέρουν και τα δύο νομίσματα το ίδιο αποτέλεσμα $\{HH, TT\}$ κλπ. Μία επιλογή για το μέτρο πιθανότητας $P$ είναι το μέτρο αρίθμησης στην $\mathcal{F}$, δηλαδή η συνάρτηση $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ που παίρνει τις τιμές*

$$\begin{aligned} & P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, P(\{HH\}) = \frac{1}{4}, P(\{HT\}) = \frac{1}{4}, \\ & P(\{TH\}) = \frac{1}{4}, P(\{TT\}) = \frac{1}{4}, P(\{HH, HT\}) = \frac{1}{2}, P(\{HH, TH\}) = \frac{1}{2}, \\ & P(\{HH, TT\}) = \frac{1}{2}, P(\{HT, THTT\}) = \frac{3}{4}, P(\{HH, THTT\}) = \frac{3}{4}, \\ & P(\{HH, HTTT\}) = \frac{3}{4}, P(\{HH, HTTH\}) = \frac{3}{4}, P(\{TH, TT\}) = \frac{1}{2}, \\ & P(\{HT, TT\}) = \frac{1}{2}, P(\{HT, TH\}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*Για παράδειγμα στην συνηθισμένη γλώσσα της θεωρίας πιθανοτήτων το $P(\{HH\})$ μπορεί να ερμηνευθεί σαν η πιθανότητα να φέρουν και τα δύο νομίσματα κορώνα. Αν τα νομίσματα είναι 'τίμια' και εφόσον και οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες η πιθανότητα αυτή είναι ίση με $1/4$. Κατά παρόμοιο τρόπο το $P(\{HH, HT, TT\})$ μπορεί να ερμηνευτεί σαν η πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι $HH$ ή $HT$ ή $TT$, το οποίο χρησιμοποιώντας στοιχειώδη επιχειρήματα μπορουμε να δείξουμε ότι είναι ίσο με $3/4$.*

*Θα θέλαμε να τονίσουμε ότι ανάλογα με τις ερωτήσεις που θέλουμε να κάνουμε σχετικά με το πείραμα μπορούμε να ορίσουμε και διαφορετικές σ-άλγεβρες. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την υπο-άλγεβρα της $\mathcal{F}$*

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{HH\}, \{HT\}, \{HH, HT\}, \{HT, TH, TT\}, \{HH, TH, TT\}, \{TT, TH\}\}$$

*η οποία περιέχει τις ερωτήσεις που σχετίζονται με το 'να συμβεί κάτι δεδομένου ότι το πρώτο νόμισμα έχει φέρει κορώνα'. Η σ-άλγεβρα αυτή είναι βασική στην κατασκευή της υπό συνθήκη πιθανότητας.*

**Παράδειγμα 1.1.20** *Ενα άλλο παράδειγμα είναι το εξής. Ας θεωρήσουμε ότι επιλέγουμε τυχαία αριθμούς στο διάστημα $[0, 1]$. Στην περίπτωση αυτή, ένας τρόπος να περιγράψουμε το πείραμα αυτό μαθηματικά είναι να θέσουμε σαν χώρο* *δειγμάτων το* $\Omega = [0, 1]$ *και σαν οικογένεια γεγονότων την άλγεβρα Borel* $\mathcal{B}([0, 1])$ *που περιέχει όλα τα υποσύνολα του διαστήματος* $[0, 1]$. *Σαν μέτρο πιθανότητας* $P$ *μπορούμε να επιλέξουμε το μέτρο Lebesgue πάνω στο διάστημα* $[0, 1]$. *Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε μαθηματικά την επιλογή ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων αριθμών μεταξύ του* 0 *και του* 1.

## 1.2 Τυχαίες μεταβλητές και στοχαστικές διαδικασίες

Θα εισάγουμε τώρα τις βασικές έννοιες που χρειάζονται στον ορισμό των τυχαίων μεταβλητών και των στοχαστικών διαδικασιών.

### 1.2.1 $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση

Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας την έννοια της μετρήσιμης συνάρτησης.

**Ορισμός 1.2.1** *Έστω* $\Omega$ *κάποιο σύνολο. Η συνάρτηση* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *αποκαλείται* **$\mathcal{F}$-μετρήσιμη** *αν*

$$Y^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

*για κάθε ανοικτό σύνολο* $U \in \mathbb{R}^d$.

Με άλλα λόγια λέμε ότι η συνάρτηση $Y$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^d$, κάτω από την συνάρτηση αυτή, ανήκει στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$. Για να απαντήσουμε λοιπόν την ερώτηση αν η συνάρτηση $Y$ παίρνει τιμή στο $U$ θα πρέπει να έχουμε στην διάθεση μας την *πληροφορία* που περιέχεται στην $\mathcal{F}$.

Μετά τα παραπάνω είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε την έννοια της τυχαίας μεταβλητής.

### 1.2.2 Τυχαίες μεταβλητές

**Ορισμός 1.2.2** *Μία (πραγματική)* **τυχαία μεταβλητή** *είναι μία* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη συνάρτηση* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *όπου* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.*

Μπορούμε να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $X$ σαν μία μεταβλητή που η τιμή της εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος. Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι για κάθε κατάσταση παίρνουμε ένα πραγματικό διάνυσμα $X \in \mathbb{R}^d$ (φυσικά αν $d = 1$ παίρνουμε έναν αριθμό). Για να απαντήσουμε την ερώτηση τι τιμή μπορεί να πάρει η μεταβλητή $X$ θα πρέπει να έχουμε την πληροφορία σχετικά με τις εκβάσεις του πειράματος που περιέχονται στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$.

**Παράδειγμα 1.2.1** *Φανταστείτε μία αναποφάσιστη οδοιπόρο σε ένα σταυροδρόμι. Δεν γνωρίζει αν θέλει να στριψει αριστερά ή δεξιά. Για να βγεί από την δύσκολη θέση αποφασίσει να στρίψει ένα νόμισμα. Αν το νόμισμα φέρει γράμματα θα στρίψει αριστερά αλλιώς θα στρίψει δεξιά. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος* *δειγμάτων είναι ο* $\Omega = \{H, T\}$ *και μπορεί κανείς να ορίσει ένα μέτρο πιθανότητας* $P$ *κατά τρόπο ώστε*

$$P(H) = \frac{1}{2}, \qquad P(T) = \frac{1}{2}$$

*Η ταχύτητα της οδοιπόρου είναι μία τυχαία μεταβλητή* $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *τέτοια ώστε*

$$v(H) = (-u, 0), \qquad v(T) = (u, 0)$$

*όπου* $u$ *είναι το μέτρο της ταχύτητας της οδοιπόρου (το σύστημα συνεταγμένων έχει αρχή στο σταυροδρόμι).*

**Παράδειγμα 1.2.2** *Ας θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Έστω* $\omega \in \Omega$. *Τότε η συνάρτηση* $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *η οποία ορίζεται κατά τρόπο ώστε*

$$X(\omega) = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \omega \in A \\ 0, & \text{αν} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

*είναι μία τυχαία μεταβλητή αν το σύνολο* $A \subset \Omega$ *είναι ένα γεγονός* $(A \in \mathcal{F})$. *Η τυχαία αυτή μεταβλητή ονομάζεται* **δείκτρια συνάρτηση** *(indicator function) του συνόλου* $A$

**Παράδειγμα 1.2.3** *Ας θεωρήσουμε ότι επιλέγουμε τυχαία, έναν πραγματικό αριθμό από το διάστημα* $[0, 1]$ *κατά τρόπο ώστε όλοι οι αριθμοί να είναι ισοπίθανοι. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως στο παράδειγμα 1.1.20 το πείραμα αυτό μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά χρησιμοποιώντας τον χώρο πιθανοτήτων* $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ *όπου* $P$ *είναι το μέτρο Lebesgue στο διάστημα* $[0, 1]$. *Ας θεωρήσουμε τώρα ότι κάποιος ποντάρει στον αριθμό που θα έρθει έτσι ώστε να κερδίσει μία δραχμή αν έρθει αριθμός μικρότερος του* $\frac{1}{2}$ *και να χάσει μία δραχμή αν έρθει αριθμός μεγαλύτερος του* $\frac{1}{2}$. *Το κέρδος του* $X$, *είναι μία τυχαία μεταβλητή*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \omega \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{αν} \quad \omega > \frac{1}{2} \end{cases}$$

### 1.2.3 Κατανομή μιάς τυχαίας μεταβλητής

Κάθε τυχαία μεταβλήτη $X$ επάγει ένα μέτρο $\mu_X$ στο $\mathbb{R}^d$, το οποίο ορίζεται σύμφωνα με την σχέση

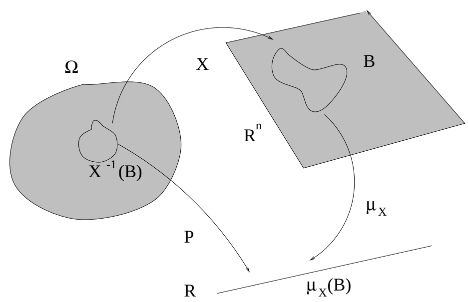
$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

για κάποιο σύνολο Borel $B$ στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Το μέτρο αυτό αποκαλείται η κατανομή της $X$. Η κατασκευή αυτή φαίνεται στο Σχ. 1.1.

Τώρα ας θεωρήσουμε ότι $d = 1$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Μπορούμε να ορίσουμε την **συνάρτηση κατανομής** μίας τυχαίας μεταβλητής $X$, $F_X$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= F_X(x) \\ P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $F_X$ καθορίζει το μέτρο πιθανότητας $P$. Η συνάρτηση $F_X$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες




Σχήμα 1.1: Η κατασκευή του μέτρου $\mu_X$.

Η $F_X$ είναι αύξουσα.

Η $F_X$ είναι δεξιά συνεχής.

Ισχύει $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

Αν η συνάρτηση $F_X$ μπορεί να εκφραστεί σαν το ολοκλήρωμα Riemann μιάς μη αρνητικής συνάρτησης $f(x)$ της οποίας το ολοκλήρωμα επάνω σε όλο το $\mathbb{R}$ είναι ίσο με ένα 1, τότε η συνάρτηση $f(x)$ αποκαλείται η **πυκνότητα πιθανότητας**. Στην περίπτωση αυτή

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x^{'})dx^{'}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

για κάποιο $B \in \mathcal{B}$.

**Παράδειγμα 1.2.4** *Η συνάρτηση κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής $X$ που είναι ομογενώς κατανεμημένη στο διάστημα $[0,1]$ είναι η συνάρτηση*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$

**Παράδειγμα 1.2.5** *Σαν δεύτερο παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε μία τυχαία μεταβλητή $X$ που είναι κανονικά κατανεμημένη. Τότε*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

*είναι η συνάρτηση κατανομής και*

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

*η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή $X$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά 1, η οποία συμβολίζεται $N(0,1)$.*

Για παραπάνω από μία τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ορίσουμε την **από κοινού συνάρτηση κατανομής**.
Έστωσαν $X_1, ..., X_d$ τυχαίες μεταβλητές σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x_1, ..., x_d)$ των τυχαίων αυτών μεταβλητών είναι μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$F(x_1, ..., x_d) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_d \leq x_d)$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_d \to \infty} F(x_1, ..., x_d) = F_{X_i}(x_i)$$

όπου $F_{X_i}(x_i)$ είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X_i$. Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να οριστεί η από κοινού πυκνότητα κατανομής πιθανότητας η οποία είναι μία συνάρτηση $f(x_1, ..., x_d)$ για την οποία ισχύει

$$F(x_1, ..., x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_d} f(x_1^{'}, ..., x_d^{'}) dx_1^{'} ... dx_d^{'}$$

Για κάθε σύνολο $B = A_1 \times ... \times A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ισχύει

$$P(x_1 \in A_1, ..., x_d \in A_d) = \int_{A_1} ... \int_{A_d} f(x_1^{'}, ..., x_d^{'}) dx_1^{'} ... dx_d^{'}$$

### 1.2.4 Η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από μία τυχαία μεταβλητή

Ας θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και μία τυχαία μεταβλητή, έστω $X$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η $X$ είναι εξ ορισμού $\mathcal{F}$-μετρήσιμη. Όμως, κατά κανόνα θα υπάρχουν μικρότερες $\sigma$-άλγεβρες για τις οποίες η $X$ θα είναι επίσης μετρήσιμη.

**Ορισμός 1.2.3** *Η* **μικρότερη** *$\sigma$-άλγεβρα για την οποία η τυχαία μεταβλητή $X$ είναι μετρήσιμη, αποκαλείται* **η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται απο την τυχαία μεταβλητή** *$X$ και συμβολίζεται $\sigma(X)$.*

Με λόγια η $\sigma(X)$ είναι η μικρότερη $\sigma$-άλγεβρα που περιέχει την πληροφορία σχετικά με τις τιμές που μπορεί να πάρει η $X$.

Ιδιαίτερα χρήσιμο για τον χαρακτηρισμό της σ-άλγεβρας ως προς την οποία είναι μετρήσιμη μία τυχαία μετταβλητή είναι το ακόλουθο λήμμα, το οποίο είναι γνωστό και ως λήμμα των Doob-Dynkin:

**Θεώρημα 1.2.1** *Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$, δύο τυχαίες μεταβλητές. Η $Y$ είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα η οποία παράγεται από την τυχαία μεταβλητή $X$, $\sigma(X)$, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $g$, μετρήσιμη κατά Borel, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε $Y = g(X)$.*

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. Για την απόδειξη βλ. π.χ. [32]. $\square$

**Παράδειγμα 1.2.6** *Συνεχίζοντας από το παράδειγμα 1.1.19 ας ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή*

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{πρώτο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{δεύτερο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

*και $Z = X_1 + X_2$.*

*Οι $X_1$, $X_2$ και $Z$ είναι τυχαίες μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές παίρνουν τις ακόλουθες τιμές στο $\Omega$.*

| $\omega \in \Omega$ | $X_1(\omega)$ | $X_2(\omega)$ | $Z(\omega)$ |
|---|---|---|---|
| $HH$ | 1 | 1 | 2 |
| $HT$ | 1 | 0 | 1 |
| $TH$ | 0 | 1 | 1 |
| $TT$ | 0 | 0 | 0 |

*Η σ-άλγεβρα που παράγεται απο την $X_1$ είναι η*

$$\sigma(X_1) = \{\emptyset, \Omega, \{HH, HT\}, \{TH, TT\}\}$$

*Η σ-άλγεβρα που παράγεται απο την $Z$ είναι η*

$$\begin{aligned} \sigma(Z) &= \{\emptyset, \Omega, \{HH\}, \{TT\}, \{HT, TH\} \\ &\quad \{HT, TH, TT\}, \{HH, TT\}, \{HH, HT, TH\}\} \end{aligned}$$

*Οι σ-άλγεβρες αυτές είναι μικρότερες από την $\mathcal{F}$ (η οποία αποτελείται από 16 στοιχεία).*

**Παράδειγμα 1.2.7** *Έστω η σταθερή τυχαία συνάρτηση $X_0(\omega) = c$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται απο την συνάρτηση αυτή είναι η τετριμένη άλγεβρα $\{\emptyset, \Omega\}$.*

**Παράδειγμα 1.2.8** *Ένα άλλο παράδειγμα τυχαίας μετάβλητης είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου*

$$X_2(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \omega \in A \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

*Η σ-άλγεβρα που παράγεται απο την δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}_A$ είναι η $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.*

**Παράδειγμα 1.2.9** *Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή*

$$X_3(\omega) = \begin{cases} c_0, & \text{αν} \quad \omega \in A_0 \\ c_1, & \text{αν} \quad \omega \in A_1 \\ c_2, & \text{αν} \quad \omega \in A_2 \end{cases}$$

*όπου $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$ και τα σύνολα αυτά είναι ανα δύο ξένα μεταξύ τους. Η σ-άλγεβρα που παράγεται απο την τυχαία αυτή μεταβλητή είναι η*

$$\{\emptyset, \Omega, A_0, A_1, A_2, A_0 \cup A_1, A_0 \cup A_2, A_1 \cup A_2\}.$$

*Μπορούμε να δούμε ότι η τυχαία μεταβλητή $X_3$ μπορεί να γραφεί σαν*

$$X_3(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

*όπου $n = 3$. Τέτοιες μεταβλητές, οι οποίες μπορεί να γραφούν σαν γραμμικός συνδυασμός δεικτριών συναρτήσεων, αποκαλούνται* **απλές**.

### 1.2.5 Στοχαστικές διαδικασίες

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας.

**Ορισμός 1.2.4** *Μία* **στοχαστική διαδικασία** *είναι μία παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t \in T}$ οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^d$.*

Μία στοχαστική διαδικασία έχει λοιπόν δύο 'μεταβλητές', την $t$ και την $\omega$.

- Για κάθε $t \in T$ (το οποίο θεωρούμε δεδομένο και σταθερό) έχουμε μία τυχαία μεταβλητή

  $$\omega \to X_t(\omega); \omega \in \Omega$$

- Θεωρώντας σταθερό $\omega \in \Omega$ θεωρούμε την συνάρτηση

  $$t \to X_t(\omega); t \in T$$

  η οποία ονομάζεται **τροχιά** (path) της $X_t$.

**Διαισθητική αντιμετώπιση:**
Ένας τρόπος να κατανοήσουμε διαισθητικά την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας είναι να θεωρήσουμε μία συλλογή σωματιδίων τα οποία τα παρακολουθούμε στον χρόνο. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $t$ είναι 'χρόνος', ο οποίος μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτός, και το $\omega$ αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο 'σωματίδιο' ή πείραμα. Μία συγκεκριμένη επιλογή του $\omega$ θα ονομάζεται μία **πραγματοποίηση** της στοχαστικής διαδικασίας. Τότε $X_t(\omega)$ είναι η θέση του σωματιδίου $\omega$ την χρονική στιγμή $t$ ή ισοδύναμα το αποτέλεσμα του πειράματος

$\omega$ την χρονική στιγμή αυτή. Μπορούμε να ταυτίσουμε το κάθε $\omega$ με την συνάρτηση $t \to X_t(\omega)$ που απεικονίζει $T \to \mathbb{R}^d$. Τότε η $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}$ θα περιέχει την $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}$ που παράγεται απο σύνολα της μορφής

$$\{\omega; \omega(t_1) \in F_1; ...; \omega(t_k) \in F_k\} \;\; F_i \in \mathbb{R}^d \text{σύνολα Borel} .$$

Το παραπάνω σχόλιο μας οδηγεί στην παρακάτω εικόνα:

Μία στοχαστική διαδικασία μπορεί θεωρηθεί σαν ένα μέτρο πιθανότητας $P$ σε έναν κατάλληλα ορισμένο χώρο μέτρου δηλαδή

$$\boxed{\text{ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ} \Longleftrightarrow \text{ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ}}$$

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών.

**Παράδειγμα 1.2.10** *Ένα παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας με διακριτό σύνολο δεικτών $T$ (διακριτό χρόνο) είναι το ακόλουθο. Ας θεωρήσουμε ότι ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και $\omega_i$ ας είναι το αποτέλεσμα της $i$ ρίψης. Αν θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_i$ οι οποίες παίρνουν τις τιμές*

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \omega_i = H \\ -1, & \text{αν} \quad \omega_i = T \end{cases}$$

*Η τιμή της $X_i$ μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος ενός παίκτη, κατά την $i$ ρίψη αν ποντάρει 1 δραχμή στο αν έρθει κορώνα ή γράμματα. Η παραμέτρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο. Η τιμή της είναι τα κέρδη του παίκτη κατά την διάρκεια του παιγνιδιού.*

**Παράδειγμα 1.2.11** *Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $t \in \mathbb{R}^+$ και για κάθε $t$ ορίζουμε μία τυχαία μεταβλητή $X_t$ η οποία έχει την κατανομή πιθανότητας*

$$P(X_t \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

*Συνεπώς, η $X_t$ είναι μια στοχαστική διαδικασία και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η $X_t$ είναι μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέσο 0 και διασπορά $t$.*

Οι παρακάτω ορισμοί θα χρειαστούν στα επόμενα.

**Ορισμός 1.2.5** *Θα λέμε ότι μία ιδιότητα ισχύει* **σχεδόν βέβαια** *(σ.β) αν δεν ισχύει μόνο σε ένα σύνολο μέτρου 0.*

Πολλές φορές το μέτρο $P$ δεν είναι απαραίτητα μέτρο πιθανότητας λέμε ότι η ιδιότητα ισχύει **σχεδον παντού** αν ισχύει ο παραπάνω ορισμός.

**Παράδειγμα 1.2.12** *Για παράδειγμα $X \leq Y$, σ.β (ως προς το μέτρο $P$) αν $P(\{X > Y\}) = 0$.*

**Ορισμός 1.2.6** *Μία στοχαστική διαδικασία* $X_t$ *σε συνεχή χρόνο, ονομάζεται* **δεξιά συνεχής** *αν* $X_t = X_{t+}$ *όπου* $X_{t+} = \lim_{\epsilon\to 0} X_{t+\epsilon}$

**Ορισμός 1.2.7** *Η στοχαστική διαδικασία* $A_t$ *ονομάζεται* **αύξουσα** *αν για σχεδόν όλα τα* $\omega \in \Omega$ *η* $A_t(\omega)$ *είναι μία μη αρνητική, μη φθίνουσα δεξιά συνεχής συνάρτηση στο* $t \geq 0$.

**Ορισμός 1.2.8** *Η στοχαστική διαδικασία* $Y_t$ *ονομάζεται μία* **εκδοχή (version)** *ή μία* **τροποποίηση (modification)** *της στοχαστικής διαδικασίας* $X_t$ *αν για κάθε* $t \geq 0$ *ισχύει* $X_t = Y_t$ *σ.β δηλαδή* $P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1$.

Στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι υπάρχει μία δεξιά συνεχής εκδοχή για κάθε στοχαστική διαδικασία που μας ενδιαφέρει.

## 1.3 Ανεξαρτησία

Η έννοια της ανεξαρτησίας είναι μία έννοια πολύ μεγάλης σημασίας στην θεωρία πιθανοτήτων. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια της ανεξαρτησίας για γεγονότα, κατόπιν θα συνεχίσουμε ορίζοντας την έννοια της ανεξαρτησίας για συλλογές γεγονότων δηλαδή για $\sigma$-άλγεβρες και τέλος θα ορίζουμε την έννοια της ανεξαρτησίας για τυχαίες μεταβλητές.

### 1.3.1 Ανεξάρτητα γεγονότα

Όπως θυμόμαστε απο την βασική θεωρία πιθανοτήτων

**Ορισμός 1.3.1** *Δύο γεγονότα* $A$ *και* $B$ *λέγονται ανεξάρτητα αν* $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Χρησιμοποιώντας την διαίσθηση μας, λέμε ότι δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα αν το ένα δεν επηρεάζει το άλλο.

**Παράδειγμα 1.3.1** *Έστω ότι εκτελούμε ένα πείραμα κατά το οποίο ρίχνουμε δύο τίμια νομίσματα. Ας ονομάσουμε* $A$ *το γεγονός στο οποίο το πρώτο νόμισμα φέρνει γράμματα και* $B$ *το γεγονός στο οποίο το δεύτερο νόμισμα φέρνει γράμματα. Είναι προφανές ότι τα δύο αυτά γεγονότα είναι ανεξάρτητα, αφού το τι φέρνει το ένα νόμισμα δεν επηρεάζει το τι θα φέρει το άλλο. Πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε πως* $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

**Παράδειγμα 1.3.2** *Αν δύο γεγονότα* $A$ *και* $B$ *είναι ανεξάρτητα τότε και τα γεγονότα* $A^c$ *και* $B^c$ *είναι επίσης ανεξάρτητα.*
*Πράγματι,*

$$\begin{aligned}
P(A^c\cap B^c) &= P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B)\\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)\\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1-P(A))(1-P(B))\\
&= P(A^c)P(B^c)
\end{aligned}$$

Η έννοια της ανεξαρτησίας μπορεί να οριστεί και για περισσότερα των δύο γεγονότων.

**Ορισμός 1.3.2** *Μία πιθανόν άπειρη συλλογή γεγονότων $(A_n)_{n\in I}$ είναι μία ανεξάρτητη συλλογή αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J$ του $I$ ισχύει*

$$P(\bigcap_{n\in J} A_n) = \prod_{n\in J} P(A_n)$$

Από τον ορισμό φαίνεται ότι **δεν** είναι αρκετό για την ανεξαρτησία περισσοτέρων των δύο γεγονότων να έχουμε ανεξαρτησία ανα δύο για κάθε ζεύγος. Αυτό μπορεί να φανεί και από το παρακάτω παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.3.3** *Ένα παράδειγμα γεγονότων που είναι ανά δύο ανεξάρτητα αλλά όχι ανεξάρτητα είναι το ακόλουθο. Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και ας θεωρήσουμε ότι $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε τα σύνολα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $C = \{\omega_2, \omega_3\}$ είναι ανα δύο ανεξάρτητα αφού $P(A\cap B) = P(A)P(B)$, $P(A\cap C) = P(A)P(C)$ και $P(B\cap C) = P(B)P(C)$, αλλά όχι ανεξάρτητα εφόσον $P(A\cap B\cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$.*

## 1.3.2 Ανεξάρτητες $\sigma$-άλγεβρες

Ας θεωρήσουμε μία $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω σε ένα σύνολο $\Omega$.

**Ορισμός 1.3.3** *Οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\mathcal{F}_i$, $i \in I$ της $\mathcal{F}$ ονομάζονται* **ανεξάρτητες** *αν για κάθε υποσύνολο $J$ του $I$ και κάθε σύνολο $A_i \in \mathcal{F}_i$ έχουμε*

$$P(\bigcap_{n\in J} A_n) = \prod_{n\in J} P(A_n)$$

## 1.3.3 Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Με βάση τον ορισμό των ανεξαρτήτων αλγεβρών μπορούμε να ορίσουμε την έννοια των ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών.

**Ορισμός 1.3.4** *Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i$, $i \in I$ ονομάζονται* **ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές** *αν οι $\sigma$-άλγεβρες που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές (βλ. ορισμό 1.2.3) είναι ανεξάρτητες.*

**Παράδειγμα 1.3.4** *Ας θεωρήσουμε την ρίψη δύο νομισμάτων και ας ονομάσουμε $X_1$ την τυχαία μεταβλητή*

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{το πρώτο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

*και $X_2$ την τυχαία μεταβλητή*

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{το δεύτερο νόμισμα φέρνει κορώνα} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

*Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1$ και $X_2$ είναι ανεξάρτητες.*

Στο παραπάνω παράδειγμα, αν η $X_2$ εξαρτώταν και από το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης, οι $X_1$ και $X_2$ δεν θα ήταν ανεξάρτητες.

### 1.3.4 Το γινόμενο μέτρο (product measure)

Είναι πολύ σημαντικό στην σύντομη αυτή παρουσίαση της έννοιας της ανεξαρτησίας να κάνουμε μία συζήτηση για την κατανομή που ακολουθούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε τυχαίες μεταβλητές $X_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., d$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και που η κάθε μία απο αυτές επάγει το μέτρο πιθανότητας $\mu_{X_i}$. Κατασκευάζουμε την τυχαία μεταβλητή $X = (X_1, ..., X_d) \in \mathbb{R}^d$. Ποιό θα είναι το μέτρο πιθανότητας που επάγει στον $\mathbb{R}^d$ η τυχαία μεταβλητή $X$;

Για να απαντήσουμε την ερώτηση αυτή θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια του **γινόμενου μέτρου (product measure)**.

**Ορισμός 1.3.5** *Αν θεωρήσουμε τους χώρους μέτρου $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, .., d$, μπορουμε να ορίσουμε το* **γινομενο μέτρο (product measure)** $\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d$ *σύμφωνα με τον τύπο*

$$(\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d)(A_1 \times ... \times A_d) = \mu_1(A_1)...\mu_d(A_d)$$

*όπου $A_i \in \mathcal{F}_i$ και με $A_1 \times ... \times A_d$ συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $A_i$.*
*Το γινόμενο μέτρο ορίζεται επάνω στη* **γινόμενη σ-άλγεβρα** $\bigotimes_i \mathcal{F}_i$ *η οποία είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που παράγεται από όλα τα σύνολα της μορφής $A_1 \times ... \times A_k$, $k = 1, ..., d$ όπου με το γινόμενο εννοούμε εδώ το καρτεσιανό γινόμενο.*

Η ύπαρξη και μοναδικότητα του γινόμενου μέτρου μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά, αλλά για την απόδειξη παραπέμπουμε σε ένα οποιοδήποτε εγχειρίδιο θεωρίας μέτρου ή θεωρίας πιθανοτήτων (βλ. πχ. [15]). Επίσης, ο ορισμός του γινόμενου μέτρου μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση που το $d = \infty$. Η περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, ειδικά όταν μελετάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά στον χρόνο, τυχαίων πειραμάτων π.χ. άπειρες ρίψεις ανεξάρτητων νομισμάτων κλπ.

Το γινόμενο μέτρο είναι το μέτρο που αντιστοιχεί σε συλλογές ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών. Έχουμε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.3.1** *Έστω $X_i \in \mathbb{R}^d$ τυχαίες μεταβλητές που επάγουν τα μέτρα πιθανότητας $\mu_{X_i}$, $i = 1, ..., d$. Οι $X_i$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή $X = (X_1, ..., X_d) \in \mathbb{R}^d$ επάγει το μέτρο (δηλαδή έχει κατανομή) $\mu_X = \mu_{X_1} \otimes ... \otimes \mu_{X_d}$.*

**Απόδειξη:** Λόγω της ανεξαρτησίας το παραπάνω ισχύει για σύνολα της μορφής $B = B_1 \times ... \times B_d$. Για την γενίκευση σε οποιοδήποτε στοιχείο της γινόμενης σ-άλγεβρας απαιτείται η χρήση του θεωρήματος μονότονης κλάσης (monotone class theorem) και παραλείπεται. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [15]. □

**Παράδειγμα 1.3.5** *Έστω $X_1, ..., X_d$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε για την από κοινού συνάρτηση κατανομής τους $F(x_1, ..., x_d)$ ισχύει*

$$F(x_1, ..., x_d) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_d \leq x_d) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_d}(x_d)$$

*όπου $F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $X_i$, $i = 1, ..., d$.*

## 1.4 Μέση τιμή

Θα ασχοληθούμε τώρα με την έννοια της μέσης τιμής, τον ορισμό της και τις βασικές της ιδιότητες.

### 1.4.1 Ορισμός της μέσης τιμής

**Ορισμός 1.4.1** *Η* **μέση τιμή** *μιάς τυχαίας μεταβλητής $X$, ή οποιασδήποτε συνάρτησης της ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} E[X] &:= \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} x d\mu_X(x) := \int_{\mathbb{R}^d} x\mu_X(dx) \\ E[g(X)] &:= \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)d\mu_X(x) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mu_X(dx) \end{aligned}$$

Ορισμένες φορές μας ενδιαφέρει η μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής επάνω σε ένα υποσύνολο $A$ του συνόλου των γεγονότων. Αυτό το συμβολίζουμε ως $E(X;A) := \int_A X dP(\omega)$.

Ο παραπάνω ορισμός θέλει κάποια αιτιολόγηση ως πρός το τι ακριβώς σημαίνει το ολοκλήρωμα επάνω στο μέτρο $P$. Η πλήρης αιτιολόγηση μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο επάνω στην θεωρία πιθανοτήτων (π.χ. [13] ή [37]). Θα προσπαθήσουμε όμως εδώ να σκιαγραφήσουμε τα κυριότερα σημεία σχετικά με την μέση τιμή και να δώσουμε μία διαισθητική ιδέα της σημασίας της μέσης τιμής.

Θα ξεκινήσουμε με το διαισθητικό μέρος. Μία τυχαία μεταβλητή $X$ μπορεί να θεωρήσουμε ότι για κάθε πραγματοποίηση ενός τυχαίου πειράματος, την οποία συμβολίζουμε με $\omega$, παίρνει μία τιμή $X(\omega)$. Η μέση τιμή της είναι το άθροισμα όλων των τιμών αυτών, σταθμισμένες με την πιθανότητα εμφανίσεως της κάθε πραγματοποίησης του πειράματος $\omega$. Αν το $\Omega$ είναι αριθμήσιμο τότε η μέση τιμή θα είναι το άθροισμα των τιμών που θα παίρνει η $X$ σε όλες τις πιθανές εκβάσεις του πειράματος, $X(\omega)$, σταθμισμένων με την πιθανότητα της εμφανίσεως του κάθε $\omega$. Συνεπώς στην περίπτωση αυτή

$$E[X] = \sum_\omega X(\omega)P(\omega)$$

Η μέση τιμή είναι κατά κάποιο τρόπο η 'αναμενόμενη' τιμή για την τυχαία μεταβλητή $X$.

Για τον μαθηματικό ορισμό της μέσης τιμής για μία οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Αν η $X$ είναι μία απλή τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, δηλαδή μία μεταβλητή της μορφής

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega,$$

τότε η μέση τιμή της $X$ μπορεί να οριστεί σαν

$$E[X] := \sum_{i=1}^{n} c_i P(A_i)$$

Για το παραπάνω άθροισμα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$E[X] := \int \Omega X(\omega) P(d\omega) := \int_\Omega X dP$$

2. Για να ορίσουμε την μέση τιμή για γενικότερες τυχαίες μεταβλητές θα πρέπει να βασιστούμε στο γεγονός ότι κάθε θετική τυχαία μεταβλητή μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία απλών μεταβλητών $X_n$, η οποία είναι μονότονη και συγκεκριμένα αύξουσα που τείνει προς το $X$ καθώς $n \to \infty$, $(X_n \uparrow X)$. Η προσέγγιση αυτή **δεν** είναι μοναδική. Για παράδειγμα μία πιθανή προσέγγιση στην $X$ είναι η ακολουθία $X_n$ που ορίζεται ως εξής

$$X_n(\omega) = \begin{cases} k2^{-n}, & \text{αν} \quad k2^{-n} \leq X(\omega) < (k+1)2^{-n} \quad \text{και} \quad 0 \leq k \leq n2^n - 1 \\ n, & \text{αν} \quad X(\omega) \geq n \end{cases}$$

Με πιο συμπαγή μορφή η προσέγγιση αυτή μπορεί να γραφεί $X_n(\omega) = 2^{-n}[2^n f(\omega)] \wedge n$, όπου $[\cdot]$ είναι το ακέραιο μέρος. Μπορεί να δειχθεί ότι $X_n \uparrow X$.

3. Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε την μέση τιμή της ακολουθίας μεταβλητών $X_n$ που είναι απλές (οπότε η μέση τιμή δίνεται από τον παραπάνω ορισμό για απλές μεταβλητές). Αυτό οδηγεί στην ακολουθία πραγματικών αριθμών $E[X_n]$. Όπως θα δούμε και παρακάτω (βλ. Θεώρημα 1.6.2) μπορούμε να δείξουμε πως $X_n(\omega) \to X(\omega)$ και $E[X_n] \to E[X]$ καθώς $n \to \infty$.

4. Μπορουμε τώρα να ορίσουμε τη μέση τιμή για μία οποιαδήποτε θετική τυχαία μεταβλητή σαν

$$E[X] = \sup_Z E[Z]$$

όπου παίρνουμε το sup επάνω στο σύνολο όλων των απλών τυχαίων μεταβλητών $Z$ για τις οποίες ισχύει $Z \leq X$.

5. Τέλος, για να ορίσουμε την μέση τιμή για μία οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $X$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $X = X^+ - X^-$ όπου $X^+$ και $X^-$ είναι θετικές τυχαίες μεταβλητές και να ορίσουμε

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-]$$

**Σχόλιο:** Τα παραπάνω βήματα μπορεί να αιτιολογηθούν αυστηρά με την διατύπωση καταλλήλων θεωρημάτων. Κάτι τέτοιο το αποφεύγουμε εδώ, αλλά παραπέμπουμε τον αναγνώστη είτε σε οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης (π.χ. [35]) είτε σε βιβλία σχετικά με τις πιθανότητες (π.χ. [14]).

Σε μερικές περιπτώσεις η μέση τιμή μπορεί να γραφεί με απλούστερη μορφή. Αν η τυχαία μεταβλητή $X$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας[3] $f(x)$ τότε η μέση τιμή της $X$ μπορεί να γραφεί σαν το σύνηθες ολοκλήρωμα Riemann

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Κατά πλήρη αναλογία, στην περίπτωση αυτή η μέση τιμή οποιασδήποτε συνάρτησης της $X$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx.$$

Πολύ χρήσιμος σε ορισμένες εφαρμογές (που σχετίζονται κυρίως με τον υπολογισμό της μέσης τιμής ποσοτήτων που εξαρτώνται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές) είναι και ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος επάνω στο γινόμενο μέτρο δύο ή περισσοτέρων μέτρων σαν πολλαπλά ή επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα επάνω στα επιμέρους μέτρα. Ο τρόπος να γίνει αυτό δίνεται στο παρακάτω θεώρημα που είναι ουσιαστικά γενίκευση του θεωρήματος του Fubini, που έχουμε συναντήσει σχετικά με τα πολλαπλά ολοκληρώματα στον ολοκληρωτικό λογισμό, και που παρατίθεται εδώ χωρίς απόδειξη.

**Θεώρημα 1.4.1 (Tonelli-Fubini)** *Έστω $\mu_1$ και $\mu_2$ δύο μέτρα στους χώρους $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ αντίστοιχα. Για κάθε συνάρτηση $\Phi$ που είναι $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -μετρήσιμη και που είναι ολοκληρώσιμη ως προς το γινόμενο μέτρο $\mu_1 \otimes \mu_2$ ισχύει*

$$\begin{aligned} \int \Phi(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \left\{ \int \Phi(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right\} \mu_2(dx_2) \\ &= \int \left\{ \int \Phi(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right\} \mu_1(dx_1) \end{aligned}$$

*Η γενίκευση σε γινόμενα με περισσότερα των δύο μέτρων είναι ευνόητη.*

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. Παραπέμπουμε στον [14]. □

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα, και στην επόμενη παράγραφο θα αναφερθούμε στις ιδιότητες της μέσης τιμής.

**Παράδειγμα 1.4.1** *Αν $X = \mathbf{1}_A$ τότε $E[X] = E[\mathbf{1}_A] = P(A)$.*

[3] Αυτό ισοδύναμα μπορεί να εκφραστεί ότι το μέτρο $\mu_X$ έχει μία παράγωγο με την έννοια της παραγώγου Radon-Nikodym. Στο θέμα της παραγώγου Radon-Nikodym θα επανέλθουμε αργότερα.

**Παράδειγμα 1.4.2** *Αν $X(\omega)$ είναι το κέρδος από το τυχερό παιγνίδι κατά το οποίο ποντάρουμε 1 δραχμή στην έκβαση ενός τίμιου νομίσματος. Τότε $E[X] = 0$. Μπορούμε να υπολογίσουμε επίσης οποιαδήποτε συνάρτηση του $X$. Για παράδειγμα*

$$E[\exp(\lambda X)] = \frac{1}{2}\exp(\lambda) + \frac{1}{2}\exp(-\lambda) = \cosh(\lambda)$$

**Παράδειγμα 1.4.3** *Έστω $X$ μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda$, δηλαδή $X : \Omega \to \mathbb{N}$ και*

$$P(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$$

*Τότε*

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{j=0}^{\infty} jP(X = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.4.4** *Έστω $X$ μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda$, δηλαδή $P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy$. Τότε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $h(X)$ όπου $h$ οποιαδήποτε μη αρνητική συνάρτηση είναι ίση με το ολοκλήρωμα*

$$E[h(X)] = \int_0^{\infty} h(x)\lambda e^{-\lambda x} dx$$

*εφόσον βέβαια αυτό συγκλίνει.*

**Παράδειγμα 1.4.5** *Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$ δηλαδή*

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

*Η μέση τιμή οποιασδήποτε συνάρτησης $h(X)$ της τυχαίας μεταβλητής $X$ είναι ίση με*

$$E[h(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

*Λόγω συμμετρίας μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε ότι $E[X^n] = 0$ για $n$ περιττό ακέραιο.*

**Παράδειγμα 1.4.6 Η μέση τιμή κάτω από αλλαγή μέτρου** *Στον ορισμό της μέσης τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής $X$ χρησιμοποιείται κάποιο μέτρο πιθανότητας το οποίο σχετίζεται με την τυχαία μεταβλητή (στον ορισμό θεωρήσαμε* ότι το μέτρο που χρησιμοποιείται είναι το μέτρο που επάγει η $X$. Πολλές φορές, ειδικά στην χρηματοοικονομική, μπορεί να θεωρήσουμε ότι κρατάμε σταθερές τις τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής (ή γενικότερα μίας στοχαστικής διαδικασίας) και μεταβάλλουμε το μέτρο κάτω από το οποίο οι τιμές αυτές εμφανίζονται. Θα δούμε τώρα πως αλλάζει η έκφραση για την μέση τιμή μίας συνάρτησης $f$ της τυχαίας μεταβλητής $X$ όταν αλλάζει το μέτρο κάτω από το οποίο την υπολογίζουμε.

Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $X$ και ας πάρουμε την μέση τιμή της πρώτα κάτω από το μέτρο $P$ και μετά κάτω από το κάποιο άλλο μέτρο $Q$. Ας υποθέσουμε αρχικά για απλότητα ότι το σύνολο $\Omega$ είναι αριθμήσιμο. Έχουμε ότι

$$E_P[f(X)] = \sum_\omega P(\omega)f(X(\omega)) = \sum_\omega Q(\omega)\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}f(X(\omega)) = E_Q\left[\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}f(X(\omega))\right]$$

Η ποσότητα $L(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$ είναι η ποσότητα με την οποία πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την συνάρτηση $f(X)$ για γίνει ο υπολογισμός της μέσης τιμής στο νέο μέτρο $Q$. Η ποσότητα αυτή, όπως θα δούμε και στα επόμενα, παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά και ονομάζεται **πυκνότητα της τιμής κατάστασης (state price density)**.

Στην περίπτωση που το σύνολο $\Omega$ δεν είναι αριθμήσιμο, μπορούμε και πάλι να γράψουμε μία παρόμοια σχέση αλλά το $L$ τώρα παίρνει μία διαφορετική μορφή, $L(\omega) = \frac{dP}{dQ}(\omega)$. Η έννοια της παραγώγου των δύο μέτρων (παράγωγος Radon-Nikodym) θα οριστεί στα επόμενα.

**Παράδειγμα 1.4.7** *Έστω $X \geq 0$ τυχαία μεταβλητή. Ισχύει ότι*

$$E[X^p] = p\int_0^\infty P(X > x)x^{p-1}dx = p\int_0^\infty P(X \geq x)x^{p-1}dx,\ p > 0$$

*αρκεί βέβαια να ορίζεται η ποσότητα $E[X^p]$.*

Θα αποδείξουμε τον ένα από τους ισχύρισμους αυτούς και αφήνουμε τον άλλο στον αναγνώστη. Μπορούμε να δούμε πως ισχύει ότι

$$x^p = \int_0^{x^p} ds = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{}x^p > s\}ds.$$

Θέτοντας $x = X$ και παίρνοντας την μέση τιμή έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[X^p] &= E\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X^p>s\}}ds\right] = E\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X>s^{1/p}\}}ds\right] \\ &= pE\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X>x\}}x^{p-1}dx\right] = p\int_0^\infty P(X > x)x^{p-1}dx \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε την μέση τιμή με το ίσο της σαν το ολοκλήρωμα επάνω στο μέτρο $P$ και χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini για τα πολλαπλά ολοκληρώματα.

### 1.4.2 Ιδιότητες της μέσης τιμής

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ορισμένες βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής που είναι απαραίτητες για τα επόμενα.

**Θεώρημα 1.4.2** *Η μέση τιμή έχει τις παρακάτω σημαντικές ιδιότητες*

(i) *Η μέση τιμή είναι γραμμικός τελεστής δηλαδή αν $X$ και $Y$ είναι τυχαίες μεταβλητές και $c_1$ και $c_2$ σταθερές τότε*

$$E[c_1X + c_2Y] = c_1E[X] + c_2E[Y]$$

(ii) *Αν $X \leq Y$, σ.β. τότε $E[X] \leq E[Y]$.*

(iii) *Αν $X = c$, σ.β. όπου $c$ σταθερά, τότε $E[X] = c$.*

(iv) *Αν $X \geq 0$ τότε $E[X] := \int X\,dP = 0$ αν και μόνο αν $X = 0$ σχεδόν παντού (ως προς το μέτρο $P$).*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη είναι πολύ απλή και αφήνεται σαν άσκηση. Για την απόδειξη του $(iv)$ χρειάζεται το θεώρημα μονότονης σύγκλισης (βλ. Θεώρημα 1.6.2). Η απόδειξη του $(iv)$ θα δοθεί σαν παράδειγμα αργότερα (βλ. Παράδειγμα 1.6.1). □

Θα συνεχίσουμε αναφέροντας τέσσερεις σημαντικές ανισότητες που ισχύουν για την μέση τιμή:

**Θεώρημα 1.4.3 (Η ανισότητα Chebychev )** *Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή. Ισχύει η ακόλουθη ανισότητα*

$$P(\mid X(\omega) \mid \geq a) \leq \frac{E[X^2]}{a^2}$$

**Απόδειξη:** Ισχύει η ανισότητα $a^2\mathbf{1}_{\{|X|\geq a\}} \leq X^2$. Πράγματι, αν το $\omega$ είναι τέτοιο ώστε $\mid X \mid < a$ τότε η παραπάνω σχέση γίνεται $0 \leq X^2$ η οποία ισχύει πάντοτε. Αν τώρα $\omega$ είναι τέτοιο ώστε $\mid X \mid \geq a$ τότε η παραπάνω σχέση ισχύει επίσης. Μπορούμε τώρα να πάρουμε την μέση τιμή στην παραπάνω ανισότητα οπότε

$$E[a^2\mathbf{1}_{\{|X|\geq a\}}] \leq E[X^2]$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο. □

Επίσης πολύ σημαντική είναι η ανισότητα του Jensen

**Θεώρημα 1.4.4 (Ανισότητα του Jensen )**
*Έστω $g : G \to \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση [4] σε ένα ανοικτό υποσύνολο $G$ του $\mathbb{R}$ και $X$ μία τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $E[\mid X \mid] < \infty$, $P(X \in G) = 1$ και $E[\mid g(X) \mid] < \infty$. Τότε*

$$E[g(X)] \geq g(E[X])$$

[4] Μία κυρτή συνάρτηση είναι μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(px+(1-p)y) \leq pg(x)+(1-p)g(y)$, $0 \leq p \leq 1$

**Απόδειξη:** Παραλείπεται (βλ. π.χ. [15]). □

Παραδείγματα κυρτών συναρτήσεων είναι οι $| x |$, $x^2$, $e^{ax}$.

Τέλος θα χρησιμοποιήσουμε συχνά την παρακάτω ανισότητα:

**Θεώρημα 1.4.5 (Η ανισότητα Hölder)**
*Έστω $X, Y$ τυχαίες μεταβλητές. Ισχύει ότι*

$$\{E[| XY |^r]\}^{1/r} \leq \{E[| X |^p]\}^{1/p}\{E[| Y |^q\}^{1/q}$$

*όπου $p, q, r > 0$ και $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$, αρκεί φυσικά οι παραπάνω ποσότητες να ορίζονται. Στην ειδική περίπτωση όπου $r = 1, p = q = 2$ παίρνουμε την ανισότητα Cauchy-Schwartz.*

**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε την ειδική περίπτωση $r = 1, p = q = 2$ και αφήνουμε την γενική περίπτωση σαν άσκηση. Για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leq E[(\lambda X + Y)^2] = \lambda^2 E[X^2] + 2\lambda E[XY] + E[Y^2]$$

Θεωρώντας την παραπάνω παράσταση σαν ένα τριώνυμο στο $\lambda$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες για το πρόσημο του τριωνύμου καταλήγουμε στο ότι

$$E[XY]^2 - E[X^2]E[Y^2] \leq 0$$

που είναι και το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 1.4.6 (Ανισότητα Minkowski)** *Έστω $X, Y$ δύο τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $\{E[| X |^p]\}^{\frac{1}{p}}, \{E[| Y |^p]\}^{\frac{1}{p}} < \infty$, $p > 1$. Ισχύει ότι*

$$\{E[| X + Y |^p]\}^{\frac{1}{p}} \leq \{E[| X |^p]\}^{\frac{1}{p}} + \{E[| Y |^p]\}^{\frac{1}{p}}$$

**Απόδειξη:** Αρκεί να γράψουμε

$$| X + Y |^p = | X + Y | \, | X + Y |^{p-1} \leq (| X | + | Y |) \; | X + Y |^{p-1}$$

να πάρουμε την μέση τιμή και να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Hölder.□

**Σχόλιο:** Το σύνολο όλων των τυχαίων μεταβλητών $X$ για τις οποίες ισχύει $\{E[| X |^p]\}^{1/p} < \infty$ αποτελεί έναν χώρο που ονομάζεται ο χώρος $L^p(P)$ ή για συντομία ο χώρος $L^p$. Ο χώρος αυτός μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι πλήρης[5] για $p > 0$. Η ποσότητα $|| \cdot ||_p \equiv \{E[| \cdot |^p]\}^{1/p}$ μπορεί να αποδειχθεί ότι αποτελεί μία νόρμα για τον χώρο $L^p$. Στην ειδική περίπτωση όπου $p = 2$ δηλαδή στην περίπτωση του χώρου $L^2$ μπορούμε να δείξουμε ότι η νόρμα παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο, συνεπώς ο $L^2$ είναι ένας χώρος Hilbert. Αν οι παραπάνω έννοιες δεν είναι γνωστές μία σύντομη εισαγωγή παρατίθεται στο παράρτημα του κεφαλαίου.

Θα κλείσουμε την παρουσίαση των ιδιοτήτων της μέσης τιμής με την συζήτηση της σχέσης μέσης τιμής και ανεξαρτησίας. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

[5] Δηλαδή στο χώρο αυτό κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε ένα στοιχείο του $L^p$

**Θεώρημα 1.4.7** *Έστω $X_i$, $i = 1, ..., d$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε*

$$E[\prod_{i=1}^{d} X_i] = \prod_{i}^{d} E[X_i]$$

**Απόδειξη:** Η απόδειξη χρησιμοποιεί την γενίκευση του θεωρήματος του Fubini για πολλαπλά ολοκληρώματα, στην περίπτωση ολοκληρωμάτων επάνω σε μέτρα πιθανοτήτων. Λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβλητών το μέτρο πιθανότητας που επάγει (ή αλλιώς η κατανομή) της $X = (X_1, ..., X_d)$ είναι το γινόμενο μέτρο $\mu_X = \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d$ όπου $\mu_i$ είναι οι κατανομές των $X_i$. Το θεώρημα του Fubini εξασφαλίζει ότι το ολοκλήρωμα επάνω στο γινόμενο μέτρο υπάρχει και είναι ίσο με

$$\int f d(\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d) = \int ... \left\{ \int \left\{ \int f(x_1, ..., x_d) \mu_1(dx_1) \right\} \mu_2(dx_2) \right\} ... \mu_d(dx_d)$$

Για την απόδειξη του αποτελέσματος αυτού παραπέμπουμε στο [14]. Από την παραπάνω σχέση, θέτοντας $f(x_1, ..., x_d) = x_1 \cdots x_d$ καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

### 1.4.3 Διακύμανση-Συνδιακύμανση

Μία σημαντικη ποσότητα είναι και η διακύμανση (variance) μίας τυχαίας μεταβλητής. Η διακύμανση μας δείχνει πόσο κοντά στην μέση τιμή της βρίσκονται οι τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής $X$.

**Ορισμός 1.4.2** *Σαν* **διακύμανση (variance,)** $Var(X)$, *της τυχαίας μεταβλητής $X$ ορίζεται η ποσότητα*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Για παραπάνω από μία τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ορίσουμε και την συνδιακύμανση (covariance).

**Ορισμός 1.4.3** *Έστω $X$ και $Y$ δύο τυχαίες μεταβλητές. Σαν* **συνδιακύμανση** *τους* **(covariance,)** $Cov(X, Y)$, *ορίζεται η ποσότητα*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

**Παράδειγμα 1.4.8 Διακύμανση αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών**
*Έστω $X_i$, $i = 1, ..., d$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε*

$$Var(\sum_{i=1}^{d} X_i) = \sum_{i=1}^{d} Var(X_i).$$

*Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι απλή εφαρμογή του ορισμού και του θεωρήματος 1.4.7 και αφήνεται σαν άσκηση.*

**Παράδειγμα 1.4.9 Συνδιακύμανση δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών**
*Έστω $X$ και $Y$ δύο ανεξαρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, $Cov(X,Y) = 0$.*
*Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι απλή εφαρμογή του ορισμού και του θεωρήματος 1.4.7 και αφήνεται σαν άσκηση.*

**Παράδειγμα 1.4.10** *Για την συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών $X$ και $Y$ ισχύει*

$$| Cov(X,Y) | \leq \{Var(X)Var(Y)\}^{1/2}$$

*Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού είναι άμεση με την χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz.*

## 1.5 Υπό συνθήκη μέση τιμή

Η έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής (conditional expectation) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην στοχαστική ανάλυση.

### 1.5.1 Ορισμός της υπό συνθήκη μέσης τιμής

Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης έχει μία πρώτη επαφή με την έννοια της υπό συνθήκη πιθανότητας και την έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής από την στοιχειώδη θεωρία πιθανοτήτων. Η προσέγγιση μας στην έννοια αυτή είναι να ξεκινήσουμε με μία σχετικά αφηρημένη προσέγγιση και μετά να δώσουμε παραδείγματα πως η αφηρημένη αυτή έννοια μπορεί να συσχετιστεί με εφαρμογές και με προσλαμβάνουσες παραστάσεις από την στοιχειώδη θεωρία των πιθανοτήτων.

**Ορισμός 1.5.1** *Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$, μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ και μία τυχαία μεταβλητή $X \in \mathcal{F}_0$ (δηλαδή $\mathcal{F}_0$ μετρήσιμη) για την οποία ισχύει $E[| X |] < \infty$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή $Y := E[X \mid \mathcal{F}]$ με τις ιδιότητες*

- *(i)* $Y \in \mathcal{F}$
- *(ii)* $\int_A X dP = \int_A Y dP, \;\; \forall\, A \in \mathcal{F}$. *Η τυχαία μεταβλητή $E[X \mid \mathcal{F}]$ ονομάζεται η* **υπό συνθήκη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X$ ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$** .

Από τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να δούμε ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή δεν ορίζεται με μοναδικό τρόπο αλλά πάντοτε modulo συνόλων μέτρου 0.

Διαισθητικά μπορούμε να θεωρήσουμε την $\mathcal{F}$ σαν την 'πληροφορία' την οποία έχουμε στην διάθεση μας. Στην περίπτωση αυτή η υπό συνθήκη μέση τιμή $E[X \mid \mathcal{F}]$ είναι η **καλύτερη εκτίμηση** (κατά την έννοια της ελαχιστοποίησης της $L^2$ νόρμας του σφάλματος) της τυχαίας μεταβλητής $X$ δεδομένης της πληροφορίας που έχουμε στην διάθεση μας. Μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 1.5.1** *Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει $E[X^2] < \infty$ και $\mathcal{F}$ μία σ-άλγεβρα. Η τυχαία μεταβλητή $Y = E[X \mid \mathcal{F}]$ είναι η καλύτερη $\mathcal{F}-$μετρήσιμη κατά ελάχιστο τετράγωνο εκτιμήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X$ δηλαδή ελαχιστοποιεί την ποσότητα $E[(X - Y)^2]$.*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του χώρου των τυχαίων μεταβλητών $X$ για τις οποίες ισχύει $E[X^2] < \infty$, ο οποίος είναι ένας χώρος Hilbert που θα συμβολίσουμε σαν $L^2$, και συσχετίζει την υπό συνθήκη μέση τιμή $Y$ με την προβολή του στοιχείου $X$ σε ένα κατάλληλο υπόχωρο του χώρου $L^2$. Η ιδιότητα που ισχυριζόμαστε ακολουθεί από τις ιδιότητες των προβολών (βλ. παράρτημα του κεφαλαίου). Παραπέμπουμε στο [37] για λεπτομέρειες. □

**Σχόλια**

1. Έστω $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ η τετριμένη σ-άλγεβρα $\mathcal{O} = \{\emptyset, \Omega\}$. Τότε όπως μπορεί εύκολα να φανεί από τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής ότι ισχύει $E[X \mid \mathcal{O}] = E[X]$ δηλαδή η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X$ [6]. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με την διαισθητική μας αντιμετώπιση του θέματος της υπό συνθήκη μέσης τιμής: Εφόσον η τετριμένη άλγεβρα $\mathcal{O}$ μας προσφέρει το ελάχιστο ποσό πληροφορίας, τότε με την υπό συνθήκη μέση τιμή κάποιας μεταβλητής επάνω στην άλγεβρα αυτή απλά λαμβάνουμε την μέση τιμή της μεταβλητής αυτής.

2. Έστω $\mathcal{F} = \sigma(X)$, η σ-άλγεβρα η οποία παράγεται από την τυχαία μεταβλητή $X$. Στην περιπτωση αυτή βλέπουμε ότι $E[X \mid \mathcal{F}] = X$. Αυτό είναι απλό επακόλουθο του ορισμού της υπό συνθήκη μέσης τιμής [7]. Χρησιμοποιώντας την έρμηνεία της σ-άλγεβρας σαν πληροφορία μπορούμε να ερμηνεύσουμε την $\mathcal{F}$ σαν την μέγιστη πληροφορία που έχουμε στην διάθεση μας για την τυχαία μεταβλητή $X$, άρα χρησιμοποιώντας την μέγιστη αυτή πληροφορία μπορούμε να ανακτήσουμε μέσω της υπό συνθήκη μέσης τιμής επάνω στην $\mathcal{F}$, την ίδια την τυχαία μεταβλητή.

3. Όλες οι άλλες επιλογές για σ-άλγεβρες είναι κάπου μεταξύ των δύο παραπάνω περιπτώσεων σε σχέση με το περιεχόμενο της πληροφορίας που δίνουν για την τυχαία μεταβλητή, μέσω της υπό συνθήκη μέσης τιμής.

### 1.5.2 Ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής

Η υπό συνθήκη μέση τιμή ικανοποιεί τις συνηθισμένες ιδιότητες που ικανοποιεί η μέση τιμή (π.χ. την γραμμικότητα, την ανισότητα του Jensen κ.α.) αλλά εκτός από αυτές έχει και μερικές σημαντικές επιπρόσθετες ιδιότητες. Είναι καλό ο αναγνώστης να εξοικειωθεί με τις ιδιότητες αυτές οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες για το υλικό που ακολουθεί.

[6] Εφόσον η εξίσωση $\int_\Omega X dP = \int_\Omega Y dP$ ικανοποιείται για $Y = E[X]$ και αφού η εξίσωση πάντοτε ισχύει αν η ολοκλήρωση γίνεται επάνω σε ένα σύνολο μέτρου 0.

[7] Εφόσον η τυχαία μεταβλητή $X$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη και $\int_A X dP = \int_A X dP$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$

**Θεώρημα 1.5.2 Πρόσθετες ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής.**

$(i)$ $E[E[X \mid \mathcal{F}]] = E[X]$.
*Η ιδιότητα αυτή μερικές φορές ονομάζεται νόμος της* **ολικής πιθανότητας**.

$(ii)$ *Αν* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ *τότε*

$$\begin{array}{ll} (a) & E[E[X \mid \mathcal{F}_1] \mid \mathcal{F}_2] = E[X \mid \mathcal{F}_1] \\ (b) & E[E[X \mid \mathcal{F}_2] \mid \mathcal{F}_1] = E[X \mid \mathcal{F}_1] \end{array}$$

*ή με άλλα λόγια η μικρότερη σ-άλγεβρα (ή η μικρότερη πληροφορία) πάντοτε υπερισχύει!*

$(iii)$ *Αν* $A \in \mathcal{G}$ *και* $E \mid Y \mid < \infty$ *τότε*

$$E[Y\mathbf{1}_A \mid \mathcal{G}] = \mathbf{1}_A E[Y \mid \mathcal{G}]$$

$(iv)$ *Αν* $X \in \mathcal{G}$ *και* $E[\mid Y \mid], E[\mid XY \mid] < \infty$ *τότε*

$$E[XY \mid \mathcal{G}] = XE[Y \mid \mathcal{G}]$$

*ή με άλλα λόγια μπορούμε να βγάλουμε έξω από την υπό συνθήκη μέση τιμή ότι είναι γνωστό!*

$(v)$ *Αν* $X$ *είναι μία τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από την σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}$ *τότε*

$$E[X \mid \mathcal{F}] = E[X]$$

*ή με άλλα λόγια, η πληροφορία που περιέχεται στην* $\mathcal{F}$ *λόγω της ανεξαρτησίας, είναι άχρηστη για την καλύτερη πρόβλεψη της* $X$*, οπότε είναι το ίδιο σαν να χρησιμοποιήσουμε την τετριμένη σ-άλγεβρα* $\mathcal{O}$*!*

Δίνουμε σαν παράδειγμα την απόδειξη μίας από τις ιδιότητες αυτές και αφήνουμε τις υπόλοιπες σαν ασκήσεις.

**Παράδειγμα 1.5.1** *Ας αποδείξουμε την ιδιότητα* $(ii)(b)$*. Αν* $A \in \mathcal{F}_1$ *τότε*

$$\int_A E[X \mid \mathcal{F}_1] dP = \int_A X dP$$

*Εφόσον* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ *και* $A \in \mathcal{F}_1$ *τότε* $A \in \mathcal{F}_2$ *και έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} \int_A X dP &= \int_A E[X \mid \mathcal{F}_2] dP \\ &\quad (A \in \mathcal{F}_2, \ \textit{χρησιμοποιούμε την τ.μ. } X) \\ \int_A E[X \mid \mathcal{F}_2] dP &= \int_A E[E[X \mid \mathcal{F}_2] \mid \mathcal{F}_1] dP \\ &\quad (A \in \mathcal{F}_1 \ \textit{χρησιμοποιούμε την τ.μ. } Y = E[X \mid \mathcal{F}_2]) \end{aligned}$$

*Αυτό δείχνει ότι*

$$\int_A X dP = \int_A E[E[X \mid \mathcal{F}_2] \mid \mathcal{F}_1] dP$$

*έτσι ώστε*

$$E[E[X \mid \mathcal{F}_2] \mid \mathcal{F}_1] = E[X \mid \mathcal{F}_1]$$

**Παράδειγμα 1.5.2** *Για την απόδειξη του νόμου της ολικής πιθανότητας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ιδιότητα με την επιλογή $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}$ (την τετριμένη σ-άλγεβρα) και $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $E[X \mid \mathcal{O}] = E[X]$ και την $(ii)(b)$ το ζητούμενο αποτέλεσμα ακολουθεί.*

Θα κλείσουμε την μελέτη της υπό συνθήκη μέσης τιμής με ορισμένα παραδείγματα που διασαφηνίζουν τον υπολογισμό της και που δείχνουν ότι ουσιαστικά είναι εξέλιξη συναφών ιδεών που έχουμε ήδη συναντήσει στην στοιχειώδη θεωρία των πιθανοτήτων.

**Παράδειγμα 1.5.3** *Ας θυμηθούμε τον τύπο για την υπό συνθήκη πιθανότητα*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

*όπου το αριστερό μέλος είναι η πιθανότητα ότι το γεγονός $A$ πραγματοποιείται* **δεδομένου** *ότι το γεγονός $B$ συνέβει. Χρησιμοποιώντας την ορολογία που έχουμε εισάγει μέχρι τώρα μπορούμε να δούμε ότι αν $B \in \mathcal{F}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε την κλάση των γεγονότων*

$$B \cap \mathcal{F} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\} := \mathcal{F}_B$$

*η οποία είναι μία σ-άλγεβρα. Το μέτρο $P^*$ που ορίζεται σαν*

$$P^*(A \cap B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.1}$$

*είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{F}_B$ οπότε $(B, \mathcal{F}_B, P^*)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων. Επίσης, για δεδομένο $A$ μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο $P_B$ σαν*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B)$$

*επάνω στην $\mathcal{F}$ και βλέπουμε ότι $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων. Το μέτρο αυτό ονομάζεται υπό συνθήκη μέτρο πιθανότητας.*

*Ας θεωρήσουμε τώρα σύνολα γεγονότων $B_i$ τέτοια ώστε $\cup_i B_i = \Omega$. Μπορούμε να ορίσουμε υπό συνθήκη μέτρα πιθανοτήτων $P_{B_i} = P(\cdot \mid B_i)$ και μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τον τύπο ολικής πιθανότητας για κάθε γεγονός $A \in \mathcal{F}$*

$$P(A) = \sum_i P(A \mid B_i) P(B_i)$$

*Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X$ επάνω στα μέτρα $P_{B_i}$ (μέση τιμή δεδομένου τα $B_i$) η οποία είναι*

$$E_{B_i}[X] := \int X dP_{B_i} = \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP.$$

*Ορίζουμε τώρα την νέα τυχαία μεταβλητή*

$$X_0(\omega) := \sum_i E_{B_i}[X] \mathbf{1}_{B_i}(\omega).$$

*Η τυχαία αυτή μεταβλητή είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα υποσύνολα $B_i$, $\mathcal{F}_0$. Από τον ορισμό αυτό ακολουθεί ότι*

$$\int_A X_0 dP = \int_A X dP, \ \ \forall A \in \mathcal{F}$$

*Βλέπουμε λοιπόν ότι η τυχαία μεταβλητή $X_0$ είναι η υπό συνθήκη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X$ ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0$ δηλαδή $X_0 = E[X \mid \mathcal{F}_0]$.*

Πολλές φορές μπορεί να χρειαστεί να υπολογίσουμε την υπο συνθήκη μέση τιμή κάποιας τυχαίας μεταβλητής $Y$ δεδομένης της τιμής ή των τιμών κάποιας άλλης τυχαίας μεταβλητής $X$. Στην περίπτωση αυτή, εννοούμε απλά την υπό συνθήκη μέση τιμή της $Y$ ως προς την σ-άλγεβρα που παράγει η $X$ δηλαδή ως προς την $\sigma(X)$. Επίσης, πολλές φορές μπορεί να χρειαστεί να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής ως προς κάποιο γεγονός. Αυτό είναι μία ειδική περίπτωση των παραπάνω θεωρώντας την σ-άλγεβρα που παράγεται από το γεγονός αυτό.

**Παράδειγμα 1.5.4** *Έστω $X$, $Y$ διακριτές τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τις τιμές $X_j$ και $Y_k$ αντίστοιχα. Τότε*

$$E[Y \mid X = x_j] = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P[Y = y_k \mid X = x_j]$$

*και αν ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή*

$$f(X) = \begin{cases} E[Y \mid X = x], & \text{αν} \quad P(X = x) > 0 \\ \text{οποιαδήποτε} \quad \text{τιμή}, & \text{αν} \quad P(X = x) = 0 \end{cases}$$

*μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει*

$$E[Y \mid X] = f(X)$$

**Παράδειγμα 1.5.5** *Έστω $X$ και $Y$ συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Τότε*

$$E[Y \mid X = x] := \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y \mid x) dy$$

*όπου*

$$f(y \mid x) := \frac{f(y,x)}{f_X(x)}$$

*όπου* $f(y,x)$ *είναι η απο κοινού πυκνότητα πιθανότητας των* $Y$ *και* $X$ *και* $f_X(x)$ *η πυκνότητα πιθανότητας της* $X$. *Η* $E[Y \mid X]$ *είναι η τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει* $E[Y \mid X](\omega) = E[Y \mid X = x]$ *αν* $X(\omega) = x$.

**Παράδειγμα 1.5.6** *Αν οι* $X_i$ *είναι ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές και* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *Υπολογίστε την υπό συνθήκη μέση τιμή* $E[X_j \mid \sigma(S_n)] := E[X_j \mid S_n]$ *για* $n \leq n$. *Το παράδειγμα αυτό οφείλεται στον [37].*

*Ας ονομάσουμε* $\mu_X$ *τον κοινό νόμο των* $X_i$. *Ας συμβολίσουμε με* $s$ *το άθροισμα* $s = x_1 + ... + x_n$ *και έστω* $B$ *ένα σύνολο Borel. Έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
E[X_1; \{S_n \in B\}] &= \int_{s \in B} ... \int x_1 \mu_X(dx_1)...\mu_X(dx_n) \\
& \quad \text{λόγω συμμετρίας} \\
&= \int_{s \in B} ... \int x_i \mu_X(dx_1)...\mu_X(dx_n) \\
&= E[X_i; \{S_n \in B\}],\ i = 1, ..., n
\end{aligned}$$

*Αν* $Y$ *είναι η τυχαία μεταβλητή* $Y = E[X_1 \mid S_n]$ *από τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής θα ισχύει*

$$E[Y; \{S_n \in B\}] = E[X_1; \{S_n \in B\}]$$

*Από το παραπάνω όμως βλέπουμε ότι*

$$E[Y; \{S_n \in B\}] = E[X_i; \{S_n \in B\}],\ i = 1, ..., n$$

*οπότε και*

$$E[X_1 \mid S_n] = ... = E[X_n \mid S_n]$$

*όπου φυσικά η ισότητα ισχύει σχεδόν βέβαια. Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι*

$$E[X_1 \mid S_n] = ... = E[X_n \mid S_n] = \frac{1}{n} E[X_1 + ... + X_n \mid S_n] = \frac{1}{n} S_n$$

*όπου στην τελευταία σχέση καταλήξαμε επειδή το άθροισμα* $S_n = X_1 + ... + X_n$ *είναι* $\sigma(S_n)$ *-μετρήσιμο.*

## 1.6 Στοιχεία για την σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών

Για την πληρότητα του παροντος κεφαλαίου θα παραθέσουμε ορισμένες βασικές έννοιες και ιδιότητες από την θεωρία της σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών.

Θα ξεκινήσουμε με μία βασική ιδιότητα της σύγκλισης των μέτρων. Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει ότι η σύγκλιση γεγονότων (συνόλων) συνεπάγεται και σύγκλιση των μέτρων των συνόλων αυτών.

**Θεώρημα 1.6.1** *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ένας χώρος πιθανοτήτων και* $\{F_n\} \in \mathcal{F}$ *μία ακολουθία υποσυνόλων του* $\Omega$. *Αν* $F_n \uparrow F$ *τότε* $P(F_n) \uparrow P(F)$.

**Σχόλιο** Ο συμβολισμός $F_n \uparrow F$ σημαίνει ότι $F_n \subset F_{n+1}$ και $\bigcup_n F_n = F$. Ο συμβολισμός $P(F_n) \uparrow P(F)$ σημαίνει την μονότονη σύγκλιση της ακολουθίας $\{P(F_n)\} \in \mathbb{R}$ στον πραγματικό αριθμό $P(F)$. Η μονότονη σύγκλιση προυποθέτει ότι $P(F_{n+1}) \geq P(F_n)$.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του μέτρου. Αν ορίσουμε την ακολουθία $G_1 := F_1$, $G_n := F_n \setminus F_{n-1}$, $n \geq 2$ τότε τα σύνολα $G_n$ είναι ξένα μεταξύ τους και

$$F_n = \cup_{i=1}^{n} G_i.$$

Από τις ιδιότητες του μέτρου

$$P(F_n) = P(\cup_{i=1}^{n} G_i) = \sum_{i=1}^{n} P(G_i)$$

Η ακολουθία $r_n := \sum_{i=1}^{n} P(G_i)$ συγκλίνει μονότονα στο όριο $\sum_{i=1}^{\infty} P(G_i) = P(F)$. Έτσι αποδείχθηκε το ζητούμενο.$\square$

Θα ασχοληθούμε τώρα με τις διάφορες έννοιες σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών.

**Ορισμός 1.6.1** *Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $X_n$ *λέμε ότι συγκλίνει* **σχεδόν βέβαια** *σε μία τυχαία μεταβλητή* $X$ *(συμβολίζουμε* $X_n \to X$, *σ.β.) αν* $P(X_n \to X) = 1$, *δηλαδή αν* $\Lambda = \{\omega : X_n(\omega) \to X\}$ *τότε* $P(\Lambda) = 1$.

Η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση δεν είναι το μόνο είδος σύγκλισης που παρουσιάζει ενδιαφέρον στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών. Άλλοι πιθανόν ενδιαφέροντες τρόποι σύγκλισης είναι η σύγκλιση κατά μέσο τετράγωνο ή σύγκλιση στον $L^2(meansquareconvergence, \Lambda^2-$ ςονεργενςε) και η σύγκλιση στο μέσο ή σύγκλιση στον $L^1$ (convergence in mean, $L^1-$convergence). Παραθέτουμε τον γενικό ορισμό της σύγκλίσης στον $L^p$, που μας δίνει τις παραπάνω έννοιες στις ειδικές περιπτώσεις όπου $p = 2$ και $p = 1$ αντίστοιχα.

**Ορισμός 1.6.2** *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητων* $X_n$ *συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή* $X$ *στον* $L^p$ *αν* $lim_{n\to\infty} E[\mid X_n - X \mid^p] = 0$. *Συμβολίζουμε*

$$X_n \stackrel{L^p}{\to} X.$$

Μία χρήσιμη έννοια είναι και η σύγκλιση σε πιθανότητα

**Ορισμός 1.6.3** *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $X_n$ *συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή* $X$ **σε πιθανότητα** *αν* $\forall \epsilon > 0$, $P\{\omega : \mid X_n(\omega) - X(\omega) \mid > \epsilon\} \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Συμβολίζουμε*

$$X_n \stackrel{P}{\to} X.$$

Τέλος, χρήσιμη είναι και η έννοια της σύγκλισης σε κατανομή.

**Ορισμός 1.6.4** *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n$ συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή $X$* **σε κατανομή** *αν για κάθε πραγματική, φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} E[g(X_n)] = E[g(X)]$. Συμβολίζουμε*

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Μία συναφής έννοια είναι η έννοια της ασθενούς σύγκλισης που μεταφέρει την έννοια της σύγκλισης σε κατανομή για κάποια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών,σε μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας.

**Ορισμός 1.6.5** *Έστω μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας $\mu_n$ στον $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι η $\mu_n$* **συγκλίνει ασθενώς** *στο μέτρο πιθανότητας $\mu$, αν και μόνο αν $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε*

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$$

Ορισμένοι τύποι σύγκλισης είναι πιο ισχυροί από άλλους με την έννοια ότι αν μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει κατά κάποιο ορισμένο τύπο σύγκλισης τότε εξασφαλίζεται η σύγκλιση της κατά κάποιο άλλο τύπο. Για παράδειγμα, αν $X_n$ είναι μια ακολουθία θετικών τυχαίων μεταβλητών και γνωρίζουμε ότι $X_n \to X$ στον $L^2$ τότε μπορούμε να δούμε από την ανισότητα Cauchy-Schwartz ότι θα ισχύει επίσης ότι $X_n \to X$ στον $L^1$ ή ισοδύναμα ότι $E[X_n] \to E[X]$. Αντιθέτως αν $X_n \to X$, (σ.β.) τότε **δεν** είναι απαραίτητο ότι θα ισχύει και $X_n \to X$ στον $L^1$ δηλαδή ότι θα ισχύει $E[X_n] \to E[X]$.

Για την σύγκλιση κατά μέση τιμή έχουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο και αναφέρουμε χωρίς απόδειξη

**Θεώρημα 1.6.2** *Έστω $X_n$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \to X$, σ.β. όπου $X$ είναι μία τυχαία μεταβλητή. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(*i*) **Μονότονη σύγκλιση** *Αν $0 \leq X_n \uparrow X$ (το σύμβολο $\uparrow$ συμβολίζει την μονότονη σύγκλιση) τότε $E[X_n] \uparrow E[X] \leq \infty$.*

(*ii*) **Το λήμμα του Fatou** *Αν $X_n \geq 0$ τότε $E[X] \leq \liminf E(X_n)$*

(*iii*) **Κυριαρχημένη σύγκλιση (Dominated convergence)** *Αν $\mid X_n(\omega) \mid \leq Y(\omega)$, $\forall n, \omega$ όπου $E[Y] < \infty$ τότε $E[\mid X_n - X \mid] \to 0$ έτσι ώστε $E[X_n] \to E[X]$.*

(*iv*) **Φραγμένη σύγκλιση** *Αν για κάθε πεπερασμένη σταθερά $K$, $\mid X_n(\omega) \mid \leq K$, $\forall n, \omega$ τότε $E[\mid X_n - X \mid] \to 0$.*

**Απόδειξη:** Οι αποδείξεις μπορεί να βρεθούν στα περισσότερα βιβλία που ασχολούνται με την θεωρία μέτρου και την ολοκλήρωση. Ενδεικτικά παραπέμπουμε στο [37]. □

**Παράδειγμα 1.6.1** *Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείξτε ότι αν $X \geq 0$ τότε $E[X] = 0$ αν και μόνο αν $X = 0$ σ.β. (σχεδόν παντού κάτω από το μέτρο $P$).*

*Θα προσεγγίσουμε την $X$ από μία ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών $X_n$ τέτοια ώστε $X_n \uparrow X$. Λόγω του ότι $X \geq 0$ θα ισχύει ότι $X_n = \sum_n c_n \mathbf{1}_{A_n}$, $c_n \geq n$. Μπορούμε να δούμε ότι αφού $X_n \uparrow X$, $X = 0$ σ.β., αν και μόνο αν $X_n = 0$ σ.β. για κάθε $n$ το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν $E[X_n] = 0$. Το τελευταίο προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής για μία απλή τυχαία μεταβλητή. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι $E[X_n] \uparrow E[X]$ και από την μονότονη σύγκλιση της (πραγματικής ακολουθίας) $E[X_n]$ καταλήγουμε ότι $E[X] = 0$ συνεπάγεται ότι $E[X_n] = 0$ άρα και $X_n = 0$ σ.β. για κάθε $n$ οπότε και $X = 0$ σ.β.*

Οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων τύπων σύγκλισης μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω διάγραμματα:

$$\boxed{\text{Σύγκλιση στον } L^p \longrightarrow \text{Σύγκλιση σε πιθανότητα} \longrightarrow \text{Σύγκλιση σε κατανομή}}$$

$$\boxed{\text{Σύγκλιση σ.β} \longrightarrow \text{Σύγκλιση σε πιθανότητα}}$$

**Σχόλιο:** Η σύγκλιση κατά πιθανότητα δεν εξασφαλίζει την σχεδόν βέβαιη σύγκλιση, μπορεί κανείς να κατασκευάσει παραδείγματα ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνουν κατά πιθανότητα αλλά όχι σχεδόν βέβαια. Μπορεί όμως να αποδειχθεί ότι αν μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει κατά πιθανότητα τότε υπάρχει μία υπακολουθία της η οποία συγκλίνει σχεδόν βέβαια.

**Παράδειγμα 1.6.2** *Έστω $X_i$, $i = 1, ..., n$ ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0,1)$. Ας ορίσουμε $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ και $Y_n = \exp(a\, S_n - b\, n)$. Για $p \geq 1$ δείξτε ότι*

$$X_n \stackrel{L^p}{\to} 0 \text{ αρκεί } p < \frac{2b}{a^2}$$

*Αρκεί να δείξουμε ότι $E[\mid Y_n \mid^p] \to 0$ για $n \to \infty$. Πράγματι*

$$E[\mid \exp(a\, S_n - b\, n) \mid^p] = \exp(-p\, b\, n) E[\exp(p\, a\, S_n)]$$
$$= \exp(-p\, b\, n) E[\prod_{i=1}^n \exp(p\, a\, X_i)] = \exp(-p\, b\, n) \prod_{i=1}^n E[\exp(p\, a\, X_i)]$$
$$= \exp(-p\, b\, n) \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{a^2 p^2}{2}\right) = \exp\left(\left(-p\, b + \frac{a^2 b^2}{2}\right) n\right)$$

*το οποίο τείνει στο 0 αρκεί να ισχύει $p < \frac{2b}{a^2}$.*

*Στον υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι αν η τυχαία μεταβλητή $X$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$*

$$E[\exp(\lambda X)] = \frac{1}{2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

**Παράδειγμα 1.6.3** *Έστω $X_i$, $i = 1, ..., n$ ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Δείξτε ότι αν $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ και $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, ισχύει ότι $V_n \xrightarrow{P} 0$ καθώς $n \to \infty$.*

*Αρκεί να δείξουμε ότι $P(\mid V_n \mid > \epsilon) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Πράγματι,*

$$P(\mid V_n \mid > \epsilon) = P(\mid S_n \mid > n\epsilon) \leq \frac{E[S_n^2]}{\epsilon^2 n^2} = \frac{1}{\epsilon^2 n} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty$$

*Για να καταλήγουμε στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Chebychev (βλ. θεώρημα 1.4.3) για την τυχαία μεταβλητή $S_n$ και το ότι $E[S_n^2] = n$ (λόγω της ανεξαρτησίας των $X_i$).*

Σχετικά με την σύγκλιση πρέπει να αναφέρουμε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα, το Λήμμα Borel-Cantelli. Το λήμμα αυτό μας δίνει σημαντική πληροφορία σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά ακολουθιών γεγονότων. Χρειαζόμαστε πρώτα τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 1.6.6** *Έστω $A_n$ μια ακολουθία γεγονότων σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ορίζουμε*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \infty\}$$

*Το $\limsup_{n\to\infty} A_n$ είναι ένα γεγονός το οποίο έχει την πιθανοθεωρητική ερμηνεία {το $A_n$ συμβαίνει απείρως συχνά}. Πολλές φορές χρησιμοποιείται ο συμβολισμός*

$$\limsup_n A_n = \{A_n, i.o.\}$$

**Θεώρημα 1.6.3** *(**Λήμμα Borel-Cantelli**) Ας θεωρήσουμε την ακολουθία γεγονότων $A_n$ σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, τότε $P(A_n, i.o.) = 0$*

*(ii) Αν $P(A_n, i.o.) = 0$ και αν τα $A_n$ είναι ανεξάρτητα γεγονότα τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.*

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [14]. □

**Σχόλιο:** Μία εναλλακτική μορφή του δεύτερου σκέλους του λήμματος Borel-Cantelli είναι η ακόλουθη: Αν $A_n$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητα γεγονότα και $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ τότε $P(A_n,\, i.o.) = 1$.

**Παράδειγμα 1.6.4** *Έστω $X_n$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά 1, $N(0,1)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Borel-Cantelli δείξετε ότι*

$$P(X_n \geq p\sqrt{log\, n},\, i.o) = 0, \text{αν } p \geq \sqrt{2}$$

*Πράγματι, για την κανονική κατανομή ισχύει*

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \leq \int_a^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &\leq \int_a^\infty \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \end{aligned}$$

*Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα παίρνουμε ότι*

$$P(X_n \geq p\sqrt{log\, n}) \leq \exp\left(-\frac{p^2 log\, n}{2}\right) = n^{-p^2/2}$$

*Συνεπώς*

$$\sum_{n=1}^\infty P(X_n \geq p\sqrt{log\, n}) \leq \sum_{n=1}^\infty n^{-p^2/2}$$

*και η σειρά συγκλίνει αν $p > \sqrt{2}$. Συνεπώς από το Λήμμα Borel-Cantelli καταλήγουμε ότι*

$$P(X_n \geq p\sqrt{log\, n},\, i.o.) = 0 \text{ αν } p > \sqrt{2}$$

## 1.7 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Μία ιδιαίτερα χρήσιμη έννοια για την μελέτη της ανεξαρτησίας καθώς και γενικότερα των ιδιοτήτων διαφόρων τυχαίων μεταβλητών είναι η έννοια της **χαρακτηριστικής συνάρτησης** (characteristic function).

**Ορισμός 1.7.1** *Έστω $X \in \mathbb{R}$ μία τυχαία μεταβλητή και $\mu_X$ το μέτρο πιθανότητας που επάγει. Η* **χαρακτηριστική συνάρτηση** *$\phi_X(\lambda)$ της $X$ ορίζεται σαν η μέση τιμή*

$$\phi_X(\lambda) = E_{\mu_X}[e^{i\lambda X}] = \int e^{i\lambda x} d\mu_X$$

*όπου $i$ είναι η ρίζα του $-1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(x)$ σαν*

$$\phi_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} P(x) dx$$

**Σχόλια:** $(i)$ Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Fourier του μέτρου πιθανότητας $\mu_X$ ή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $P(x)$.
$(ii)$ Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γενικευθεί και για τυχαίες μεταβλητές $X \in \mathbb{R}^d$. Στην περίπτωση αυτή, η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μία συνάρτηση $d$ μεταβλητών $\lambda_1, ..., \lambda_d$ και ορίζεται σαν $\phi(\lambda) = E[exp(i\lambda \cdot X)]$ όπου $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d)$, $X = (X_1, ..., X_d)$ και $\lambda \cdot X = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_d X_d$ είναι το συνήθες Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$.

**Παράδειγμα 1.7.1** *Έστω $X$ μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι Bernoulli δηλαδή παίρνει δύο τιμές, 1 και 0 με $P(X = 0) = p$ και $P(X = 1) = 1 - p$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X$ είναι*

$$\phi_X(\lambda) = E[e^{i\lambda X}] = e^{i\lambda 0} p + e^{i\lambda}(1-p) = p + e^{i\lambda}(1-p)$$

**Παράδειγμα 1.7.2** *Έστω $X$ μία τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την ομογενή κατανομή στο διάστημα $[-a, a]$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X$ είναι η*

$$\phi_X(\lambda) = E[e^{i\lambda X}] = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{2ai\lambda} = \frac{\sin a\lambda}{a\lambda}$$

**Παράδειγμα 1.7.3** *Έστω $X$ μία τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X$ είναι*

$$\phi_X(\lambda) = E[e^{i\lambda X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} dx\right) = exp\left(-i\mu\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right)$$

*Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να υπολογιστεί (φορμαλιστικά) κάνοντας ένα μετασχηματισμό μεταβλητών στο παραπάνω ολοκλήρωμα ώστε να καταστεί ο εκθέτης ένα τέλειο τετράγωνο. Η σύγκλιση του ολοκληρώματος απαιτεί στοιχειώδεις γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης αλλά δεν είναι απαραίτητη στην παρούσα φάση. Ο υπολογισμός αφήνεται σαν άσκηση.*

Η χαρακτηριστική συνάρτηση καθορίζει **μοναδικά** ένα μέτρο πιθανότητας. Η μοναδικότητα προκύπτει από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού Fourier. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας ή ισοδύναμα μιάς τυχαίας μεταβλητής είναι μία συνεχής συνάρτηση του $\lambda$ και αν ισχύει $E[| X |^k] < \infty$ έχει και συνεχείς παραγώγους μέχρι και τάξης $k$.

**Παράδειγμα 1.7.4** *Οι παράγωγοι της χαρακτηριστικής συνάρτησης μίας τυχαίας μεταβλητής $X$ σχετίζονται με τις ροπές της κατανομής της. Πράγματι μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $X \in \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, ισχύει το ακόλουθο ανάπτυγμα Taylor*

$$\phi_X(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\lambda)^k}{k!} E[X^k] + R_n$$

*που $R_n$ είναι κάποιος όρος που περιέχει τα υπόλοιπα. Φυσικά για να ισχύει ο τύπος αυτός θα πρέπει η $X$ να ικανοποιεί την συνθήκη $E[| X |^n] < \infty$.*

*Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού είναι απλή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\frac{d^k \phi_X(\lambda)}{d\lambda^k} = E[(iX)^k e^{i\lambda X}]$ και να θέσουμε $\lambda = 0$.*

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη της σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών. Αναφέρουμε χωρίς αποδειξη το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.7.1** *Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία μέτρων πιθανοτήτων $\mu_n$ στο $\mathbb{R}^d$. Έχουμε ότι $\mu_n \stackrel{w}{\to} \mu$ αν και μόνο αν $\phi_n(\lambda) \to \phi(\lambda)$*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη του θεωρήματος που βασίζεται στην χρήση του θεωρήματος των Stone-Weierstrass από την συναρτησιακή ανάλυση παραλείπεται. □

Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις μπορεί να μας δώσουν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τον αν καποιες τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες ή όχι. Για τον σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.7.2** *Έστω $X = (X_1, ..., X_d) \in \mathbb{R}^d$ μία τυχαία μεταβλητή. Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., d$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$\phi_X(\lambda) = \phi_X(\lambda_1, ..., \lambda_d) = \prod_{j=1}^{d} \phi_{X_j}(\lambda_j)$$

**Απόδειξη:** Το ευθύ μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα χρησιμοποιώντας τον ορισμό της χαρακτηριστικής συνάρτησης και τις ιδιότητες της μέσης τιμής ως πρός την ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών. Για το αντίστροφο, ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η παραπάνω σχέση για την χαρακτηριστική συνάρτηση, και έστω ότι $\mu_X$ είναι το μέτρο πιθανότητας που αντιστοιχεί στη τυχαία μεταβλητή $X$. Το γινόμενο $\prod_{j=1}^{d} \phi_{X_j}(\lambda_j)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση που αντιστοιχεί στο μέτρο πιθανότητας $\mu_{X_1} \otimes ... \otimes \mu_{X_n}$. Λόγω της μοναδικότητας της χαρακτηριστικής συνάρτησης και της ισοτητας μπορούμε να συνάγουμε ότι $\mu_X = \mu_{X_1} \otimes ... \otimes \mu_{X_n}$. Αυτό όμως είναι και ικανό για να πάρουμε την ανεξαρτησία των $X_i$, $i = 1, ..., d$.
□

## 1.8 Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε ορισμένα αποτελέσματα από την συναρτησιακή ανάλυση και την θεωρία μέτρου που χρειάζονται στην βαθύτερη κατανόηση των εννοιών του κεφαλαίου. Το παράρτημα αυτό μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

### 1.8.1 Βασικοί ορισμοί από την συναρτησιακή ανάλυση

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του μετρικού χώρου.

**Ορισμός 1.8.1** *Έστω $X$ κάποιος χώρος. Μία απεικόνιση $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **μετρική** *αν για κάθε $x, y, z \in X$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*

(i) $\rho(x, x) = 0$,

(ii) $\rho(x, y) > 0$ *αν* $x \neq y$

(iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iv) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(τριγωνική ανισότητα)*

*Ένας χώρος $X$ εφοδιασμένος με μία μετρική $\rho$ ονομάζεται* **μετρικός χώρος**.

Η μετρική γενικεύει την έννοια της απόστασης σε κάποιο χώρο.

**Παράδειγμα 1.8.1** *Ένα παράδειγμα μετρικού χώρου είναι π.χ. το $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδια απόσταση*

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |^2}.$$

**Παράδειγμα 1.8.2** *Άλλο παράδειγμα είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων του διαστήματος $[a, b]$ με μετρική*

$$\rho(x, y) = \sup_{a \leq x \leq b} | f(x) - f(y) | .$$

**Παράδειγμα 1.8.3** *Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο χώρος των τυχαίων μεταβλητών $X$ για τις οποίες ισχύει $E[| X^p |] < \infty$, $p > 0$, δηλαδή ο χώρος $L^p$, με μετρική*

$$\rho(X, Y) = \{E[| X - Y |^p]\}^{1/p}.$$

Σε κάποιο μετρικό χώρο $(X, \rho)$ μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης.

**Ορισμός 1.8.2** *Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία*[8] *$\{x_n\} \in X$. Λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $x \in X$ αν $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Θα συμβολίζουμε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το όριο είναι μοναδικό.*

Με βάση τον ορισμό αυτό της σύγκλισης ορίσαμε την σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών στον $L^p$.

Χρήσιμες είναι επίσης οι έννοιες του ανοικτού και του κλειστού υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου.

**Ορισμός 1.8.3** *Σε ένα μετρικό χώρο $(X, \rho)$ το σύνολο*

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}, \;\; r > 0. \; x_0 \in X$$

*ονομάζεται* **ανοικτή σφαίρα** *ακτίνας $r$ και κέντρου $x_0$.*
*Σε ένα μετρικό χώρο $(X, \rho)$ το σύνολο*

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}, \;\; r > 0. \; x_0 \in X$$

[8] Με την έννοια ακολουθία στον $X$ εννοούμε μία απεικόνιση $n \to x_n$ του $\mathbb{N}$ στον $X$

*ονομάζεται* **κλειστή σφαίρα** *ακτίνας $r$ και κέντρου $x_0$.*
*Ένα υποσύνολο $G \subset X$ ονομάζεται* **ανοικτό** *αν περιέχει μία ανοικτή σφαίρα γύρω απο κάθε σημείο του.*
*Ένα υποσύνολο $G \subset X$ ονομάζεται* **κλειστό** *αν το συμπληρωματικό του $X \setminus G$ είναι ανοικτό.*

Η ένωση καθώς και η πεπερασμένη το πλήθος τομή ανοικτών συνόλων είναι επίσης ανοικτό σύνολο. Το ίδιο ισχύει και για τα κλειστά σύνολα.

Θα εισάγουμε τώρα ορισμένες έννοιες όπως π.χ. οι έννοιες της πληρότητας και της πυκνότητας που θα χρειαστούν στην μελέτη του κεφαλαίου 4.

**Ορισμός 1.8.4** *Μία ακολουθία $\{x_n\} \in X$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $N, M$ τέτοια ώστε*

$$m > M,\ n > N \Longrightarrow \rho(x_m, x_n) < \epsilon.$$

*Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε ότι μία ακολουθία είναι Cauchy αν*

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0.$$

Κάθε ακολουθία που συγκλίνει είναι και Cauchy. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε και αποτελεί μία ιδιότητα του μετρικού χώρου

**Ορισμός 1.8.5** *Ένας μετρικός χώρος στον οποίο κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει ονομάζεται* **πλήρης**. *Με άλλα λόγια ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης αν όταν $\{x_n\}$ είναι μία ακολουθία Cauchy τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$.*

Παραδείγματα πλήρων χώρων είναι οι χώροι $L^p$.

**Ορισμός 1.8.6** *Ένα υποσύνολο $A$ ενός μετρικού χώρου $X$ ονομάζεται* **παντού πυκνό** *στο $X$ αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\rho(x, y) < \epsilon$.*
*Αν ένας μετρικός χώρος $X$ έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο το οποίο είναι παντού πυκνό σε αυτόν, ονομάζεται* **διαχωρίσιμος** *(separable).*

### 1.8.2 Σύγκλιση ακολουθιών στο $\mathbb{R}$

Θα επισκοπίσουμε τώρα μερικές βασικές έννοιες από την σύγκλιση ακολουθιών στο σύνολο των παραγματικών αριθμών που είναι χρήσιμες στην μελέτη της σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών.

θα ξεκινήσουμε με την έννοια της μονότονης ακολουθίας.

**Ορισμός 1.8.7** *Μία ακολουθία $\{x_n\}$ ονομάζεται μονότονη αν ισχύει είτε ότι*
*$(i)$ $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n$*
*είτε ότι*
*$(ii)$ $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n$.*
*Στην περίπτωση $(i)$ η ακολουθία ονομάζεται μη φθίνουσα ενώ στην περίπτωση $(ii)$ η ακολουθία ονομάζεται μη αύξουσα.*

Μία μονότονη ακολουθία συγκλίνει στον $\mathbb{R}$ αν είναι φραγμένη (αλλιώς συγκλίνει στον $\mathbb{R}^*$). Για μία μη φθίνουσα ακολουθία το όριο είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ($sup$) των όρων. Για μία μη αύξουσα ακολουθία το όριο είναι το μέγιστο κάτω φράγμα ($inf$) των όρων.

Θα συνεχίσουμε με την έννοια του $limsup$ και του $liminf$.

**Ορισμός 1.8.8** *Έστω μία ακολουθία* $\{x_n\} \in \mathbb{R}$.
*(i) Ας ορίσουμε το σύνολο* $S_k = \{x_k, x_{k+1}, ...\}$ *και το ας πάρουμε το ελάχιστο άνω φράγμα (sup) του,* $M_k = supS_k$. *Η ακολουθία* $\{M_k\}$ *είναι φθίνουσα και έχει κάποιο όριο στο* $\mathbb{R}^*$ *το οποίο είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του* $M_k$. *Το όριο αυτό ονομάζεται το* $\limsup_{n\to\infty}$,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{k\geq 1} sup\{x_k, x_{k+1}, ...\}$$

*(ii) Ας πάρουμε τώρα το μέγιστο κάτω φράγμα (inf) του συνόλου* $S_k$, $m_k = \inf S_k$. *Η ακολουθία* $m_k$ *είναι αύξουσα και έχει κάποιο όριο στο* $R^*$ *το οποίο είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (sup) των* $m_k$. *Το όριο αυτό ονομάζεται* $liminf_{n\to\infty} x_n$,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{k\geq 1} inf\{x_k, x_{k+1}, ...\}.$$

Ισχύει ότι

$$m_j \leq m_k \leq M_k \leq M_j, \;\; j < k$$

οπότε και

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

**Παράδειγμα 1.8.4** *Ένα παράδειγμα ακολουθίας για την οποία το* $limsup$ *και το* $iminf$ *δεν συμπίπτουν είναι η*

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{αν} \quad n \text{ περιττό} \\ -n, & \text{αν} \quad n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

*Για την ακολουθία αυτή έχουμε*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

*και*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Ο ακόλουθος χαρακτηρισμός του $limsup$ και του $liminf$ είναι πολλές φορές χρήσιμος. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [35].

**Θεώρημα 1.8.1** *Έστω* $\{x_n\}$ *μία ακολουθία στο* $\mathbb{R}^*$. *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(i) Έστω ότι* $\limsup_{n\to\infty} x_n = M$. *Τότε*
*(iα) Αν* $a < M$ *ισχύει ότι* $a < x_n$ *για άπειρα πολλές τιμές του* $n$, *και*
*(iβ) Αν* $M < b$ *ισχύει ότι* $x_n < b$ *για* $n$ *που είναι αρκετά μεγάλο.*

(*ii*) *Έστω ότι* $\liminf_{n\to\infty} x_n = m$. *Τότε*
(*iiα*) *Αν* $a < m$ *ισχύει ότι* $a < x_n$ *για* $n$ *που είναι αρκετά μεγάλο, και*
(*iiβ*) *Αν* $m < b$ *ισχύει ότι* $x_n < b$ *για άπειρα πολλές τιμές του* $n$.

Ισχύει ότι

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n),$$

και ότι

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty}(-x_n).$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι πολύ χρήσιμο

**Θεώρημα 1.8.2** *Μία ακολουθία* $\{x_n\}$ *έχει όριο* $x$ *αν και μόνο αν*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x.$$

Τέλος χρήσιμα είναι και τα ακόλουθα

**Θεώρημα 1.8.3** *(***Bolzano-Weirstrass***) Μία φραγμένη ακολουθία* $\{x_n\}$ *περιέχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία.*

**Θεώρημα 1.8.4** *(***Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy***) Μία ακολουθία* $\{x_n\} \in \mathbb{R}$ *συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $\mid x_n - x_m \mid < \epsilon$ *αν* $N \leq m$ *και* $N \leq n$.

### 1.8.3 Το θεώρημα μονότονης κλάσης

Θα παρουσιάσουμε τώρα το θεώρημα μονότονης κλάσης το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην απόδειξη αποτελεσμάτων στην θεωρία πιθανοτήτων. Θα χρειαστούμε πρώτα μερικούς ορισμούς.

**Ορισμός 1.8.9** *Μία συλλογή* $\mathcal{C}$, *υποσυνόλων ενός χώρου* $\Omega$, *ονομάζεται ένα π-σύστημα (π-system) αν είναι κλειστό κάτω από πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν* $A \in \mathcal{C}$ *και* $B \in \mathcal{C}$ *συνεπάγεται ότι* $A \cap B \in \mathcal{C}$.

**Ορισμός 1.8.10** *Μία συλλογή* $\mathcal{D}$, *υποσυνόλων ενός χώρου* $\Omega$, *ονομάζεται ένα λ-σύστημα (λ-system) αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες*

(*i*) $\Omega \in \mathcal{D}$

(*ii*) *Αν* $A, B \in \mathcal{D}$ *με* $B \subset A$ *τότε* $A \setminus B \in \mathcal{D}$

(*iii*) *Αν* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ *με* $A_n \uparrow A$, *τότε* $A \in \mathcal{D}$

Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός $A_n \uparrow A$ σημαίνει ότι $A_n \subset A_{n+1}$ και ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Είμαστε τώρα σε θέση να παρουσιάσουμε το θεώρημα μονότονης κλάσης.

**Θεώρημα 1.8.5** *Έστω $\mathcal{C}$ ένα π-σύστημα και $\mathcal{D}$ ένα λ-σύστημα σε κάποιο χώρο $\Omega$, τέτοια ώστε $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Τότε, η σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{C}$ περιέχεται στο $\mathcal{D}$ δηλαδή $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$*

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. Για την απόδειξη παραπέμπουμε π.χ. στο [14].□

Το θεώρημα μονότονης κλάσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Αν θέλουμε να αποδείξουμε κάποια ιδιότητα για μία σ-άλγεβρα αρκεί να την αποδείξουμε για μία πιο απλή κλάση συνόλων, και μετά να την επεκτείνουμε στην σ-άλγεβρα κάνοντας χρήση του θεωρήματος αυτού.

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να έχουμε παραλλαγές του θεωρήματος αυτού για συναρτήσεις. Παραθέτουμε ένα τέτοιο θεώρημα.

**Θεώρημα 1.8.6** *Έστω $\mathcal{M}$ μία κλάση φραγμένων συναρτήσεων που απεικονίζουν το $\Omega$ στο $\mathbb{R}$. Ας θεωρήσουμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι κλειστή κάτω από την πράξη του πολλαπλασιασμού δηλαδή ότι*

$$f, g \in \mathcal{M} \Longrightarrow fg \in \mathcal{M}.$$

*Ας ορίσουμε*

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{M}) = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})); f \in \mathcal{M}\}$$

*και έστω $\mathcal{H}$ ένας διανυσματικός χώρος τέτοιος ώστε*

*(ι)* $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$

*(ii)* *Ο $\mathcal{H}$ περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις*

*(iii)* *Αν $\{f_n\} \in \mathcal{H}$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων για την οποία ισχύει $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$ τότε αν η συνάρτηση $f := \lim_{n\to\infty}$ είναι φραγμένη, ισχύει οτι $f \in \mathcal{H}$*

*Τότε ο $\mathcal{H}$ περιέχει όλες τις φραγμένες συναρτήσεις που είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμες.*

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. Για την απόδειξη βλ. π.χ. το [37].□

### 1.8.4 Θεωρήματα επέκτασης

Θα παρουσιάσουμε τώρα χωρίς απόδειξη ορισμένα θεωρήματα επέκτασης. Τα θεωρήματα αυτά είναι χρήσιμα για τον ορισμό ενός μέτρου σε κάποια σ-άλγεβρα, ξεκινώντας από τον ορισμό μέτρων σε πιο απλές δομές.

**Θεώρημα 1.8.7** *Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mathcal{C}$ ένα π-σύστημα στο $\Omega$. Ας ορίσουμε $\mu_1$ και $\mu_2$ δύο μέτρα στο $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$ τα οποία είναι πεπερασμένα ($\mu_i(\Omega) < \infty, i = 1, 2$) και για τα οποία ισχύει $\mu_1 = \mu_2$ στο $\mathcal{C}$. Τότε*

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{στο } \sigma(\mathcal{C})$$

Το ακόλουθο πολύ βασικό αποτέλεσμα είναι απαραίτητο στον ορισμό μέτρων (πιθανοτήτων) σε διάφορα σύνολα.

Θα χρειαστούμε πρώτα τους ακόλουθους ορισμούς

**Ορισμός 1.8.11** *Μία οικογένεια $\mathcal{F}_0$ που αποτελείται από υποσύνολα ενός συνόλου $\Omega$ ονομάζεται* **άλγεβρα** *αν είναι κλειστή κάτω απο* **πεπερασμένες** *ενώσεις και τομές καθώς και κάτω από την πράξη της συμπληρωματικότητας.*

Η διαφορά της άλγεβρας απο την σ-άλγεβρα είναι ακριβώς στο πεπερασμένες ενώσεις και τομές. Δηλαδή στον ορισμό 1.1.1 της σ-άλγεβρας στην ιδιότητα $(iii)$ θα θεωρήσουμε την ακολουθία $A_i$ να φτάνει μέχρι πεπερασμένο $n$.

**Ορισμός 1.8.12** *Η απεικόνιση $\mu_0 : \mathcal{F}_0 \to [0,\infty]$ ονομάζεται αριθμήσιμα προσθετική (**countably additive**) αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες*

$(i)$ $\mu_0(\emptyset) = 0$

$(ii)$ *Αν $\{F_n\} \in \mathcal{F}_0$ είναι μία ακολουθία συνόλων ξένων μεταξύ τους τέτοια ώστε $F = \bigcup_n F_n \in \mathcal{F}_0$ τότε*

$$\mu_0(F) = \sum_n \mu_0(F_n)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να παρουσιάσουμε το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή.

**Θεώρημα 1.8.8** *(**Θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή**)*
*Έστω $\Omega$ ένα σύνολο, $\mathcal{F}_0$ μία άλγεβρα στο $\Omega$ και ας ορίσουμε $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{F}_0)$.*
*Αν $\mu_0$ είναι μία αριθμήσιμα προσθετική απεικόνιση από την $\mathcal{F}_0$ στο διάστημα $[0,\infty] \in \mathbb{R}^*$ τότε υπάρχει μέτρο $\mu$ στο $(\Omega, \mathcal{F})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu = \mu_0 \quad \text{στο} \ \mathcal{F}_0.$$

*Αν η $\mu_0$ ειναι πεπερασμένη ($\mu_0(\Omega) < \infty$) τότε η επέκταση αυτή είναι μοναδική.*

**Απόδειξη:** Βλ. π.χ. το [37].□

Ένα παράδειγμα της χρήσης του θεωρήματος αυτού είναι στην κατασκευή του μέτρου Lebesgue ή στην κατασκευή του μέτρου Wiener.

### 1.8.5 Χώροι Hilbert και εφαρμογές στην θεωρία πιθανοτήτων

Θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό του διανυσματικού χώρου

**Ορισμός 1.8.13** *Ένα σύνολο $X$ στο οποίο έχουν οριστεί δύο απεικονίσεις (πράξεις)*

$+ : X \times X \to X,\ (x, y) \to x + y$

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X,\ (a, x) \to ax$

*ονομάζεται* **διανυσματικός χώρος** *επάνω στο $\mathbb{R}$ αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες*

(i) $x + y = y + x$ *για κάθε* $x, y \in X$,

(ii) $a(bx) = (ab)x$, *για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *και κάθε* $x \in X$,

(iii) $(a+b)x = ax+bx$, $a(x+y) = ax+ay$, *για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *και κάθε* $x, y \in X$,

(iv) $1x = x$.

Εδώ ορίσαμε τον διανυσματικό χώρο επάνω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Εν γένει ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να οριστεί επάνω σε οποιοδήποτε αλγεβρικό πεδίο, π.χ. επάνω στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Επίσης, οι πράξεις $+$ και $\cdot$ μπορεί να μην είναι οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αλλά γενικά πράξεις που έχουν ιδιοτητες παρόμοιες με αυτές. Παράδειγματα διανυσματικών χώρων είναι οι χώροι $\mathbb{R}^n$. Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι ότι οι χώροι των τυχαίων μεταβλητών $X$ για τις οποίες ισχύει $\{E_P[\mid X \mid^p]\}^{\frac{1}{p}} < \infty$, δηλαδή οι χώροι $L^p(P)$ είναι διανυσματικοί χώροι. Στα επόμενα θα παραλείπουμε το $P$ και θα συμβολίζουμε τους χώρους αυτούς απλά σαν $L^p$.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της νόρμας.

**Ορισμός 1.8.14** *Μία* **νόρμα** *είναι μία μη αρνητική πραγματική συνάρτηση* $\| . \|$ *σε ένα διανυσματικό χώρο, τέτοια ώστε για κάθε* $x \in X$ *και* $a \in \mathbb{R}$,

(i) *Αν* $x \neq 0$, $\| x \| > 0$,

(ii) $\| ax \| = \mid a \mid \| x, y \|$,

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

*Ένας χώρος* $X$ *εφοδιασμένος με μία νόρμα* $\| . \|$ *ονομάζεται* **χώρος με νόρμα**.

Παραδείγματα νορμών είναι οι συνάρτησεις $\| . \|_{L^p} := \{E[\mid . \mid^p]\}^{\frac{1}{p}}$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι νόρμες στους χώρους $L^p$. Από μία νόρμα $\| . \|$ μπορούμε να ορίσουμε μία μετρική ως $\rho(x, y) := \| x - y \|$.

**Ορισμός 1.8.15** *Έστω* $X$ *ένας διανυσματικός χώρος επάνω σε ένα αλγεβρικό πεδίο (π.χ το* $\mathbb{R}$*). Μία απεικόνιση* $(.,.) : X \times X \to \mathbb{C}$ *ονομάζεται* **εσωτερικό γινόμενο** *στον* $X$ *αν για κάθε* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *και* $x_1, x_2, y \in X$ *ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*

(i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(ii) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$

(iii) $(x, x) \geq 0$ *και* $(x, x) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = 0$.

Ορισμένες νόρμες μπορεί να εκφραστούν με την βοήθεια ενός εσωτερικού γινομένου με την μορφή $\| x \|^2 = (x, x)$. Παράδειγμα τέτοιας νόρμας είναι π.χ. η νόρμα $\| . \| = \{E[\mid . \mid^2]\}^{\frac{1}{2}}$ που μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του εσωτερικού γινομένου $(x, y) = E[x \cdot y]$. Αντιθέτως οι νόρμες στον χώρο $L^p$ δεν μπορεί να παραχθούν από ένα εσωτερικό γινόμενο.

**Ορισμός 1.8.16** *Ένας πλήρης μετρικός χώρος με νόρμα που παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert*

Από τους χώρους $L^p$ που αναφέραμε, ο χώρος $L^2$ είναι ένας χώρος Hilber. Η θεωρία των χώρων Hilbert βρίσκει ενδιαφέρουσες εφαρμογές την θεωρία πιθανοτήτων. Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή είναι η εφαρμογή της θεωρίας των προβολών στους χώρους Hilbert στην μελέτη της υπό συνθήκη μέσης τιμής. Θα δείξουμε για παράδειγμα πως η υπό συνθήκη μέση τιμή μπορεί να εκφραστεί σαν η προβολή σε κάποιο υπόχωρο του χώρου Hilbert $L^2$.

**Ορισμός 1.8.17** *Έστω $H$ ένας χώρος Hilbert και $V$ ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του. Η προβολή ενός διανύσματος $x \in H$ στον $V$ συνίσταται στο να πάρουμε το μοναδικό στοιχείο $y \in V$ το οποίο είναι κοντύτερα στο $x$. Συμβολίζουμε $y = \Pi x$ όπου $\Pi$ είναι ο τελεστής προβολής.*

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 1.8.9** *Ο τελεστής προβολής $\Pi : H \to V$, $V \subset H$, υπάρχει, είναι μοναδικός και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*

$(i)$ $\Pi^2 = \Pi$

$(ii)$ $\Pi x = x$ *για κάθε* $x \in V$

$(iii)$ $\Pi y = 0$ *για κάθε* $y \in V^{\perp} := \{y \in H : (x, y) = 0\}$

$(iv)$ *Για κάθε* $x \in H$, $x - \Pi x \in V^{\perp}$

$(v)$ $(\Pi x, y) = (x, \Pi y)$

$(vi)$ *Ο $\Pi$ είναι γραμμικός τελεστής:* $\Pi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 \Pi x + \lambda_2 \Pi y$

$(vii)$ *Το $\Pi y$ είναι το μοναδικό στοιχείο του $V \subset H$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $(\Pi y, x) = (y, x)$ για κάθε $y \in H$, $x \in V$.*

Δεν θα αποδείξουμε τις ιδιότητες αυτές εδώ. Για την απόδειξη παραπέμπουμε σε βιβλία συναρτησιακής ανάλυσης π.χ [3], [12], [26] ή το [14]. Θα δώσουμε όμως την σχέση της υπό συνθήκη μέσης τιμής με την προβολή σε χώρους Hilbert.

Ας θεωρήσουμε τον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ τον οποίο συμβολίζουμε $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ ή πιο απλά $L^2$. Ο χώρος αυτός είναι ένας χώρος Hilbert. Αν θεωρήσουμε μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$, ο χώρος $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι υποχωρος του $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$. Ας ονομάσουμε $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ και $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$. Αν ορίσουμε σαν εσωτερικό γινόμενο την πράξη $(X, Y) = E[XY]$ τότε από το Θεώρημα 1.8.9 μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει μία προβολή από τον χώρο $H$ στον $V$ τέτοια ώστε $(\Pi y, x) = (y, x)$. Αν μεταφράσουμε την σχέση αυτή σε μέσες τιμές παίρνουμε ότι υπάρχει μία μοναδική τυχαία μεταβλητή $\hat{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τέτοια ώστε

$$E[\hat{Y} Z] = E[Y Z] \ \ \forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

ή διαφορετικά ότι υπάρχει $\hat{Y}$ μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε

$$\int_A \hat{Y}\, Z\, dP = \int_A Y\, Z\, dP, \ \ \forall A \in \mathcal{F}$$

Αυτό όμως δεν είναι παρά ο ορισμός της υπό συνθήκη μέσης τιμής $E[Y \mid \mathcal{F}]$. Άρα, η ύπαρξη της υπό συνθήκη μέσης τιμής και των ιδιοτήτων της μπορεί να δειχθούν από τις ιδιότητες των προβολών.

**Παράδειγμα 1.8.5** *Σαν δύο απλά παραδείγματα των ιδιοτήτων της υπό συνθήκης μέσης τιμής που μπορεί να προκύψουν από τις ιδιότητες των προβολών στον χώρο Hilbert $L^2$ μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής:*

(i) *Από την ιδιοτητα των προβολών έχουμε ότι $\Pi x = x$ για κάθε $x \in V$. Αυτό μπορεί να μεταφραστεί στην γνωστή ιδιότητα της υπό συνθήκη μέσης τιμής $E[Y \mid \mathcal{F}] = Y$ αν η $Y$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.*

(ii) *Από την ιδιότητα των προβολών $(\Pi y, z) = (y, z)$, θέτοντας $z = 1$ παίρνουμε $(\Pi x, 1) = (x, 1)$. Αυτό μεταφράζεται στο*

$$E[\hat{Y} 1] = E[Y 1] \Longrightarrow E[E[Y \mid \mathcal{F}]] = E[Y]$$

## 1.9 Βασικά σημεία του κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε μερικές από τις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων. Για ότι ακολουθεί ο αναγνώστης θα πρέπει να χειρίζεται καλά τις ακόλουθες έννοιες

- Την έννοια της σ-άλγεβρας, η οποία σχετίζεται με την έννοια της δομής πληροφορίας, την έννοια του μετρου πιθανότητας, την έννοια της τυχαίας μεταβλητής, της κατανομής της, και της σ-άλγεβρας που ορίζεται από μία τυχαία μεταβλητή.

- Την έννοια και τις βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής για τυχαίες μεταβλητές.

- Την έννοια της υπο συνθήκη μεσης τιμής και την διαισθητική της ερμηνεία σαν την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την τιμή μιάς τυχαίας μεταβλητής δεδομένης της πληροφορίας που περιέχεται σε μία σ-άλγεβρα. Ιδιαίτερα χρήσιμες σε ότι ακολουθεί είναι οι ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής.

- Την έννοια της $L^2$ συγκλισης.

- Την έννοια των χαρακτηριστικών συναρτήσεων και της χρήσης τους για τον χαρακτηρισμό συναρτήσεων κατανομής.

Τα περισσότερα από τα θέματα του κεφαλαίου αυτού ανήκουν σε ένα μάθημα βασικής θεωρίας πιθανοτήτων και αναγκαστικά καλύφθηκαν εδώ σχετικά γρήγορα, αν και προσπαθήσαμε να συμπεριλάβουμε αρκετά στοιχεία ώστε να είναι το παρόν όσο το δυνατό αυτόνομο. Για μία πιο λεπτομερειακή μελέτη των θεμάτων του κεφαλαίου αυτού παραπέμπουμε στον [14] ή στον [37]. Μία άλλη αναφορά, η οποία όμως είναι επίσης σχετικά συμπυκνωμένη είναι το [15].

# Κεφάλαιο 2

# Διαδικασίες *martingale*

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με μία ειδική κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες martingale, οι οποίες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων, την στοχαστική ανάλυση και τις εφαρμογές της. Επίσης οι διαδικασίες martingale είναι πολύ σημαντικές στα μαθηματικά υποδείγματα της χρηματοοικονομικής. Η θεωρία των martingales είναι ιδιαίτερα εκτενής και στα πλαίσια του βιβλίου αυτού θα αρκεστούμε να παραθέσουμε τις βασικές ιδιότητες τους, συχνά χωρίς απόδειξη, τις οποίες θα χρειαστουμε στην ανάπτυξη των θεμάτων που μας ενδιαφέρουν.

Αν και το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής θεωρίας των martingales οφείλεται στον Αμερικανό πιθανοθεωρητικό Doob, η βασική ιδέα ήταν γνωστή αρκετά νωρίτερα, ίσως ακόμα και από την εποχή του Bachelier στις αρχές του 20ου αιώνα.

## 2.1 Ορισμός των *martingale*

Ας ορίσουμε πρώτα την έννοια της **διήθησης** (filtration).

**Ορισμός 2.1.1** *Μία* **διήθηση (filtration)** *είναι μία οικογένεια από σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_t$ τέτοια ώστε*

$$s \leq t \implies \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, η $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή $t$. Μία διήθηση μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν μία αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος. Μία αρκετά συνηθισμένη έννοια είναι η έννοια της **φυσικής διήθησης**. Αυτή είναι η διήθηση η οποία παράγεται από μία στοχαστική διαδικασία $X_t$. Όσο περνάει ο χρόνος και παρατηρούμε την εν λόγω στοχαστική διαδικασία τόσο αυξάνει και η πληροφορία που έχουμε στην διάθεση μας για την διαδικασία αυτή.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια των **προσαρμοσμένων** (adapted) τυχαίων μεταβλητών.

**Ορισμός 2.1.2** *Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X_t$ ονομάζεται* **προσαρμοσμένη** *στην διήθηση $\mathcal{F}_i$ αν η $X_t$ είναι $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη για κάθε $t$.*

Με λόγια αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία η οποία αφορά την στοχαστική μεταβλητή $X_t$ μέχρι την χρονική στιγμή $t$ περιέχεται στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}_t$. Από τον ίδιο τον ορισμό της φυσικής διηθήσεως μπορούμε να δούμε ότι μία στοχαστική διαδικασία $X_t$ είναι προσαρτημένη στην φυσική της διήθηση.

Έχοντας ορίσει τις παραπάνω έννοιες μπορούμε τώρα να ορίσουμε μία ενδιαφέρουσα ειδική κατηγορία τυχαίων μεταβλητών (ή στοχαστικών διαδικασιών) τις martingale καθώς και τις συναφείς με αυτές supermartingale και submartingale.

**Ορισμός 2.1.3** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων, $\mathcal{F}_t$ μία διήθηση στην $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$) και $X_t$ μία οικογένεια πραγματικών, ολοκληρώσιμων ($E[\mid X_t \mid] < \infty$) τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t$.*
*(i) Η οικογένεια $X_t$ είναι μία* **martingale** *αν*

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s \ \ \sigma.\beta. \ \ s \leq t.$$

*(ii) Η οικογένεια $X_t$ είναι μία* **supermartingale** *αν*

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s \ \ \sigma.\beta. \ \ s \leq t.$$

*(iii) Η οικογένεια $X_t$ ονομάζεται μία* **submartingale** *αν*

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s \ \ \sigma.\beta. \ \ s \leq t.$$

**Σχόλιο:** Το $t$ μπορεί να είναι είτε ένας συνεχής δείκτης $t \in \mathbb{R}$ είτε ένας διακριτός δείκτης. Στην περίπτωση αυτή ο δείκτης θα συμβολίζεται συνήθως με $n$, $k$ ή $m$ και θα έχουμε ότι $n, k, m \in \mathbb{N}$.

Με απλά λόγια οι παραπάνω ορισμοί μας λέμε ότι για μία martingale έχοντας υπόψην μας την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της $X_t$ είναι η τιμή $X_s$. Αν η $X_t$ είναι supermartingale η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της $X_t$ έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ θα είναι μικρότερη από την τιμή $X_s$. Τέλος, αν η $X_t$ είναι submartingale η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της $X_t$ έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή $X_s$.

Η παραπάνω εικόνα γίνεται πιο καθαρή αν θεωρήσουμε την $X_t$ σαν μία στοχαστική διαδικασία με το $t$ να έχει την έννοια του χρόνου. Η $\mathcal{F}_t$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε διήθηση αλλά μία επιλογή μπορεί να είναι η φυσική διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, u \leq t)$, δηλαδή η διήθηση που παράγεται από τις τροχιές της τυχαίας διαδικασίας[1]. Η $\mathcal{F}_t$ στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία που αποκομίζουμε για την συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας $X_t$ παρατηρώντας την από την αρχή των χρόνων $t = 0$ ως την χρονική στιγμή $t$. Αν η

[1] Υπενθυμίζουμε ότι $\sigma(X_u, u \leq t)$ είναι η σ-άλγεβρα κάτω από την οποία είναι μετρήσιμες οι τυχαίες μεταβλητές $X_u$ για $u \leq t$

$X_t$ είναι martingale, έχοντας πλήρη γνώση του ότι έχει συμβεί μέχρι την χρονική στιγμή $s$ η καλύτερη πρόβλεψη για το $X_t$, $t > s$ είναι η τιμή $X_s$ δηλαδή η τελευταία της τιμή όταν τελειώσει η περίοδος της παρατήρησης. Συνεπώς για μία martingale η πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ δεν θα μας βοηθήσει να προβλέψουμε τίποτε σχετικά με το μέλλον της στοχαστικής διαδικασίας $X_t$.

Για να κάνουμε τα πράγματα ακόμα πιο απτά ας υποθέσουμε ότι η martingale $X_t$ μπορούσε να θεωρηθεί σαν το κέρδος από κάποιο τυχερό παιγνίδι (π.χ. ρουλέτα), τότε η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας την χρονική στιγμή $t$ έχοντας παρακολουθήσει την έκβαση του παιγνιδιού μέχρι την χρονικη στιγμή $s$ θα είναι το κέρδος που είχαμε την χρονική στιγμή $s$ δηλαδή το $X_s$. Μία martingale μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα τίμιο παιγνίδι. Αντίθετα, αν η $X_t$ είναι μία supermartingale τότε η καλύτερη προβλεψη για το κέρδος μας έχοντας παρακολουθήσει το παιγνίδι μέχρι την χρονική στιγμή $s$ θα είναι ότι το κέρδος μας θα μειωθεί. Συνεπώς μία supermartingale μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα μη τίμιο παιγνίδι όταν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο που δεν ευνοείται από τον σχεδιασμό του παιγνιδιού. Τέλος αν η $X_t$ είναι submartingale τότε η καλύτερη μας πρόβλεψη για το κέρδος μας έχοντας παρακολουθήσει το παιγνίδι μέχρι την χρονική στιγμή $s$ θα είναι ότι το κέρδος μας θα αυξηθεί. Συνεπώς μία submartingale μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα μη τίμιο παιγνίδι αν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο το οποίο ευνοείται από τον σχεδιασμό του παιγνιδιού. Για την πιο ακριβή παράθεση των ιδεών αυτών δείτε τα παραδείγματα 2.1.1,2.1.2,2.1.3.

Οι martingales έχουν την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα ως πρός την μέση τιμή.

**Θεώρημα 2.1.1** *Αν η $X_t$ είναι μία martingale τότε*
$(i)$ $E[X_t] = E[X_0]$
$(ii)$ $E[X_t - X_s] = 0$

**Απόδειξη:** Για να αποδειχθεί αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία από τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής και συγκεκριμένα τον νόμο της ολικής πιθανότητας.□

Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και για submartingales και supermartingales με τις κατάλληλες ανισότητες στην θέση της ισότητας.

Θα παραθέσουμε τώρα μερικά παραδείγματα από στοχαστικές διαδικασίες που είναι martingale ή super- και submartingales. Τα παραδείγματα θα είναι σε διακριτό χρόνο. Παραδείγματα σε συνεχή χρόνο θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο που θα εισάγουμε την κίνηση Brown.

**Παράδειγμα 2.1.1 Παράδειγμα μίας martingale**
*Ένα κλασσικό παράδειγμα σχετικά με τις διαδικασίες martingale είναι το ακόλουθο: Ας θεωρήσουμε διαδοχικές ρίψεις ενός τίμιου νομίσματος (δηλαδή ένα νόμισμα που έχει ίδια πιθανότητα να φέρει κορώνα και ίδια πιθανότητα να φέρει γράμματα), και ας ορίσουμε για την $n-$ρίψη ($n \in \mathbb{N}$) την τυχαία μεταβλητή*

$$X_n = \begin{cases} 1 & \textit{κορώνα} \\ -1 & \textit{γράμματα} \end{cases}$$

*καθώς και την τυχαία μεταβλητή* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Αν θεωρήσουμε ένα παιγνίδι κατά το οποίο κάποιος παίκτης ποντάρει μία δραχμή στο αν θα έρθει κορώνα ή γραμματα (κερδίζει μία δραχμή αν έρθει κορώνα και χάνει μία δραχμή αν έρθουν γράμματα) τότε η μεταβλητή* $S_n$ *μας δίνει την περιουσία του παίκτη την χρονική στιγμή n (θεωρώντας ότι ξεκινήσαμε με περιουσία 0).*

*Ας ορίσουμε σαν* $\mathcal{F}_n$ *την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές* $(X_1, ..., X_n)$. *Είναι φανερό (τουλάχιστον διαισθητικά) ότι η τυχαία μεταβλητή* $X_{n+1}$ *είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας* $\mathcal{F}_n$ *έτσι ώστε*

$$
\begin{aligned}
E[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= E[S_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = E[S_n \mid \mathcal{F}_n] + E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= S_n + E[X_{n+1}] = S_n
\end{aligned}
$$

*Στο παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή* $S_n$ *είναι* $\mathcal{F}_n$*-μετρήσιμη. Από αυτό μπορούμε να συνάγουμε ότι* $E[S_m \mid \mathcal{F}_n] = S_n$ *για* $m > n$. *Εφόσον* $E[\mid S_n \mid] < \infty$, *η* $S_n$ *είναι μία martingale ως προς την διήθηση* $\mathcal{F}_n$. *Αυτό μας λέει ότι ο παίκτης περιμένει να έχει στην* $n+1$ *ρίψη την ίδια περιουσία που είχε στην n ρίψη, δεδομένης της ιστορίας του παιχνιδιού.*

**Παράδειγμα 2.1.2 Παράδειγμα μίας supermartingale**
*Θα παραμείνουμε στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 με την διαφορά ότι θα υποθέσουμε πως το νόμισμα έχει παραπάνω πιθανότητα να φέρει γράμματα παρά κορώνα δηλαδή ότι* $P(X_n = 1) \leq 1/2$. *Τότε, επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι* $E[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq S_n$, *συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό η* $S_n$ *είναι μία supermartingale. Η απόδειξη είναι πολύ απλή και αφήνεται σαν ασκηση.*

**Παράδειγμα 2.1.3 Παράδειγμα μίας submartingale**
*Θα παραμείνουμε στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 με την διαφορά ότι θα υποθέσουμε πως το νόμισμα έχει παραπάνω πιθανότητα να φέρει κορώνα παρά γράμματα δηλαδή ότι* $P(X_n = 1) \geq 1/2$. *Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι* $E[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq S_n$, *συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό η* $S_n$ *είναι μία submartingale. Η απόδειξη είναι πολύ απλή και αφήνεται σαν άσκηση.*

Τα τρία προηγούμενα παραδείγματα διασαφηνίζουν την ερμηνεία μίας martingale σαν ένα τίμιο (δίκαιο) παιγνίδι καθώς και την ερμηνεία μίας sub- ή supermartingale σαν ένα μη τίμιο παιγνίδι.

**Σημαντικό Σχόλιο:** Μία martingale δεν ορίζεται μόνο ως προς μία διήθηση αλλά επίσης και σε σχέση με ένα μέτρο πιθανότητας (το οποίο ουσιαστικά εμπλέκεται στον ορισμό της μέσης τιμής $E$). Μπορεί να συμβαίνει για κάποια διήθηση η στοχαστική διαδικασία $X_t$ να είναι μία martingale ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας $P$ ενώ να μην είναι μία martingale ως προς κάποιο άλλο μέτρο πιθανότητας $Q$. Συνεχίζοντας το παραπάνω συλλογισμό, μπορούμε να μετατρέψουμε μία δεδομένη στοχαστική διαδικασία $X_t$ σε μία martingale προσαρτώντας σε αυτή το κατάλληλο μέτρο πιθανότητας (κρατώντας δηλαδή τις τροχιές της διαδικασίας ώς έχουν αλλά προσαρτώντας στις τροχιές αυτές κάποια πιθανότητα να εμφανιστούν). Μπορούμε να ξεκαθαρίσουμε το παραπάνω σχόλιο στα πλαίσια του παραδείγματος που αναφέραμε. Η στοχαστική διαδικασία $S_n$ είναι μία martingale αν σαν μέτρο πιθανότητας πάρουμε το μέτρο που ορίζεται ξεκινώντας από την υπόθεση ότι $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$ αλλά **δεν** είναι μία martingale αν την θεωρήσουμε ως προς το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται ξεκινώντας από την υπόθεση ότι το νόμισμα δεν είναι τίμιο δηλαδή ως προς κάποιο μέτρο τέτοιο ώστε $Q(T) \neq Q(H)$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε δεδομένη τη διαδικασία $S_n$ (δηλαδή μία συλλογή ακολουθιών $(X_1, ..., X_n, ...)$ από $-1$ και $1$ και από αυτές κατασκευάζουμε τα επιμέρους αθροίσματα $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ παίρνωντας έτσι μία συλλογή από ακολουθιές αριθμών $S_n$). Η συλλογή των $X_n$ και με την σειρά της η συλλογή των $S_n$ είναι δεδομένες. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι με κάποια πιθανότητα μπορούμε να επιλέξουμε στοιχεία των συλλογών αυτών. Ας φανταστούμε λοιπόν ότι η πιθανότητα επιλογής μιάς ακολουθίας $(X_1, ..., X_n, ...)$ που έχει οτιδήποτε στοιχείο σε οτιδήποτε θέση αλλά $+1$ στην θέση $i$ είναι $P(X_i = 1) = p$. Η πιθανότητα επιλογής μιάς ακολουθίας $(X_1, ..., X_n, ...)$ που έχει οτιδήποτε στοιχείο σε οτιδήποτε θέση αλλά $-1$ στην θέση $i$ είναι $P(X_i = -1) = 1 - p$. Η πιθανότητα επιλογής είναι στην διακριτική μας ευχέρεια και αυτό ουσιαστικά είναι η επιλογή του μέτρου πιθανοτήτων το οποίο προσάπτουμε στην στοχαστική διαδικασία. Αν επιλέξουμε $p = \frac{1}{2}$ τότε η $X_t$ γίνεται μία martingale. Αν επιλέγουμε $p \neq \frac{1}{2}$, ανάλογα με την τιμή του $p$ η ίδια ακριβώς στοχαστική διαδικασία (οι ίδιες ακριβώς τροχιές) με τις προηγούμενες μπορεί να γίνουν είτε supermartingale είτε submartingale.

Τονίζεται ότι δεν είναι πάντοτε δυνατό για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία να κατασκευάσουμε μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία να είναι martingale.

Το σχόλιο αυτό αποτελεί την βάση για ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία της στοχαστικής ανάλυσης (και ιδιαίτερα στην θεωρία διάχυσης), το θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov. Το θεώρημα αυτό έχει πολλές εφαρμογές στην χρηματοοικονομική, όπως π.χ. στην μαθηματική θεωρία της αποτίμησης χρεογράφων (asset pricing ). Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό με περισσότερη λεπτομέρεια στην συνέχεια.

Συνεχίζουμε με παράθεση μερικών ακόμη χρήσιμων παραδειγμάτων.

**Παράδειγμα 2.1.4** *Έστω $Z$ τυχαία μεταβλητή, η οποία ορίζεται σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη ($E[\mid Z \mid] < \infty$) και μία διήθηση $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$. Αν ορίσουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (δηλαδή την στοχαστική διαδικασία) $X_n = E[Z \mid \mathcal{F}_n]$, η $X_n$ είναι martingale.*

*Η απόδειξη, που χρησιμοποιεί τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής, αφήνεται σαν άσκηση. Αντίστοιχο αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί και όταν ο δείκτης είναι συνεχής ($t \in \mathbb{R}$)*

**Παράδειγμα 2.1.5** *Έστω μία ακολουθία από ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες (independent identically distributed (i.i.d) ) τυχαίες μεταβλητές $(Y_i), i = 1, 2, ...$ για τις οποίες ισχύει $E[Y_i] = 0$, $E[Y_i^2] = \sigma^2$, $i = 1, 2....$ Ας ορίσουμε την τυχαία* *μεταβλητή* $X_0 = 0$, $X_n = (\sum_{k=1}^n Y_k)^2 - n\sigma^2$. *Τότε η* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *είναι μία martingale ως προς την διήθηση που παράγεται από τις μεταβλητές* $Y_n$ *και την οποία ας συμβολίσουμε* $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

*Η απόδειξη έχει ως εξής. Πρώτα βλέπουμε ότι* $E[| X_n |] \leq 2n\sigma^2 < \infty$. *Παίρνοντας την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την* $\sigma$*-άλγεβρα* $\mathcal{F}_n$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= E[(Y_{n+1} + \sum_{k=1}^n Y_k)^2 - (n+1)\sigma^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ &= E[Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1}\sum_{k=1}^n Y_k + X_n - \sigma^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ &= E[Y_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] + 2\sum_{k=1}^n Y_k\, E[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + X_n - \sigma^2 \\ &= X_n \end{aligned}$$

*Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα martingale για την τυχαία μεταβλητή* $X_n$. *Σημειώστε ότι χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές* $X_n$ *και* $\sum_{k=1}^n Y_k$ *είναι* $\mathcal{F}_n$*-μετρήσιμες (αφού εξαρτώνται μόνο από τις* $Y_1, ..., Y_n$*), έτσι ώστε να μπορέσουμε εξάγουμε από την υπό συνθήκη πιθανότητα ως προς την σ-άλγεβρα αυτή. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι οι* $Y_k$ *είναι ανεξάρτητες, συνεπώς λοιπόν και* $Y_{n+1}$ *ανεξάρτητη της* $\mathcal{F}_n$, *για να πάρουμε ότι*

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] &= E[Y_{n+1}^2] = \sigma^2 \\ E[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= E[Y_{n+1}] = 0. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 2.1.6 Η διαδικασία martingale του Wald**
*Στο ίδιο πλαίσιο με το προηγούμενο παράδειγμα ας ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή* $X_0 = 0$, $X_n = \phi(\lambda)^{-n} exp(\lambda(Y_1 + ... + Y_n))$ *όπου* $\phi(\lambda) = E[exp(\lambda Y_k)]$, $k = 1, 2, ...$ *Τότε η* $X_n$, $n \in \mathbb{N}$ *είναι μία martingale ως προς την διήθηση* $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$.
*Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.*

Θα κλείσουμε αυτό τον κύκλο παραδειγμάτων με μία πολύ χρήσιμη κατηγορία martingales. Αυτές μπορεί να παραχθούν από κάποια δεδομένη martingale μέσω ενός μετασχηματισμού, του μετασχηματισμού martingale. Η γενίκευση του μετασχηματισμού αυτού σε συνεχή χρόνο θα αποτελέσει την βάση της μελέτης του στοχαστικού ολοκληρώματος.

**Παράδειγμα 2.1.7 Ο μετασχηματισμός martingale**
*Έστω* $X_n$ *μία martingale ως πρός ένα μέτρο πιθανότητας* $P$ *και μία διήθηση* $\mathcal{F}_n$ *και ας θεωρήσουμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $a_n$, *τέτοια ώστε* $a_n(\omega)$ *φραγμένη για κάθε* $n$, $n \in \mathbb{N}$ *και* $a_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. *Τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν τις συνθήκες που ικανοποιούν οι* $a_n$ *ονομάζονται* **προβλέψιμες**. *Ας κατασκευάσουμε τώρα την στοχαστική διαδικασία*

$$\bar{X}_n := (X \bullet a)_n := \sum_{i=1}^n a_i(X_i - X_{i-1}) = a_1(X_1 - X_0) + ... + a_n(X_n - X_{n-1})$$

*Η $\bar{X}_n$ ονομάζεται ο μετασχηματισμός martingaleτης $X_t$ και είναι και αυτή martingale.*

*Για αν το δούμε αυτό αρκεί να υπολογίσουμε το $E[\bar{X}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ και να δείξουμε ότι ισούται με $\bar{X}_{n-1}$. Στην απόδειξη παίζει σημαντικό ρόλο το ότι η $a_n$ είναι προβλέψιμη. Μετά αρκεί να εργαστούμε επαγωγικά για να δείξουμε ότι*

$$E[\bar{X}_n \mid \mathcal{F}_m] = \bar{X}_m, \ \ gia \ \ m < n.$$

**Παράδειγμα 2.1.8** *Στα πλαίσια του παραπάνω παραδείγματος ας θεωρήσουμε ότι η $X_n$ είναι super(sub)martingale και η στοχαστική διαδικασία $a_n$ είναι προβλέψιμη και επιπλέον $a_n \geq 0$. Τότε η στοχαστική διαδικασία*

$$\bar{X}_n := (X \bullet a)_n := \sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - X_{i-1}) = a_1(X_1 - X_0) + ... + a_n(X_n - X_{n-1})$$

*είναι επίσης μία super(sub)martingale.*

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι οποιαδήποτε συνάρτηση μίας martingale **δεν** είναι απαραίτητα και αυτή μία martingale ! Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει ένα τρόπο κατασκευής submartingales από martingales.

**Θεώρημα 2.1.2** *Μία κυρτή συνάρτηση μίας martingale $X_t$ είναι μία submartingale. Συγκεκριμένα αν $X_t$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$ και $\phi$ είναι μία κυρτή συνάρτηση, τότε η στοχαστική διαδικασία $M_t = \phi(X_t)$ είναι μία submartingale ως προς την ίδια διήθηση.*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από την ανισότητα του Jensen (βλ. Θεώρημα 1.4.4). Έστω $\phi$ μία κυρτή συνάρτηση. Τότε

$$E[\phi(X_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq \phi(E[X_t \mid \mathcal{F}_s]) = \phi(X_s)$$

(εφόσον $X_t$ είναι μία martingale). Η ανισότητα αυτή μας δείχνει ότι η στοχαστική διαδικασία $M_t$ είναι μία submartingale. □

**Παράδειγμα 2.1.9 Κατασκευή submartingale από martingale**
*Θα κινηθούμε και πάλι στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1. Εφόσον η συνάρτηση $\phi(x) = x^2$ είναι μία κυρτή συνάρτηση και η $S_n$ είναι μία martingale σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η $S_n^2$ θα πρέπει να είναι μία submartingale.*

*Αυτό μπορεί να επαληθευθεί εύκολα και από τον ορισμό της submartingale ως εξής: Μπορούμε να γράψουμε $S_n = S_{n-1} + X_n$. Έχουμε λοιπόν*

$$\begin{aligned} E[S_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= E[S_{n-1}^2 + X_n^2 + 2S_{n-1}X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}E[X_n] + E[X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \geq S_{n-1}^2 \end{aligned}$$

*το οποίο αποδεικνύει ευθέως ότι η $S_n$ είναι submartingale. Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το ότι η $S_{n-1}$ είναι $\mathcal{F}_{n-1}$ μετρήσιμη, η $X_n$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_{n-1}$, ότι $E[X_n] = 0$ και ότι εφόσον $X_n^2 \geq 0$ ισχύει ότι $E[X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \geq 0$.*

## 2.2 Χρόνοι στάσης

Στο τμήμα αυτό θα ορίσουμε μία πολύ σημαντική κατηγορία τυχαίων χρόνων, τους **χρόνους στάσης** (stopping times).

**Ορισμός 2.2.1** *Έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ μία διήθηση σε ένα σύνολο $\Omega$, όπου $I$ είναι ένα σύνολο δεικτών (όχι απαραίτητα διακριτό). Ένας* **χρόνος στάσης** *σχετικά με τη διήθηση αυτή είναι μία απεικόνιση $T : \Omega \to I$ τέτοια ώστε*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \ \forall \ t \in I$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι η $T$ είναι μία τυχαία μεταβλητή. Αν ο χρόνος στάσης $\tau < \infty$, $\sigma.\beta.$ λέμε ότι ο $\tau$ είναι πεπερασμένος $\sigma.\beta.$ Αν ισχύει ότι $\tau \leq T < \infty$ τότε λέμε ότι ο χρονος στάσης $\tau$ είναι φραγμένος.

Αν η διήθηση $\mathcal{F}_t$ θεωρηθεί σαν η φυσική διήθηση που παράγεται από κάποια στοχαστική διαδικασία $X_t$ (ή πιο γενικά θεωρήσουμε ότι η $\mathcal{F}_t$ είναι μία διήθηση που κάνει την $X_t$ μετρήσιμη), διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι η τυχαία μεταβλητή $T$ είναι ένας χρόνος στάσης αν η τιμή της μπορεί να καθοριστεί από την γνώση της στοχαστικής διαδικασίας μόνο κατά το παρελθόν και δεν χρειάζεται πληροφορία από το μέλλον. Στις περισσότερες περιπτώσεις ένας χρόνος στάσης είναι η **πρώτη φορά** που θα συμβεί ένα γεγονός.

**Παράδειγμα 2.2.1** *Στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 ας ορίσουμε σαν $T(\omega) = inf\{n : S_n = K\}$, δηλαδή την πρώτη φορά που ο παίκτης παίρνει $K$ δραχμές. Τότε η τυχαία μεταβλητή $T(\omega)$ είναι ένας χρόνος στάσης.*

**Παράδειγμα 2.2.2 Ένας χρόνος που δεν είναι χρόνος στάσης**
*Στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 ας ορίσουμε σαν $T_4(\omega)$ τον χρόνο που θα πρέπει να σταματήσουμε το παιγνίδι έτσι ώστε να είμαστε ακριβώς 4 ρίψεις πριν φτάσουμε στο ποσό των $K$ δραχμών. Ο χρόνος αυτός δεν είναι χρονος στάσης δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιός θα είναι ο χρόνος αυτός παρά μόνο αφού θα τον έχουμε περάσει. Πιο συγκεκριμένα (αν γινόταν να ταξιδεύουμε στο παρελθόν και στο μέλλον) θα έπρεπε να φτάναμε στο ποσό $K$ (το οποίο θα γίνει σε μια χρονική στιγμή $\tau(\omega) > T_4(\omega)$ και μόνο τότε θα μπορέσουμε να καθορίσουμε τον $T_4(\omega) = \tau(\omega) - 4$. Μιά και ο $\tau(\omega)$ είναι χρόνος στάσης βλέπουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $T_4$ απαιτεί γνώση του μέλλοντος γιατί $\{T_4 \leq t\} \notin \mathcal{F}_t$.*

**Παράδειγμα 2.2.3 Χρόνοι εισόδου και εξόδου σε κάποιο σύνολο**
*Κάτω από ορισμένες σχετικά ασθενείς συνθήκες, τις οποίες δεν θα αναφέρουμε εδώ, ο χρόνος εισόδου $T^G$ μίας στοχαστικής διαδικασίας $X_t$ σε ένα σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$ δηλαδή ο*

$$T^G(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in G\}$$

*είναι ένας χρόνος στάσης. Το ίδιο ισχύει και για τον χρόνο εξόδου από το σύνολο $G$*

$$\tau^G = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \notin G\}$$

*Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $T^G = \tau^{G^c}$ και $\tau^G = T^{G^c}$.*

Σαν τελευταία παραδείγματα αναφέρουμε τα ακόλουθα, τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικά με τους χρόνους στάσης.

**Παράδειγμα 2.2.4** *Αν $T$ και $S$ χρόνοι στάσης τότε και $S+T$, $S \wedge T$, $S \vee T$ είναι επίσης χρόνοι στάσης. Το ίδιο ισχύει και για το $t \wedge T$.*

**Παράδειγμα 2.2.5** *Έστω μία ακολουθία $\tau_n$ από χρόνους στάσης ως προς κάποια διήθηση $\mathcal{F}_s$. Τότε και οι χρονοι $\inf_n \tau_n$, $\liminf_n \tau_n$, $\limsup_n \tau_n$ είναι επίσης χρόνοι στάσης ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$ αρκεί η διήθηση αυτή να είναι δεξιά συνεχής δηλαδή να ισχύει $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$.*

**Παράδειγμα 2.2.6 Προσέγγιση ενός χρόνου στάσης από μία ακολουθία φραγμένων χρόνων στάσης**
*Με βάση τις παρατηρήσεις του παραδείγματος 2.2.4) μπορούμε να δούμε ότι κάθε χρόνος στάσης $\tau$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία από φραγμένους χρόνους στάσης και συγκεκριμένα από την ακολουθία $\tau \wedge n$, για την οποία φυσικά ισχύει $\lim_{n\to\infty} \tau \wedge n = \tau$. Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην απόδειξη θεωρημάτων σχετικά με τους χρόνους στάσης.*

**Παράδειγμα 2.2.7 Προσέγγιση συνεχών χρόνων στάσης από διακριτούς χρόνους στάσης** *[8] Πολλές φορές στην απόδειξη αποτελεσμάτων σε συνεχή χρόνο, είναι πιο εύκολο να αποδεικνύουμε πρώτα το αποτέλεσμα σε διακριτό χρόνο και κατόπιν να χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του συνεχούς χρόνου από μία ακολουθία διακριτών χρόνων και να παίρνουμε το κατάλληλο όριο. Στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητο να προσεγγίσουμε έναν συνεχή χρόνο στάσης από μία ακολουθία διακριτών χρόνων στάσης. Αυτό μπορεί να γίνει με τον ακόλουθο τρόπο:*

*Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία χρόνων $t_i := t_i^n$ για την οποία ισχύει $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots$ και $\lim_{i\to\infty} t_i^n = \infty$ και $\lim_{n\to\infty} \sup \mid t_{k+1}^n - t_k^n \mid = 0$. Ας θεωρήσουμε έναν (συνεχή) χρόνο στάσης $\tau$ ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ και ας ορίσουμε την ακολουθία*

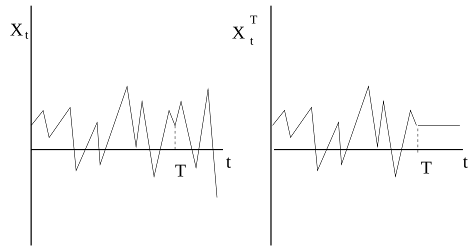
$$\tau_n = \begin{cases} t_{k+1}^n, & \text{αν} \quad t_k^n \le \tau < t_{k+1}^n, \quad k \ge 0 \\ \infty, & \text{αν} \qquad \tau = \infty \end{cases}$$

*Παρατηρούμε ότι αν $t_n = \max\{t_k^n : t_k^n \le t\}$ τότε*

$$\{\tau_n \le t\} = \{\tau_n \le t_n\} = \{\tau < t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n} \subset \mathcal{F}_t$$

*Συνεπώς, η ακολουθία $\tau_n$ είναι μία ακολουθία διακριτών χρόνων στάσης ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$ για την οποία ισχύει $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. Η ακολουθία $\tau_n$ λοιπόν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν διακριτή προσέγγιση του συνεχούς χρόνου στάσης $\tau$. Υπάρχει μία ελευθερία στον τρόπο επιλογής της ακολουθίας $t_i^n$. Μία πιθανή επιλογή είναι $t_i^n = \frac{i}{2^n}$. Για την επιλογή αυτή μπορούμε να γράψουμε σε συμπαγή μορφή $\tau_n = 2^{-n}[2^n\tau + 1]$ όπου $[\cdot]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος, και ισχύει $\tau_n \downarrow \tau$.*

Πολύ χρήσιμος στο μέλλον θα είναι και ο ορισμός της σ-άλγεβρας που αντιστοιχεί στην πληροφορία για μία στοχαστική διαδικασία μέχρι κάποιο χρόνο στάσης $T$.




Σχήμα 2.1: Στάση (διακοπή) της στοχαστικής διαδικασίας $X_t$ στον χρόνο στάσης $T$. Στην πρώτη εικόνα φαίνεται η αρχική στοχαστική διαδικασία $X_t$ και στην δεύτερη η σταματημένη διαδικασία $X_t$ τον τυχαίο χρόνο $T$.

**Ορισμός 2.2.2** *Έστω $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ μία διήθηση. Η $\mathcal{F}_T$ όπου $T$ είναι ένας χρόνος στάσης ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$ είναι το σύνολο που αποτελείται από τα γεγονότα $A \in \mathcal{F}$ που ικανοποιούν την συνθήκη $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Η $\mathcal{F}_T$ είναι μία σ-άλγεβρα.*

Αν $S$ και $T$ είναι δύο χρόνοι στάσης τέτοιοι ώστε $S \leq T$ τότε $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

## 2.3 Επιλεκτική στάση

Η επιλεκτική στάση (optional stopping) μας δίνει πληροφορία σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί αν σταματήσουμε μία martingale ή μία super(sub)martingale σε κάποιο χρόνο στάσης $T$. Η επιλεκτική στάση αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική στην στοχαστική ανάλυση και την θεωρία των martingale και διευκολύνει υπολογισμούς μέσων τιμών και ποσοτήτων που σχετίζονται με χρόνους στάσης.

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της σταματημένης διαδικασίας (stopped process).

**Ορισμός 2.3.1** *Αν $T$ είναι ένας χρόνος στάσης τότε μπορούμε να ορίσουμε την σταματημένη διαδικασία $X_t^T := X_{t\wedge T}$.*

Είναι προφανές από τον ορισμό, ότι η σταματημένη διαδικασία $X_t^T$ έχει ακριβώς τις ίδιες τροχίες με την $X_t$ μέχρι τον χρόνο στάσης $T$, ενώ μετά τον χρόνο στάσης $T$ η $X_t^T$ είναι 'παγωμένη' στην τιμή $X_T$, δηλαδή

$$X_t^T = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{αν} \quad t < T(\omega) \\ X_T(\omega), & \text{αν} \quad t \geq T(\omega) \end{cases}$$

Μία πραγματοποίηση της διαδικασίας $X_t$ και η σταματημένη διαδικασία $X_t^T = X_{t\wedge T}$ φαίνονται στο Σχ. 2.1. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι μία σταματημένη super(sub)martingale είναι και αυτή μία super(sub)martingale.

**Θεώρημα 2.3.1 Μία σταματημένη martingale είναι μία martingale**
*(i) Αν $X_t$ είναι μία martingale ως πρός μία διήθηση $(\mathcal{F}_t$ και $T$ ένας χρόνος στάσης ως πρός την ίδια διήθηση τότε η σταματημένη διαδικασία $X_t^T = X_{t\wedge T}$ είναι και*

*αυτή μία martingale ως προς την ίδια διήθηση. Ισχύει συνεπώς* $E[X_{t\wedge T}] = E[X_0]$
*(ii) Αν η* $X_t$ *είναι μία super(sub)martingale τότε η σταματημένη διαδικασία είναι επίσης μία super(sub)martingale. Ισχύει συνεπώς* $E[X_{t\wedge T}] \leq (\geq) E[X_0]$.

**Απόδειξη:** Θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος σε διακριτό χρόνο $t = n \in \mathbb{N}$ και θα σκιαγραφήσουμε μόνο την διαδικασία της απόδειξης σε συνεχή χρόνο $t \in \mathbb{R}$. Για την πλήρη απόδειξη σε συνεχή χρόνο παραπέμπουμε στον [1].
$(i)$ Ορίζουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (στοχαστική διαδικασία) $a_n$ έτσι ώστε

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αν $n \leq T$ τότε $X_{n\wedge T} = X_n$ και $a_m = 1$ για $1 \leq m \leq n$. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή

$$\begin{aligned} X_{n\wedge T} - X_0 = X_n - X_0 &= a_n(X_n - X_{n-1}) + a_{n-1}(X_{n-1} - X_{n-2}) \\ &+ \ ... + a_1(X_1 - X_0) \end{aligned}$$

Αν $n > T$ τότε $T = m$ όπου $m < n$ και $X_{n\wedge T} = X_T = X_m$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a_1 = ... = a_m = 1$ και $a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_n = 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} X_{n\wedge T} - X_0 &= X_m - X_0 = a_m(X_m - X_{n-1}) + a_{m-1}(X_{m-1} - X_{m-2}) \\ &+ \ ... + a_1(X_1 - X_0) = (X \bullet a)_n \end{aligned}$$

Σε κάθε περιπτωση λοιπόν έχουμε ότι

$$X_{n\wedge T} - X_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - X_{i-1})$$

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι $a_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $a_n$ είναι προβλέψιμη. Αυτό μπορεί να φανεί από το ότι το γεγονός $\{a_n = 0\} = \{T(\omega) \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ καθώς επίσης και από το ότι το γεγονός $\{a_n = 1\} = \{T(\omega) \geq n\} = \{T > n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Με άλλα λόγια μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με το αν η μεταβλητή $a_n$ παίρνει την τιμή 1 ή την τιμή 0, γνωρίζοντας την ιστορία της $X_i$ μόνο ως το $i = n-1$ και όχι απαραίτητα ως το $i = n$. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα 2.1.7 βλέπουμε ότι $X_{n\wedge T} = (X \bullet a)_n$ όπου με $(X \bullet a)$ συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό martingale της martingale $X_n$ με την στοχαστική διαδικασία $a_n$ (βλ. Παραδείγμα 2.1.7). Δείξαμε όμως στο παράδειγμα αυτό ότι ο μετασχηματισμός martingale μίας martingale είναι και αυτός martingale. Συνεπώς η $X_{n\wedge T}$ είναι martingale και ισχύει $E[X_{n\wedge T}] = E[X_0]$.

Για τον συνεχή χρόνο ορίζουμε μία ακολουθία διακριτών χρόνων $T_n = \frac{(k+1)t}{2^n}$ αν $\frac{kt}{2^n} \leq T \leq \frac{(k+1)t}{2^n}$. Η στοχαστική διαδικασία $X_{\frac{kt}{2^n}}$ είναι μία martingale σε διακριτό χρόνο (ο δείκτης του χρόνου είναι το $k$, οπότε γι αυτή ισχύει $E[X_{T_n}] = E[X_t]$ για κάθε $n$. Μετά πρέπει απλά να πάρουμε το όριο $n \to \infty$. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στον [1]. Τονίζεται ότι στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου είναι

απαραίτητο η martingale $X_t$ να ικανοποιεί την ιδιότητα της δεξιάς συνέχειας.
$(ii)$ Για την περίπτωση των super ή submartingales η απόδειξη είναι παρόμοια μόνο που θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.1.8. □

**Σχόλιο:** Στο παραπάνω θεώρημα, αν η $X_t$ είναι μία διαδικασία σε συνεχή χρόνο θεωρούμε ότι είναι δεξιά συνεχής.

Είναι πολύ σημαντικό να απαντήσουμε την ερώτηση σχετικά με το τι συμβαίνει στην μέση τιμή μίας σταματημένης martingale . Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $t$ έχουμε ότι $E[X_{t\wedge T}] = E[X_0]$. Είναι επιτρεπτό όμως να γράψουμε απλά $E[X_T] = E[X_0]$; Ή θέτοντας το ερώτημα λίγο διαφορετικά είναι επιτρεπτό να πάρουμε το όριο $t \to \infty$, να αντιστρέψουμε την σείρα της μέσης τιμής και του ορίου, και να καταλήξουμε ότι $E[X_T] = E[X_0]$; Μπορούμε να καταλάβουμε ότι κάτι τέτοιο μπορεί να είναι προβληματικό αν ο χρόνος στάσης $T$ δεν είναι πεπερασμένος. Η απάντηση λοιπόν στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική σε **ορισμένες μόνο** περιπτώσεις! Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση μίας super(sub)martingale αλλά τώρα το ερώτημα είναι η ισχύ της αντίστοιχης ανισότητας στο όριο καθώς $t \to \infty$. Οι περιπτώσεις αυτές συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.3.2** *Έστω $X$ μία super(sub)martingale και $T$ ένας χρόνος στάσης. Τότε η $X_T$ είναι ολόκληρώσιμη και ισχύει $E(X_T) \leq E(X_0)$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις*

*$(i)$ $T$ φραγμένος*

*$(ii)$ $X$ φραγμένη για κάθε $t$ και $T$ σ.β. φραγμένος*

*$(iii)$ $E[T] < \infty$ και για κάποιο $K$ ισχύει*

$$| X_s(\omega) - X_t(\omega) | \leq K, \quad \forall s, t, \omega$$

*Αν η $X$ είναι μία martingale ισχύει η ισότητα.*

**Απόδειξη:** Θα δώσουμε την απόδειξη για την διακριτή περίπτωση. Για την συνεχή περίπτωση αρκεί να εργαστούμε όπως και στο θεώρημα 2.3.1.
Από το θεώρημα 2.3.1 η $X_t^T = X_{t\wedge T}$ είναι ολοκληρώσιμη και $E[X^T - X_0] \leq 0$.
Στην περίπτωση $(i)$ αρκεί να πάρουμε το $n$ ίσο με το άνω φράγμα για το $T$.
Στην περίπτωση $(ii)$ μπορούμε να θέσουμε $n \to \infty$ στην ανισότητα για την μέση τιμή της σταματημένης super(sub)martingale και να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με αυτό το θεώρημα αν $X_n \to X$ $\sigma.\beta.$ και $| X_n | \leq K$, $\forall \omega, n$ τότε $E(| X_n - X |) \to 0$.
Για το $(iii)$ στην διακριτή περίπτωση έχουμε

$$| X_{T\wedge n} - X_0 | = \left| \sum_{k=1}^{T\wedge n} (X_k - X_{k-1}) \right| \leq KT$$

και αφού $E[T] < \infty$ μπορούμε να θέσουμε $n \to \infty$ στην ανισότητα για την μέση τιμή της σταματημένης super(sub)martingale και να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (dominated convergence theorem).
Για την συνεχή περίπτωση απλά μπορούμε να επιλέξουμε μία κατάλληλη ακολουθία από χρόνους στάσης και να σταματήσουμε την (super)martingale στην ακολουθία των χρόνων αυτών. □

**Σχόλιο:** Αρκετοί συγγραφείς (π.χ. [4] ή [13]) συνοψίζουν τις συνθήκες για το παραπάνω θεώρημα στις τρείς παρακάτω συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

1. $T < \infty$, $\sigma.\beta.$
2. $X_T$ ολοκληρώσιμη
3. $E[X_n \mathbf{1}_{\{T>n\}}] \to 0$ καθώς $n \to \infty$

Ο λόγος που παραθέσαμε το θεώρημα στην μορφή που είναι εδώ (βλ. π.χ. [37]) είναι γιατί στην μορφή αυτή οι συνθήκες είναι συνήθως πιο εύκολο να ελεγθούν. Είναι βέβαια δυνατόν να δειχθεί ότι οι δύο μορφές είναι ισοδύναμες.

**Παράδειγμα 2.3.1 Παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης**
*Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο περίπατο σε μία διάσταση. Ο τυχαίος περιπατητής έχει ίση πιθανότητα για μία κίνηση προς τα δεξιά ή μία κίνηση προς τα αριστερά. Ας ονομάσουμε $Y_i$ την τυχαία μεταβλητή*

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{κίνηση προς τα δεξιά} \\ -1, & \text{κίνηση προς τα αριστερά} \end{cases}$$

*Οι τυχαίες μεταβλητές $Y_i$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d ) με $E[Y_i] = 0$ και $E[Y_i^2] = 1$. Τότε η θέση του τυχαίου περιπατητή (θεωρώντας ότι ξεκινάει από το 0) είναι η τυχαία μεταβλητή $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $T = min\{n : S_n = -a \ or \ S_n = b\}$ (η πρώτη φορά που ο τυχαίος περιπατητής φτάνει στο σημείο $-a$ ή $b$).*
*(i) Δείξτε ότι με πιθανότητα 1 ο περιπατητής θα εγκαταλείψει τα διάστημα $[-a, b]$ σε πεπερασμένο χρόνο.*
*(ii) Βρείτε την πιθανότητα ο τυχαίος περιπατητής να φτάσει στο $-a$ πρίν το $b$.*
*(iii) Ποιά είναι η μέση τιμή της $T$;*

*Έχουμε ήδη δει ότι η στοχαστική διαδικασία $S_n$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$. Το ίδιο συμβαίνει και για την στοχαστική διαδικασία $Z_n = S_n^2 - n$. Μπορούμε επίσης σχετικά εύκολα να δούμε ότι η μεταβλητή $T$ είναι ένας χρόνος στάσης ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_n$.*
*(i) Ισχύει ότι $E[S_{n\wedge T}^2 - (n \wedge T)] = E[S_0^2 - 0] = 0$ (θυμηθείτε ότι αυτό ισχύει πάντοτε χωρίς κανένα περιορισμό στον $T$). Το $S_{n\wedge T}$ είναι φραγμένο και ισχύει $-a \leq S_{n\wedge T} \leq b$ οπότε και $S_{n\wedge T}^2 \leq K$ για κατάλληλη επιλογή του $K$. Συνεπώς $E[T] = E[S_{n\wedge T}^2] \leq K$. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $T < \infty$ $\sigma.\beta.$*

*(αν αυτό δεν το βλέπετε αμέσως χρησιμοποιείστε την ανισότητα του Chebychev) οπότε* $P(T<\infty)=1$ *και ο περιπατητής θα εγκαταλείψει το διάστημα* $[-a,b]$ *σε πεπερασμένο χρόνο.*
*(ii) Ας ονομάσουμε* $p_a$ *την άγνωστη πιθανότητα. Ισχύει ότι* $E[S_{n\wedge T}]=E[S_0]=0$ *(θυμηθείτε ότι αυτό ισχύει πάντοτε χωρίς κανένα περιορισμό στον* $T$*). Η στοχαστική διαδικασία* $S_{n\wedge T}$ *είναι φραγμένη εφόσον* $-a\le S_{n\wedge T}\le b$ *και συνεπώς από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης*

$$E[S_0]=\lim_{n\to\infty}E[S_{n\wedge T}]=E[\lim_{n\to\infty}S_{n\wedge T}]=E[S_T]$$

*(ουσιαστικά χρησιμοποιούμε το (iii) του θεωρήματος 2.3.2). Για τον χρονο στάσης* $T$ *λοιπόν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος 2.3.2 και έχουμε* $E[S_0]=E[S_T]$*. Εφόσον* $S_0=0$ *το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι ίσο με το 0. Από τον ορισμό του* $T$*, η* $S_T$ *μπορεί να πάρει είτε την τιμή* $-a$ *με πιθανότητα* $p_a$ *είτε την τιμή* $b$ *με πιθανότητα* $1-p_a$*. Είναι λοιπόν προφανές ότι* $E[S_T]=-ap_a+(1-p_a)b$*. Έτσι από το θεώρημα επιλεκτικής στάσης έχουμε ότι*

$$0=-ap_a+(1-p_a)b \implies p_a=\frac{b}{a+b}$$

*(iii) Για να βρούμε την μέση τιμή της* $T$ *θα χρησιμοποιήσουμε ξανά ότι η τυχαία μεταβλητή* $Z_n=S_n^2-n$ *είναι μία martingale. Όπως είδαμε παραπάνω ο χρόνος στάσης* $T$ *ικανοποιεί μία από τις συνθήκες του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης (2.3.2) οπότε έχουμε*

$$\begin{aligned} E[Z_T] &= E[Z_0] \implies \\ 0 &= p_a a^2+(1-p_a)b^2-E[T] \implies \\ E[T] &= ab<\infty. \end{aligned}$$

*Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και με στοιχειώδη τρόπο χρησιμοποιώντας συνδυαστική για να βρούμε την κατανομή που ακολουθεί η* $S_n$ *αλλά αυτός ο τρόπος είναι κατά πολύ πιο εύκολος.*

Πρόβληματα σχετικά με το παραπάνω παράδειγμα βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στην αναλογιστική επιστήμη και συγκεκριμένα στον υπολογισμό του αποθεματικού ασφαλιστικών εταιρειών. Δεν θα επεκταθούμε σε τέτοιες εφαρμογές στο βιβλίο αυτό. Για μία πολύ καλή κάλυψη του θέματος παραπέμπουμε στο [19].

Θα δώσουμε τώρα και ένα παράδειγμα στο οποίο οι συνθήκες του θεωρήματος 2.3.2 δεν ισχύουν.

**Παράδειγμα 2.3.2 Ένας χρόνος στάσης για τον οποίο δεν ισχύει το θεώρημα επιλεκτικής στάσης**
*Θα παραμείνουμε στα πλαίσια του παραπάνω παραδείγματος αλλά τώρα ας ορίσουμε σαν* $T=min\{n:S_n=b\}$*,* $b\neq 0$*, δηλαδή* $T$ *είναι ο πρώτος χρόνος που ο περιπατητής φτάνει στο σημείο* $b$*. Ο χρόνος* $T$ *είναι ένας χρόνος στάσης. Έστω*

*ότι μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.3.2 για την martingale $S_n$. Τότε θα είχαμε $E[S_T] = E[S_0]$ και αφού $S_T = b$ και $S_0 = 0$ θα έχουμε $b = 0$ το οποίο είναι άτοπο. Που υπάρχει το πρόβλημα; Το πρόβλημα είναι ότι ναι μεν ισχύει $E[S_{n\wedge T}] = E[S_0] = 0$ οπότε και $\lim_{n\to\infty} E[S_{n\wedge T}] = 0$ αλλά τώρα*

$$0 = E[S_0] = \lim_{n\to\infty} E[S_{n\wedge T}] \neq E[\lim_{n\to\infty} S_{n\wedge T}] = E[S_T]$$

*μιά και η $S_{n\wedge T}$ δεν είναι πλέον απαραίτητα φραγμένη (μπορεί να γίνει και $-\infty$) οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δεν μπορεί πλέον να εφαρμοστεί για να δικαιολογηθει η αντιμετάθεση της μέσης τιμής με το όριο. Επίσης το $S_{n\wedge T}$ δεν είναι απαραίτητα μονότονη ακολουθία και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ούτε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι για τον χρόνο στάσης $T$ ισχύει $T < \infty, \sigma.\beta.$ αλλά $E[T] = \infty$.*

Κλείνοντας το τμήμα αυτό, θέλουμε να τονίσουμε ότι η εφαρμογή του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης απαιτεί πολύ μεγάλη προσοχή και ίσως είναι καλύτερο να ξεκινάμε από την σχέση $E[X_{n\wedge T}] = E[X_0]$ που ισχύει για μία martingale για **οποιοδήποτε** χρόνο στάσης $T$ και μετά να προσπαθούμε να δικαιολογήσουμε την σχέση $E[X_T] = E[X_0]$ αν ισχύει παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ και προσπαθώντας να χρησιμοποιήσουμε κάποιο από τα θεωρήματα σύγκλισης, παρά να εφαρμόζουμε κατευθείαν το θεώρημα 2.3.2 εκτός και αν είμαστε πολύ σίγουροι για την ισχύ των συνθηκών $(i) - (iii)$.

## 2.4 Σύγκλιση διαδικασιών *martingale*

Θα ασχοληθούμε τώρα με την σύγκλιση των διαδικασιών martingale. Το θέμα αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον από θεωρητικής άποψης καθώς και ιδιαίτερα χρήσιμο σε μία σειρά από εφαρμογές. Υπάρχουν μία σειρά από θεωρήματα σύγκλισης για martingale αλλά εμείς εδώ θα περιοριστούμε σε δύο θεωρήματα τα οποία είναι αρκετά για τους σκοπούς μας. Τα θεωρήματα αυτά αναφέρονται στην σύγκλιση martingales οι οποίες είναι $L^1$ και στην σύγκλιση martingales οι οποίες είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες (ο ορισμός της έννοιας αυτής ακολουθεί).

Ξεκινάμε με το θεώρημα σχετικά με την σύγκλιση $L^1$ martingale.

**Θεώρημα 2.4.1 Σύγκλιση $L^1$-martingale**
*Έστω $X_t$ μία $L^1$ super(sub)martingale, δηλαδή μία super(sub)martingale για την οποία ισχύει $E \mid X_t \mid < \infty$. Τότε το όριο $lim_{t\to\infty} X_t$ υπάρχει σ.β.*

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

Το όριο $X := \lim_{t\to\infty}$ είναι μία $L^1$ τυχαία μεταβλητή δηλαδή ισχύει $E[\mid X \mid] < \infty$. Το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει σχεδόν βέβαιη σύγκλιση αλλά όχι σύγκλιση στον $L^1$ η οποία είναι και απαραίτητη όταν θέλουμε να μελετήσουμε τις μέσες τιμές κάποιας στοχαστικής διαδικασίας και τα όρια τους. Για να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση στον $L^1$ θα πρέπει να επιβάλλουμε κα μία επιπλέον συνθήκη στις martingales, την συνθήκη της **ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας** (uniform integrability).

**Ορισμός 2.4.1** *Η στοχαστική διαδικασία $X_t$ ονομάζεται* **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\int_{\{|X_t|>M\}} | X_t | \, dP = E[| X_t | \mathbf{1}_{\{|X_t|>M\}}] < \epsilon$$

*για κάθε $t$.*

**Σχόλια:**(1) Η $X_t$ μπορεί να θεωρηθεί απλά και σαν μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ή σαν μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.
(2) Μπορούμε να δείξουμε (αφήνεται σαν άσκηση) ότι η τυχαία μεταβλητή $X$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $E[| X |; \{| X |> M\}] < \epsilon$. Συνεπώς για κάθε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_t$ υπάρχει ακολουθία αριθμών $M_t$ τέτοια ώστε $E[| X_t |; \{| X_t |> M_t\}] < \epsilon$. Αν τα $M_t$ είναι ανεξάρτητα του $t$ τότε η ακολουθία $X_t$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.
(3) Άλλοι συγγραφείς χρησιμοποιούν για τον ορισμό της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας την συνθήκη $\lim_{M\to\infty} \sup_t E[| X_t |; \{| X_t |> M_t\}] = 0$. Ίσως αυτή η μορφή του ορισμού να είναι και πιο καθαρή σχετικά με το τι σημαίνει η ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα και το πως η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει την σύγκλιση κατά $L^1$

Το παρακάτω παράδειγμα που οφείλεται στον Williams [37] δίνει πολύ εύστοχα την διαφορά μεταξύ $L^1$ τυχαίων μεταβλητών και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών και το γιατί μπορεί να χρειαστεί ο διαχωρισμός αυτός όταν μελετάμε σύγκλιση.

**Παράδειγμα 2.4.1** *Ας θεωρήσουμε το χώρο πιθανοτήτων $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ όπου $P$ είναι το μέτρο Lebesgue στο διάστημα $[0,1]$. Ας πάρουμε την ακολουθία διαστημάτων $I_n = (0, \frac{1}{n})$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n = n\mathbf{1}_{I_n}$. Η $X_n$ μπορεί να θεωρηθεί σαν μία στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο $n$.*

*(i) Η ακολουθία αυτή είναι $L^1$ (εννοούμε δηλαδή φραγμένη στον $L^1$) εφόσον $E[X_n] = 1$ για κάθε $n$. Όμως, η ακολουθία αυτή δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη όπως μπορεί να φανεί καθαρά από το ότι για οποιοδήποτε $M > 0$ αν επιλέξουμε $n > M$ έχουμε ότι*

$$E[| X_n |; \{| X_n |> M\}] = E[| X_n | \mathbf{1}_{\{|X_n|>M\}}] = nP(I_n) = 1$$

*Συνεπώς μία $L^1$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών δεν είναι απαραίτητα και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Βέβαια μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών θα είναι απαραιτήτως και $L^1$.*

*(ii) Ας δούμε τώρα τις συνέπειες του παραπάνω στην σύγκλιση. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $X_n \to 0$ σχεδόν βέβαια αλλά $E[X_n] = 1$ για κάθε $n$ και συνεπώς $E[X_n] \not\to 0$. Συνεπώς για ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών που είναι $L^1$ η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση δεν συνεπάγεται απαραίτητα και την σύγκλιση κατά $L^1$. Αυτό ισχύει μόνο για ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών. Η παρατήρηση αυτή είναι συμβατή με τα αποτελέσματα της παραγράφου 1.6.*

Ένα εύλογο ερώτημα είναι το πώς μπορούμε να παράγουμε ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες στοχαστικές διαδικασίες

**Παράδειγμα 2.4.2** *Αν $X_t$ είναι μία στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε $E[\mid X\mid^p] < C, p > 1$ για κάθε $t$ τότε η $X_t$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.*

*Πράγματι, αν $v \geq M > 0$ τότε $v \leq M^{1-p}v^p$. Συνεπώς για κάθε $t$ έχουμε*

$$\int_{\{|X_t|>M\}} \mid X_t \mid dP \leq M^{1-p} \int_{\{|X_t|>M\}} \mid X_t \mid^p dP \leq M^{1-p}C$$

*Συνεπώς, επιλέγοντας $\epsilon = M^{1-p}C$ μπορούμε να δούμε ότι η $X_t$ ικανοποιεί την συνθήκη για την ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα.*

**Παρατήρηση:** Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ισχύει για $p = 1$. Αν μία στοχαστική διαδικασία ειναι φραγμένη στον $L^1$ τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι αυτή είναι και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη όπως προέκυψε από το παράδειγμα 2.4.1.

**Παράδειγμα 2.4.3** *Αν η στοχαστική διαδικασία $X_t$ είναι φραγμένη από μία $L^1$ τυχαία μεταβλητή δηλαδή $\mid X_t(\omega) \mid\leq Y(\omega)$, $E[Y] \leq \infty$, τότε η στοχαστικη διαδικασία $X_t$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Αυτό και πάλι δεν έρχεται σε αντίθεση με τα όσα είπαμε παραπάνω γιατί ναι μεν η $X_t$ που έχει την παραπάνω ιδιότητα είναι $L^1$ αλλά οι $X_t$ με την ιδιότητα αυτή αποτελούν μία πιο ειδική κατηγορία $L^1$ στοχαστικών διαδικασιών εφόσον μία οποιαδήποτε $L^1$ στοχαστική διαδικασία δεν ικανοποιεί απαραίτητα την συνθήκη $\mid X(\omega) \mid< Y(\omega)$ για κάθε $\omega$.*

Θα κλείσουμε την παράθεση των παραδειγμάτων με ένα πολύ χρήσιμο παράδειγμα για τα θέματα που ακολουθούν.

**Παράδειγμα 2.4.4** *Αν $X$ είναι μία ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και $\mathcal{F}_t$ κάποια διήθηση τότε η στοχαστική διαδικασία $X_t$ που ορίζεται από την σχέση $X_t = E[X \mid \mathcal{F}_t]$ είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στοχαστική διαδικασία. Μάλιστα μπορούμε πολύ απλά να δούμε ότι ειναι και μία martingale. Αυτό είναι και το πρώτο παράδειγμα μίας ομοιόμορφα ολοκληρώσιμης martingale.*

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε ένα θεώρημα σύγκλισης για ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες martingale.

**Θεώρημα 2.4.2 Σύγκλιση ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale**
*(i) Έστω $X_t$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale. Τότε υπάρχει τυχαία*

*μεταβλητή $X$ τέτοια ώστε $\lim_{t\to\infty} X_t = X$ και η σύγκλιση είναι στον $L^1$.*
*(ii) Αν η $X_t$ είναι martingale τότε μπορεί να γραφεί σαν $X_t = E[X \mid \mathcal{F}_t]$ όπου $X = \lim_{t\to\infty} X_t$ το όριο της $X_t$ στον $L^1$, και $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$ (η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $X_t$).*

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

**Παράδειγμα 2.4.5** *Αν $X_t$ είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale και $lim_{t\to\infty} X_t = a$ στον $L^1$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε $X_t = a$, σ.β.*

*Πράγματι, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι $X_t = E[X \mid \mathcal{F}_t]$ όπου $X = \lim_{t\to\infty} X_t = X$ το όριο της $X_t$ στον $L^1$. Εφόσον $lim_{t\to\infty} X_t = a$ στον $L^1$ θα έχουμε ότι $X_t = E[a \mid \mathcal{F}_t] = a$. Η παραπάνω ισότητα ισχύει σ.β.*

Η εναλλακτική απόδειξη του νόμου $0-1$ του Kolmogorov αποτελεί κλασσικό παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος σύγκλισης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingales.

**Παράδειγμα 2.4.6 Νόμος $0-1$ του Kolmogorov**
*Έστω $X_n$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$ και $\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{T}_n$. Στην $\mathcal{T}_n$ περιέχεται η πληροφορία από την μεταβλητή $n+1$ και πέρα, ενώ η $\mathcal{T}$ περιέχει την ασυμπτωτικη πληροφορία καθώς $n \to \infty$. Αν $F \in \mathcal{T}$ τότε $P(F) = 0$ ή $P(F) = 1$.*

**Απόδειξη:** *Ορίζουμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ και την στοχαστική διαδικασία $Y_n = E[\mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_n]$ όπου $A \in \mathcal{T}$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.4.4 η $Y_n$ είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale οπότε υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή $Y$ τέτοια ώστε $Y_n \to Y$ (στον $L^1$) και $Y_n = E[Y \mid \mathcal{F}_n]$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $E[Y \mid \mathcal{F}_n] = E[\mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_n]$ για κάθε $n$. Συνεπώς $Y = \mathbf{1}_A$ σ.β. Εφόσον όμως οι $X_n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{1}_A$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_n$. Άρα $Y_n = E[\mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_n] = E[\mathbf{1}_A] = P(A)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $P(A) = Y_n = Y = \mathbf{1}_A$. Η $\mathbf{1}_A$ είναι όμως μία τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο δύο τιμές 0 και 1. Άρα $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$.*

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο.

**Θεώρημα 2.4.3** *Έστω $X$ μία $L^1$ τυχαία μεταβλητή και $\mathcal{F}_t$ μία διήθηση. Τότε*

$$\lim_{t\to\infty} E[X \mid \mathcal{F}_t] = E[X \mid \mathcal{F}_\infty]$$

*όπου η σύγκλιση είναι σχεδόν βέβαιη (σ.β.) και $L^1$-σύγκλιση. Ως $\mathcal{F}_\infty$ ορίζεται η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\ge 0} \mathcal{F}_t)$ δηλαδή η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα σύνολα $A \in \bigcup_{t\ge 0} \mathcal{F}_t$.*

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

## 2.5 Ανισότητες *martingale*

Θα παραθέσουμε τώρα ορισμένες βασικές ανισότητες που ισχύουν για martingales. Θα παραθέσουμε τις ανισότητες για συνεχή χρόνο αλλά η γενίκευση σε διακριτό χρόνο είναι προφανής.

**Θεώρημα 2.5.1 Ανισότητα για submartingales του Doob.** *Έστω $X$ μία μη αρνητική submartingale. Τότε για $c > 0$*

$$cP(\sup_{k\leq n} X_k \geq c) \leq E[X_n; \{\sup_{k\leq n} X_k \geq c\}] \leq E[X_n]$$

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

Η επόμενη ανισότητα είναι επίσης ιδιαίτερα χρήσιμη

**Θεώρημα 2.5.2** *Έστω $p > 1$. Αν $X_t$ είναι μία martingale ή μία θετική submartingale τότε*

$$E[(\sup_{s\leq t} \mid X_s \mid)^p] \leq cE[\mid X_t \mid^p]$$

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

**Παράδειγμα 2.5.1** *Αν $X_n$ είναι ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες (iid) τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $P(X_i = \pm 1) = 1/2$ και $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Αποδείξτε ότι*

$$P[\sup_{m\leq n} \mid Y_m \mid \geq a] \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

**Απόδειξη** *Η $Y_n$ είναι μία martingale. Εφόσον η συνάρτηση $e^{bx}$ είναι κυρτή συνάρτηση η $e^{bY_n}$ είναι μία μη αρνητική submartingale (βλ. Θεώρημα 2.1.2). Συνεπώς έχουμε*

$$P[\sup_{m\leq n} Y_m \geq a] = P[\sup_{m\leq n} e^{bY_m} \geq e^{ab}] \leq e^{-ab}E[e^{bY_n}] = e^{-ab}(coshb)^n$$

*όπου χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $X_i$ για να υπολογίσουμε την μέση τιμή $E[e^{bY_n}]$. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο με την $-Y_n$ και παίρνουμε*

$$P[\sup_{m\leq n} (-Y_m) \geq a] = P[\sup_{m\leq n} e^{-bY_m} \geq e^{ab}] \leq e^{-ab}E[e^{-bY_n}] = e^{-ab}(coshb)^n$$

*Αθροίζοντας τις δύο αυτές ανισότητες παίρνουμε*

$$P[\sup_{m\leq n} \mid Y_m \mid \geq a] \leq 2e^{-ab}(coshb)^n$$

*Επειδή για κάθε b ισχύει* $cosh b \leq e^{b^2/2}$ *η παραπάνω ανισότητα μπορεί να γραφεί ως*

$$P[\sup_{m \leq n} | Y_m | \geq a] \leq 2e^{-ab+b^2 n/2}$$

*Μέχρι τώρα το b ήταν αυθαίρετο. Αν λοιπόν επιλέξουμε* $b = a/n$ *καταλήγουμε στο συμπέρασμα*

$$P[\sup_{m \leq n} | Y_m | \geq a] \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

## 2.6 Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής

Τα θεωρήματα που ακολουθούν μας δίνουν ένα χαρακτηρισμό γενικών διαδικασιών supermartingale σαν τη διαφορά μίας martingale και μίας αύξουσας διαδικασίας. Τα θεωρήματα αυτά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε διάφορες εφαρμογές της θεωρίας των martingales, για παράδειγμα σε προβλήματα βέλτιστοποιησης π.χ προβλήματα βέλτιστης στάσης (optional stopping). Ένα μεγάλο μέρος των προβλημάτων που εμφανίζονται στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά μπορεί να εκφραστούν σαν προβλήματα αυτής της μορφής. Θα επανέλθουμε στα προβλήματα αυτά και την ανιμετώπιση τους αργότερα.

**Θεώρημα 2.6.1 Αποσύνθεση Doob-Meyer** *Μία δεξιά συνεχής ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale* $X_t$ *μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή*

$$X_t = M_t - A_t$$

*όπου* $\{M_t\}$ *είναι μία δεξιά συνεχής martingale και* $\{A_t\}$ *είναι μία αύξουσα διαδικασία (increasing process ) για την οποία ισχύει* $A_0 = 0$. *Τόσο η* $M_t$ *όσο και η* $A_t$ *είναι προσαρμοσμένες στην διήθηση που παράγει η* $X_t$. *Επιπλέον η αποσύνθεση αυτή είναι μοναδική.*

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. Βλ. π.χ. [8].□

Η αποσύνθεση Doob-Meyer παίρνει μία κατά κάτι διαφορετική μορφή στην διακριτή περίπτωση στον χρόνο γι΄ αυτό και την παραθέτουμε εδώ. Η αποσύνθεση αυτή στην διακριτή περίπτωση ονομάζεται αποσύνθεση του Doob.

**Θεώρημα 2.6.2** *Αν* $X_n$, $n \in \mathbb{N}$ *είναι μία supermartingale, τότε υπάρχει μία martingale* $M_n$ *και μία αύξουσα διαδικασία* $A_n$ *τέτοια ώστε* $X_n = M_n - A_n$. *Η* $M_n$ *είναι μετρήσιμη ως προς την* $\mathcal{F}_n$ *και η* $A_{n+1}$ *είναι μετρήσιμη ως προς την* $\mathcal{F}_n$. *Υπενθυμίζουμε πως* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$.

**Απόδειξη:** Δεν θα δοκιμάσουμε να παραθέσουμε εδώ την απόδειξη του θεωρήματος στην γενική περίπτωση αλλά θα δώσουμε κάποιο σχέδιο απόδειξης για την διακριτή περίπτωση. Ας ορίσουμε την μεταβλητή

$$\begin{aligned} M_0 &= X_0 \\ M_n &= M_{n-1} + X_n - E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η $M_n$ είναι μία martingale. Τώρα ας ορίσουμε $A_n = M_n - X_n$. Τότε

$$A_n = A_{n-1} + X_{n-1} - E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

και αφού η $\{X_n\}$ είναι μία supermartingale μπορούμε να δούμε από τον ορισμό της supermartingale ότι $A_n \geq A_{n-1}$. Αφήνουμε την απόδειξη της μοναδικότητας στον αναγνώστη. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε π.χ. στο [27].□

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής μίας martingale.

**Ορισμός 2.6.1** *Αν $X_t$ είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale η* **διαδικασία τετραγωνική μεταβολής** *της* **(quadratic variation process)** *είναι η συνεχής αύξουσα διαδικασία $< X >_t$ η οποία είναι τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $X_t^2 - < X >_t$ να είναι martingale η οποία μηδενίζεται στο $t = 0$.*

Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής έχει και ένα διαφορετικό χαρακτηρισμό ο οποίος θα μας φανεί χρήσιμος στην ανάπτυξη του στοχαστικού ολοκληρώματος.

**Ορισμός 2.6.2 Εναλλακτικός ορισμός της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής** *Έστω $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t\}$ μία διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$ και $X_t$ μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale. Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της $X_t$ μπορεί να οριστεί και σαν το όριο κατά πιθανότητα*

$$< X >_t = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

*όπου $\mid \Delta \mid = sup \mid t_{i+1} - t_i \mid$.*

Ο πρώτος ορισμός της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μία martingale μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για martingales σε διακριτό χρονο.

**Σχόλιο:** Όπως θα δούμε και παρακάτω στο κεφάλαιο 4 όταν συζητήσουμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος, η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής μίας συνεχούς martingale μπορεί να οριστεί και μέσω του στοχαστικού ολοκληρώματος. Υπό την έννοια αυτή ο εναλλακτικός ορισμός είναι περιττός και θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι οι διαδικασίες που ορίζονται στους ορισμούς 2.6.1 και 2.6.2 ταυτίζονται. Ενώ εμείς εδώ στηρίξαμε την ύπαρξη της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής στην αποσύνθεση Doob-Meyer θα μπορούσαμε να την δείξουμε απευθείας κάνοντας χρήση του ορισμού του στοχαστικού ολοκληρώματος. Για μία τέτοια οπτική παραπέμπουμε π.χ. στον [15].

**Παράδειγμα 2.6.1** *Στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 έχουμε ότι $< Y >_n = n$.*

Θα συνεχίσουμε τώρα με ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί πολύ στην θεωρία του στοχαστικού ολοκληρώματος.

**Ορισμός 2.6.3 Διαδικασίες φραγμένης μεταβολής (Processes of bounded variation ).** *Έστω $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t\}$ μία διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$. Για μία διαδικασία $X_t$ ορίζουμε*

$$S_t^{\Delta} = \sum_i \mid X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid$$

*Λέμε ότι η διαδικασία $X$ είναι* **πεπερασμένης μεταβολής (finite variation )** *αν για κάθε $t$*

$$S_t = \sup_{\Delta} S_t^{\Delta} < \infty$$

*Αν $lim_{t\to\infty} S_t < \infty$ τότε λέμε ότι η διαδικασία είναι* **φραγμένης μεταβολής (bounded variation )**.

**Θεώρημα 2.6.3** *Μία συνεχής martingale $\{X_t\}$ με πεπερασμένη μεταβολή (finite variation ) και $X_0 = 0$ είναι ίση με το 0 για κάθε $t$, δηλαδή $X_t = 0$.*

**Απόδειξη:** Ας ονομάσουμε $V_t$ την μεταβολή της $X$ στο διάστημα $[0, t]$. Τότε

$$E[X_t^2] = E[\sum_{i=0}^{k-1}(X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2)] = E[\sum_{i=0}^{k-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες της υπό συνθήκης μέσης τιμής και το γεγονός ότι η $X_t$ είναι martingale . Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση.

Έχουμε όμως ότι

$$E[\sum_{i=0}^{k-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2] \leq E[\sup_i \mid X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid V_t] \leq KE[\sup_i \mid X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid]$$

όπου $K$ είναι ένα φράγμα για την μεταβολή της διαδικασίας. Καθώς $\Delta \to 0$ λόγω της συνέχειας της $X_t$, το δεξίο μέλος της ισότητας αυτής τείνει στο 0 έτσι ώστε

$$E[X_t] \to 0 \implies X_t = 0, \ \forall t, \ \sigma.\beta.$$

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μία martingale. Μπορούμε τότε να ορίσουμε την από κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής.

**Ορισμός 2.6.4** *Έστω $M$ και $N$ δύο τετραγωνικά ολοκληρώσιμες martingale. Η* **από κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής** *(joint quadratic variation) των $M$ και $N$ ορίζεται η διαδικασία*

$$< M, N >_t := \frac{1}{2}(< M + N, M + N >_t - < M, M >_t - < N, N >_t)$$

Η απο κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής δύο martingale έχει και έναν εναλλακτικό ορισμό ο οποίος μπορεί να είναι χρήσιμος.

**Ορισμός 2.6.5 Εναλλακτικός ορισμός της από κοινού διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής** *Έστω $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t\}$ μία διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$ και $M_t$, $N_t$ δύο τετραγωνικά ολοκληρώσιμες martingale. Η από κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής των $M_t$ και $N_t$ μπορεί να οριστεί και σαν το όριο κατά πιθανότητα*

$$< M, N >_t := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

*όπου $|\ \Delta\ | = sup\ |\ t_{i+1} - t_i\ |$.*

**Παράδειγμα 2.6.2** *Η $< M, N >_t$ είναι η μοναδική διαδικασία τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $M_t N_t - < M, N >_t$ να είναι μία martingale η οποία μηδενίζεται στο $t = 0$.*

*Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε*

$$M_t N_t = \frac{1}{2}(M_t + N_t)^2 - \frac{1}{2}M_t^2 - \frac{1}{2}N_t^2$$

*Αφαιρούμε και απο τα δύο μέλη της σχέσης αυτής την ποσότητα $< M, N >_t$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.6.2 παίρνουμε*

$$\begin{aligned} M_t N_t - < M, N >_t &= \frac{1}{2}\left((M_t + N_t)^2 - < M + N, M + N >_t\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(M_t^2 - < M, M >_t\right) + \frac{1}{2}\left(N_t^2 - < N, N >_t\right) \end{aligned}$$

*Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μια martingale το ζητούμενο έπεται.*
*Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιονδήποτε πεπερασμένο χρόνο στάσης $\tau$ ισχύει*

$$E[M_\tau N_\tau] = < M, N >_\tau$$

## 2.7 *Martingales* στην οικονομική

Οι διαδικασίες martingale βρίσκουν πολλές χρήσιμες εφαρμογές στην οικονομική θεωρία. Μία από τις πλέον ενδιαφέρουσες εφαρμογές, είναι στην χρηματοοικονομική σαν μοντέλα για τις τιμές των χρεογράφων σε μία αγορά ή στην αποτίμηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων. Άλλες ενδιαφέρουσες εφαρμογές είναι σε προβλήματα βέλτιστης στάσης ή γενικότερα σε προβλήματα ελέγχου.

### 2.7.1 Οι τιμές των χρεογράφων ως martingale

Στην χρηματοοικονομική, οι τιμές των χρεογράφων συχνά θεωρούνται ότι έχουν κάποια δομή martingale. Το υπόδειγμα αυτό για τις τιμές των χρεωγράφων υποστηρίχθηκε ισχυρά από τον Αμερικανό οικονομολόγο Paul Samuelson [2]. Το υπόδειγμα αυτό μπορεί να συνδεθεί με βασικές υποθέσεις για τις αποδόσεις και τις προτιμήσεις και άρα μπορεί να συνδεθεί με άλλες οικονομικές θεωρίες. Επίσης το υπόδειγμα αυτό μπορεί να συνδεθεί με την υπόθεση της **αποτελεσματικότητας της αγοράς (market efficiency )** που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην χρηματοοικονομική. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή η ήδη υπάρχουσα πληροφορία για την οικονομία αντανακλάται στις τιμές.

Θα παρουσιάσουμε εδώ εν συντομία τα επιχειρήματα του Samuelson που χρησιμοποίησε για να υποστηρίξει την θέση ότι οι τιμές έχουν την ιδιότητα martingale [3]

Ας ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας την διαμάχη μεταξύ δύο διαφορετικών σχολών οικονομικής σκέψης και θα προσπαθήσουμε να δείξουμε πως το επιχείρημα του Samuelson κατάφερε να τις συμφιλιώσει. Μία σχολή είναι η σχολή της **θεμελιώδους ανάλυσης (fundamental analysis)** σύμφωνα με την οποία η ενδογενής ή 'θεμελιώδης' τιμή ενός χρεογράφου ισούται με την ροή κεφαλαίων την οποία το χρεόγραφο αυτό εξασφαλίζει στο μέλλον στον κάτοχο του, έχοντας λάβει υπόψη την κατάλληλη διόρθωση ως πρός την αξία του χρήματος (discounted cash flow). Οι πραγματικές (παρατηρούμενες) τιμές παρουσιάζουν διακυμάνσεις γύρω από τις θεμελιώδεις τιμές. Έτσι, σύμφωνα με την σχολή αυτή, ένας οξυδερκής αναλυτής μπορεί χρησιμοποιώντας την κατάλληλη πληροφορία να υπολογίσει την τιμή κάποιου χρεογράφου. Κέρδος μπορεί να επιτευχθεί αγοράζοντας ή πουλώντας μη σωστά εκτιμημένα προιόντα, και στην περίπτωση αυτή όμως η πραγματική (ορθολογική) τους αξία εντέλει θα φανεί! Αυτή η θεωρία ήταν πολύ αγαπητή στους κλασσικούς οικονομολόγους αλλά δεν φαίνονταν να ισχύει στην πράξη. Διάφοροι ερευνητές (μεταξύ άλλων και ο διάσημος στατιστικός Kendal ή ο γνωστός από την θεωρία των fractal Mandelbrot) μελέτησαν την συμπεριφορά των τιμών διαφόρων χρεογράφων και κατάληξαν στο συμπέρασμα ότι οι τιμές φαίνονται σαν να είναι πλήρως τυχαίες. Η παρατήρηση αυτή έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη μίας σειράς υποδειγμάτων τα οποία ονομάστηκαν υποδείγματα **τυχαίου περιπάτου (random walk models)**. Τα μοντέλα αυτά φαίνονταν (τουλάχιστον την εποχή αυτή) τελείως εκτός του γενικότερου πλαισίου της παραδοσιακής οικονομικής σκέψης.

Θα παρουσιάσουμε τώρα το επιχείρημα του Samuelson. Ακολουθώντας την οπτική των οπαδών της θεμελιώδους σχολής (fundamentalists) η τιμή μίας μετοχής την χρονική στιγμή $t$ θα πρέπει να αντανακλά την αναμενόμενη μελλοντική τιμή της, συν τα μερίσματα, προεξοφλούμενη την σημερινη ημέρα

$$p_t = (1+r)^{-1} E[p_{t+1} + d_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]$$

Η σχέση αυτή είναι μία καθαρά 'ορθολογική' σχέση. Όπως όμως θα δούμε μπορούμε από την σχέση αυτή να πάρουμε μιά τυχαία και απρόβλεπτη ποσότητα. Ας

[2] Ο Samuelson τιμήθηκε με το βραβείο Nobel το 1970 για την οικονομική επιστήμη

[3] Δείτε το πολύ κατατοπιστικό άρθρο [22]

ονομάσουμε $h_t$ τον αριθμό των χρεογράφων που κατέχει ένα αμοιβαίο κεφάλαιο την χρονική στιγμή $t$. Τότε η αξία του αμοιβαίου κεφαλαίου την χρονική στιγμή $t$, προεξοφλούμενη την χρονική στιγμή $t = 0$ θα ήταν

$$v_t = (1+r)^{-t} p_t h_t$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το αμοιβαίο κεφάλαιο τοποθετεί το εισόδημα του από τα μερίσματα ξανά σε νέα χρεόγραφα (επανατοποθετεί τα κέρδη του από τα μερίσματα σε μετοχές). Τότε

$$p_{t+1} h_{t+1} = (p_{t+1} + d_{t+1}) h_t$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την υπό συνθήκη μέση τιμή της προεξοφλημένης τιμής (discounted value) του αμοιβαίου κεφαλαίου ως προς την πληροφορία που είναι διαθέσιμη την χρονική στιγμή $t$

$$\begin{aligned}
E[v_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] &= E[(1+r)^{-t-1} p_{t+1} h_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= E[(1+r)^{-t+1} (p_{t+1} + d_{t+1}) h_t \mid \mathcal{F}_t] \\
&= (1+r)^{-t} h_t (1+r)^{-1} E[p_{t+1} + d_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= (1+r)^{-t} p_t h_t = v_t
\end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η αξία του αμοιβαίου κεφαλαίου, $v_t$ είναι μία martingale! Έτσι, έστω και ξεκινώντας από ένα μοντέλο που ξεκινάει από την οπτική της θεμελιώδους σχολής μπορεί να καταλήξουμε με ποσότητες που έχουν ιδιότητες martingale. Μπορεί οι τιμές των χρεογράφων αυτές καθεαυτές να μην είναι martingale αλλά η ποσότητα $v_t$ που είναι άμεσα συνδεδεμένη με αυτές, είναι martingale.

Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των martingale ο Samuelson απέδειξε ότι

$$p_t = \sum_{j=1}^{\infty} (1+r)^{-j} E[d_{t+i} \mid \mathcal{F}_t]$$

το οποίο μας λέει ότι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t$ είναι ίση με το άθροισμα της μέσης τιμής (αναμενόμενης τιμής) της σημερινής αξίας των μελλοντικών μερισμάτων. Αυτό είναι επίσης ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι συμβιβαστό με μία άποψη της θεμελιώδους σχολής.

### 2.7.2 Χρηματοοικονομική σε διακριτό χρόνο: Εφαρμογές της θεωρίας των martingale στην αποτίμηση χρεογράφων

Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία $X_i$, $i \in \mathbb{N}$. Αυτή η στοχαστική διαδικασία θεωρούμε ότι μπορεί να περιγράφει την τίμη ενός χρεογράφου τις διακριτές χρονικές στιγμές $i$. Το γεγονός ότι ο χρόνος είναι διακριτός δεν είναι τόσο κακό, δεδομένου ότι οι τιμές καταγράφονται σε συγκεκριμένες στιγμές της ημέρας π.χ.

στο άνοιγμα και το κλείσιμο της αγοράς. Έτσι οι καταγεγραμμένες τιμές των χρεογράφων μπορεί να θεωρήσουμε ότι παράγουν μία στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο.

Θεωρούμε τώρα μία συλλογή τέτοιων στοχαστικών διαδικασιών $\{X_{n,i}\}$, η καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί στην τιμή ενός δεδομένου χρεογράφου (το $n$ χαρακτηρίζει το χρεόγραφο και το $i$ τον χρόνο). Από τα χρεόγραφα αυτά ένα παίζει διαφορετικό ρόλο, καθώς θεωρείται ότι δεν εμπεριέχει κίνδυνο και θα το ονομάζουμε **ομόλογο** (bond). Τα ομόλογα, στα πλαίσια του απλού αυτού μοντέλου που θα παρουσιάσουμε, μπορεί να θεωρηθούν ότι παίζουν τον ρόλο μίας ασφαλούς τραπεζικής κατάθεσης. Το ειδικό αυτό χρεόγραφο πολλές φορές θα θεωρείται ότι παίζει τον ρόλο της μονάδας μέτρησης με την οποία μετράμε την αξία κάποιου άλλου χρεογράφου που μπορεί να εμπεριέχει κίνδυνο. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι υπάρχει κάποιο επιτόκιο $r$ ανά περίοδο, οπότε κάθε περίοδο η αξία του χρήματος αυξάνει κατά ένα παράγοντα $1+r$. Έτσι ένα ομόλογο αξίας $X_{0,0}$ την χρονική στιγμή $t=0$, θα έχει αξία $X_{0,t}=(1+r)^t X_{0,0}$ την χρονική στιγμή $t$. Η $X_{0,t}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταφέρει την αξία οποιουδήποτε χρεογράφου στην χρονική στιγμή $t$ στην αντίστοιχη του αξία την χρονική στιγμή $t=0$. Έτσι η $\bar{X}_{n,t}=\frac{X_{n,t}}{X_{0,t}}$ είναι η αξία την χρονική στιγμή $t=0$ του χρεογράφου $X_{n,t}$ με την έννοια του ότι είναι το ποσό που αν τοποθετηθεί σε μία ασφαλή επένδυση σήμερα $(t=0)$ θα αποδώσει το ποσό $X_{n,t}$ την χρονική στιγμή $t$. Η $\bar{X}_{n,t}$ ονομάζεται προεξοφλημένη τιμή.

Τώρα θεωρούμε ότι συνθέτουμε ένα **χαρτοφυλάκιο**. Ένα χαρτοφυλάκιο δεν είναι τίποτε άλλο από μία συλλογή από μετοχές και ομόλογα. Θεωρώντας ότι $a_{n,i}$ είναι η ποσότητα κομματιών από το κάθε χρεώγραφο $n$, $n=0,1,...,N$ την χρονική στιγμή $i$ η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $i$ θα είναι $V_i=\sum_{n=0}^N a_{n,i}X_{n,i}$. Υποθέτουμε πως το χαρτοφυλάκιο ενημερώνεται την χρονική στιγμή $i$, έχοντας γνώση μόνο των τιμών μέχρι την χρονική στιγμή $i-1$. Η παραπάνω υπόθεση μπορεί να εκφραστεί γράφοντας ότι οι (τυχαίες) μεταβλητές $a_{n,i}$ είναι $\mathcal{F}_{i-1}$ μετρήσιμες ή ότι $a_{n,i}\in\mathcal{F}_{i-1}$ ( όλη η πληροφορία που χρειάζεται για να απαντήσουμε ερωτήσεις σχετικές με τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $a_{n,i}$ περιέχονται στην $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}_{i-1}$ η οποία είναι η πληροφορία που μπορεί να ληφθεί παρατηρώντας τις στοχαστικές διαδικασίες $X_{n,i}$ ως την χρονική στιγμή $t=i-1$).

Θεωρούμε τώρα ότι την χρονική στιγμή $t=i$ ένας επενδυτής κρατάει $a_{n,i}$ μονάδες από το χρεόγραφο $n$. Η μεταβολή της τιμής του χρεογράφου αυτού από την χρονική στιγμή $t=i-1$ στην χρονική στιγμή $t=i$ είναι $\Delta X_i^n = X_{n,i}-X_{n,i-1}$. Το κέρδος του επενδυτού εξαιτίας της κίνησης της τιμής του συγκεκριμένου χρεογράφου είναι $G_i^n=a_{n,i}\Delta X_i^n$. Το συνολικό κέρδος από όλα τα χρεόγραφα την χρονική στιγμή $t=i$ είναι $G_i=\sum_{n=0}^N G_i^n=\sum_{n=0}^N a_{n,i}\Delta X_i^n$. Υποθέτουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου μπορεί να μεταβληθεί μόνο εξαιτίας των κερδών από την κίνηση των τιμών των χρεογράφων δηλαδή δεν προστίθεται ή αφαιρείται κανένα εξωτερικό χρηματικό ποσό στο χαρτοφυλάκιο. Κάτω από τις συνθήκες αυτές η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t$ θα είναι

$$V_t = V_0 + \sum_{i=0}^{t} G_i \tag{2.1}$$

Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο (δηλαδή μία τέτοια στρατηγική επενδύσεων $a_{n,i}$) ονομάζεται **αυτο-χρηματοδοτούμενο** (self-financing). Από τον ορισμό ενός αυτο-χρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου μπορούμε να δούμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού είναι ο μετασχηματισμός martingale των $X_{n,i}$. Ο μετασχηματισμός martingale είναι το διακριτό ανάλογο του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Από την άλλη μεριά, η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή $t$ μπορεί να δοθεί και από την σχέση $V_i = \sum_{n=0}^{N} a_{n,i} X_{n,i}$. Η παραπάνω σχέση ισχύει ανεξάρτητα από το αν το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο ή όχι. Αν το χαρτοφυλάκιο είναι αυτό-χρηματοδοτούμενο, συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την εξίσωση (2.1) βλέπουμε ότι για ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο ισχύει

$$\sum_{n=0}^{N} \Delta a_{n,i} X_{n,i-1} = 0 \quad \forall i$$

Η παραπάνω σχέση λέει ότι η αθροιστική επίδραση των μεταβολών την χρονική στιγμή $i$ των ποσών του κάθε χρεογράφου που έχει στην κατοχή του ένας επενδυτής πρέπει να εξισορροπείται. Αυτό γίνεται πιο καθαρό όταν $N = 1$ δηλαδή υπάρχει μόνο μία μετοχή και μία ομολογία. Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό από την παραπάνω σχέση ότι οι αλλαγές στο ποσό των μετοχών που έχει στην κατοχή του ο επενδυτής πρέπει να πληρώνονται από τα κέρδη που λαμβάνονται από την αλλαγή της τιμής της ομολογίας και αντίστροφα.

Οι τιμές ενός χρεογράφου είναι πιο χαρακτηριστικές αν είναι κανονικοποιημένες ως πρός κάποιο σχετικό μέγεθος, το οποίο μπορεί να επιλεγεί να είναι η τιμή των ομολογιών. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι αν ένα χαρτοφυλάκιο είναι αυτο-χρηματοδοτούμενο τότε και η κανονικοποιημένη του μορφή θα είναι και αυτή αυτο-χρηματοδοτούμενη[4] . Το αποτέλεσμα αυτό πολλές φορές στην χρηματοοικονομική αναφέρεται σαν το numeraire invariance theorem. Άρα για ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο έχουμε ότι

$$\bar{V}_t = V_0 + \bar{G}_t$$

όπου $\bar{V}_t = \sum_{n=0}^{N} a_{n,i} \bar{X}_{n,i}$, $\bar{X}_{n,i} = N_i^{-1} X_{n,i}$, και παρομοίως για την $\bar{G}$. Η διαδικασία $N$ είναι η διαδικασία την οποία χρησιμοποιούμε για την κανονικοποίηση, και για την οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε πως $N_0 = 1$. Σε πολλές περιπτώσεις $N_i = X_{0,i}$.

Θα εισάγουμε τώρα την βασική έννοια του **arbitrage** [5]. Με την έννοια arbitrage έννοουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να επιφέρει βέβαιο κέρδος χωρίς κίνδυνο. Ο μαθηματικός ορισμός του arbitrage είναι ο ακόλουθος

[4] Εξυπακούεται ότι η διαδικασία σύμφωνα με την οποία κανονικοποιούμε είναι παντα θετική.

[5] Ο ελληνικός όρος θα μπορούσε να ήταν **πρόκριση** αλλά εφόσον δεν έχει καθιερωθεί θα προτιμήσουμε τον αντίστοιχο αγγλικό όρο

**Ορισμός 2.7.1** *Ένα χαρτοφυλάκιο $a$ είναι ένα* **arbitrage** , *αν είναι αυτο-χρηματοδοτούμενο και αν ισχύει $V_0(a) = 0$ και $V_t(a) \geq 0$ για κάθε $t$ και $E[V_T(a)] > 0$.*

Στα παραπάνω γράφουμε $V(a)$ για να καθορίσουμε ότι αυτή είναι η στοχαστική διαδικασία που αντιστοιχεί στην αξία ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου $a$. Παρόλο που το arbitrage είναι το όνειρο του κάθε επενδυτή δεν είναι αποδεκτή στην χρηματοοικονομική γιατί θεωρείται ότι κινεί την αγορά μακριά από την κατάσταση ισορροπίας.

Ένας περαιτέρω περιορισμός που επιφέρουμε στην στοχαστική διαδικασία που αντιστοιχεί σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι ότι η διαδικασία αυτή θα πρέπει να είναι κάτω φραγμένη από ένα πεπερασμένο αρνητικό αριθμό. Αυτή η ιδιότητα καλείται **ιδιότητα του αποδεκτού**, (**admissibility** ) και η οικονομική της σημασία είναι ότι ένας επενδυτής έχει ένα περιορισμένο περιθώριο χρέους πρίν αναγκαστεί να εγκαταλείψει την αγορά. Όλα τα χαρτοφυλάκια τα οποία θα λάβουμε υπόψη μας θα έχουν την ιδιότητα αυτή.

Είμαστε τώρα σε θέση να δούμε την πρώτη εφαρμογή της θεωρίας των martingale στην χρηματοοικονομική. Το θεώρημα που ακολουθεί λέει ουσιαστικά ότι η απουσία arbitrage σε κάποια δεδομένη αγορά είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου κάτω από το οποίο η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών (discounted price process ) είναι μία martingale. Ένα τέτοιο μέτρο ονομάζεται το **ισοδύναμο μέτρο martingale** ( **equivalent martingale measure**)[6].

**Θεώρημα 2.7.1** *Δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage σε μία αγορά αν και μόνο αν υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale*

**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε εδώ μόνο το ικανό δηλαδή ότι αν υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale δεν θα υπάρχει arbitrage στην αγορά. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα με αυτά που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του numeraire invariance theorem μπορούμε να δούμε ότι ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα arbitrage αν και μόνο αν οποιαδήποτε κανονικοποιημένη μορφή του είναι ένα arbitrage. Θα εργαστούμε λοιπόν με την προεξοφλημένη μορφή (discounted version ) ενός χαρτοφυλακίου. Για την αξία ενός αυτο-χρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου ισχύει

$$\bar{V}_t = V_0 + \sum_{u=1}^{t} a_u \cdot \Delta \bar{X}_u$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την συντομογραφία $a_u \cdot \Delta \bar{X}_u = \sum_{n=0}^{N} a_{n,u} \Delta \bar{X}_u^n$. Θεωρούμε ότι κάτω από το μέτρο $Q$ η στοχαστική διαδικασία προεξοφλημένης τιμής (discounted price process) $\bar{X}$ είναι μία martingale ως προς κάποια διήθηση $(\mathcal{F})$. Τότε εφόσον η $\bar{V}$ είναι ο μετασχηματισμός martingale της στοχαστικής διαδικασίας $\bar{X}$ είναι και αυτή μία martingale κάτω από το μέτρο $Q$ και την διήθηση $(\mathcal{F})$. Η ιδιότητα martingale σημαίνει ότι

$$E_Q[\bar{V}_T] = E_Q[\bar{V}_0]$$

[6] Δύο μέτρα λέγονται ισοδύναμα αν έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα (null sets) δηλαδή $P \sim Q$ αν $P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0$ για κάθε σύνολο $A$ τέτοιο ώστε $P(A) = 0$.

Αν $\bar{V}_0 = 0$ και $\bar{V}_T \geq 0$ $\sigma.\beta.$ ως προς το μέτρο $Q$ τότε από την ιδιότητα martingale έχουμε ότι $E_Q[V_T] = 0$ το οποίο (μαζί με την ιδιότητα $\bar{V}_T \geq 0$ $\sigma.\beta.(Q)$) μας δίνει ότι $V_T = 0$ $\sigma.\beta.(Q)$. Αφού τα μέτρα $P$ και $Q$ είναι ισοδύναμα και η έννοια του σχεδόν βέβαια είναι μία ιδιότητα που σχετίζεται με σύνολα μέτρου μηδέν μπορούμε να δούμε πως αν κάτι ισχύει $\sigma.\beta.$ ως προς το μέτρο $P$ τότε ισχύει $\sigma.\beta.$ ως προς το μέτρο $Q$ και αντίστροφα. Το παραπάνω επιχείρημα δείχνει καθαρά ότι αν μπορεί να βρεθεί ένα ισοδύναμο μέτρο martingale (equivalent martingale measure) $Q$ τότε δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage στην αγορά.□

**Σχόλια** 1. Το μέτρο $P$ είναι το μέτρο πιθανότητας που επάγεται από την στοχαστική διαδικασία $\bar{X}_i$.
2. Το θεώρημα αυτό ισχύει και στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν τεχνικές της στοχαστικής ανάλυσης οι οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της ύπαρξης ισοδύναμων μέτρων martingale (βλέπε το θεώρημα του Girsanov). Τεχνικές για τον έλεγχο της ύπαρξης τέτοιων μέτρων σε διακριτό χρόνο έχουν προταθεί βασισμένες στο θεώρημα του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου (separating hyperplane theorem).

Η ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου martingale επιτρέπει επίσης και την δίκαια αποτίμηση ορισμένων παραγώγων συμβολαίων ή γενικότερα συγκυριακών συμβολαίων (contingent claims). Ένα συγκυριακό συμβόλαιο (contingent claim ) είναι ένα χρεόγραφο του οποίου η αξία είναι μία τυχαία μεταβλητή. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ένα χρεόγραφο που η τιμή του εξαρτάται από την τιμή κάποιου άλλου χρεογράφου που αποκαλείται βασικό (underlying asset ). Παραδείγματα συγκυριακών συμβολάιων είναι τα δικαιώματα (options ) ή τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) κλπ.

Μαθηματικά μπορεί να ορίσουμε ένα συγκυριακό συμβόλαιο σαν μία μηαρνητική τυχαία μεταβλητή $F$ η οποία είναι $\mathcal{F}$ μετρήσιμη, και αναπαριστά ένα συμβόλαιο που το ποσό $F(\omega)$ την χρονική στιγμή $T$ αν συμβεί το γεγονός $\omega$. Το συμβόλαιο αυτό μπορεί να αγοραστεί ή να πωληθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t < T$. Την χρονική στιγμή $T$ το συγκυριακό αυτό συμβόλαιο έχει αξία ίση με το ποσό που αποφέρει στον κάτοχο του δηλαδή $F$. Ένα βασικό ερώτημα που απασχολεί την χρηματοοικονομική είναι η αποτίμηση ενός συγκυριακού συμβολαίου ή αλλιώς ποσο πρέπει να πληρώσει κανείς για το συμβόλαιο αυτό την χρονική στιγμή $t$ όπου $t \leq T$;

Ένας τρόπος να ορίσουμε την τιμή ενός τέτοιου συμβολαίου είναι ο ακόλουθος: Ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο $a$ του οποίου η τιμή την χρονική στιγμή $T$ είναι ίση $\sigma.\beta.$ με την αξία της απαίτησης $F(\omega)$. Η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή $t$ είναι το ποσό που πρέπει επενδυθεί από τον πωλητή του συμβολαίου για να συνθέσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αναπαράγει την αξία του συμβολαίου (της απαιτησης) την χρονική στιγμή $T$, και κατά τον τρόπο αυτό θα επιτρέψει στον πωλητή του συμβολαίου να ανταποκριθεί στην υποχρέωση του ως προς τον κάτοχο του συμβολαίου. Αυτό είναι η αξιολόγηση του συμβολαίου από την πλευρά του πωλητή. Μία παρόμοια αξιολόγηση του συμβολαίου μπορεί να γίνει και από την πλευρά του αγοραστή.

Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε σε επόμενα κεφάλαια. Το χαρτοφυλάκιο το οποίο αναπαράγει την αξία του συμβολαίου ονομάζεται αναπαράγων χαρτοφυλάκιο ή hedging portfolio ή replicating portfolio . Η κατασκευή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου δεν είναι πάντοτε εφικτή. Το αν είναι δυνατή ή όχι εξαρτάται από τις ιδιότητες της αγοράς (πληρότητα της αγοράς, completeness).

Αν λοιπόν υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο τέτοιο ώστε $V_T(a) = H$ $\sigma.\beta.$, τότε η τιμή της απαίτησης την χρονική στιγμή $t$ δεν είναι άλλο από την αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή $t$, έστω $\pi(t) = V_t$[7]. Θα εργαστούμε με την προεξοφλημένη διαδικασία $\bar{X} = X/X^0 = \xi X$ για την οποία έχουμε

$$\bar{V}_T = \xi_T F$$

Υποθέτουμε τώρα την απουσία arbitrage στην αγορά. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.7.1 υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale $Q$ κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία $\bar{X}$ είναι μία martingale . Τότε όμως η διαδικασία αξίας $\bar{V}$ θα είναι και αυτή martingale αφού είναι ο μετασχηματισμός martingale της διαδικασίας τιμών. Από την ιδιότητα martingale της $\bar{V}$ έχουμε

$$E_Q[\bar{V}_T \mid \mathcal{F}_t] = \bar{V}_t$$

και συνεπώς η αξία (τιμή) του συμβολαίου την χρονική στιγμή $t$ θα είναι

$$\pi(t) = E_Q[\xi_T F \mid \mathcal{F}_t].$$

Η πιο κοινή επιλογή για το $\xi_t$ είναι η $(1+r)^{-t}$ δηλαδή χρησιμοποιούμε την τιμή του ομολόγου σαν numeraire. Η τιμή του συμβολαίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\pi(0) = E_Q(\xi_T F)$ όπου $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O} = \{\emptyset, \Omega\}$ (δεν έχουμε καμία γνώση σχετικά με την διαδικασία τιμών εφόσον μόλις αρχίσαμε να την παρατηρούμε).

Η μέθοδος των martingale μας δίνει έναν καλό τρόπο να αποτιμήσουμε ένα συγκυριακό συμβόλαιο $F$, αρκεί βέβαια να μπορέσουμε να βρούμε το μέτρο $Q$ το οποίο μετατρέπει την προεξοφλημένη διαδικασία τιμών $\bar{X}$ σε martingale. Στο παρακάτω παράδειγμα δίνουμε έναν τρόπο υπολογισμού του μέτρου αυτού σε ένα συγκεκριμένο διακριτό μοντέλο.

**Παράδειγμα 2.7.1 Κατασκευή του EMM στο διωνυμικό μόντελο της αγοράς.**
*Ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται πολύ συχνά για την περιγραφή μίας αγοράς είναι το διωνυμικό μοντέλο της αγοράς. Σε μία απλή μορφή του μοντέλου αυτού υπάρχει μία μετοχή και ένα ομόλογο. Η τιμή του ομολόγου ακολουθεί την διαδικασία*

$$X_{0,t} = (1+r)^t X_{0,0}$$

*Η μετοχή έχει αύξηση* $R_{t+1} = X_{1,t+1}/X_{1,t}$ *την χρονική περίοδο t ίση με* $(1+a)$ *ή* $(1+b)$ *με πιθανότητα* $p$ *και* $1-p$ *αντιστοίχως. Οι αυξήσεις είναι ανεξάρτητες,*

[7] Αυτό φυσικά ισχύει στην περίπτωση όπου έχουμε αποκλείσει την ύπαρξη ευκαιριών για arbitrage στην αγορά αυτή.

*όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Στα ακόλουθα θα παραλείπουμε τον δείκτη* 1 *από την τιμή της μετοχής.*

*Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη μεθοδολογία μπορούμε να δούμε ότι η αξία ενός συγκυριακού συμβολαίου* $F$ *την χρονική στιγμή* $t$ *είναι*

$$\pi(t) = E_Q[\xi_T F \mid \mathcal{F}_t]$$

*όπου* $\xi_T = (1+r)^{-T}$ *(χρησιμοποιούμε την αξία του ομολόγου σαν numeraire) και* $Q$ *είναι το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο η διαδικασία* $\bar{X}_t = (1+r)^{-t}X_t$ *είναι martingale. Ποιό είναι το μέτρο* $Q$*;*

*Εφόσον κάτω από το μέτρο αυτό η διαδικασία* $\bar{X}_t$ *είναι martingale τότε*

$$E_Q[\bar{X}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \bar{X}_{t-1}$$

*Αλλά* $\bar{X}_t = (1+r)^{-t}R_t X_{t-1}$ *οπότε αντικαθιστώντας στο παραπάνω*

$$\begin{aligned} E_Q[(1+r)^{-t}X_{t-1}R_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] &= (1+r)^{-t}X_{t-1}E_Q[R_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \bar{X}_{t-1} = (1+r)^{-(t-1)}X_{t-1} \end{aligned}$$

*εφόσον* $X_{t-1}$ *είναι* $\mathcal{F}_{t-1}$ *μετρήσιμη και το επιτόκιο* $r$ *θεωρείται σταθερό. Διαιρώντας με το* $(1+r)^{-t}X_{t-1}$ *παίρνουμε ότι*

$$E_Q[R_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 1 + r$$

*Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή για να βρούμε το μέτρο* $Q$*. Αφού οι* $R_t$ *είναι ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες μεταβλητές*

$$E_Q[R_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = E_Q[R_t]$$

*Ας υποθέσουμε τώρα ότι* $Q(R_i = 1+a) = Q(R_1 = 1+a) = 1-q$ *και ότι* $Q(R_i = 1+b) = Q(R_1 = 1+b) = q$*. Τότε οι δύο παραπάνω εξισώσεις μας δίνουν ότι*

$$E_Q[R_t] = (1-q)\,(1+a) + q\,(1+b) = 1 + r \Longrightarrow q = \frac{r-a}{b-a}$$

*Το νέο μέτρο λοιπόν είναι τέτοιο ώστε*

$$Q(R_1 = \omega_1, R_2 = \omega_2, ..., R_t = \omega_t) = \prod_{i=1}^{t} q_i$$

*όπου*

$$q_i = \begin{cases} q, & \text{αν} \quad \omega_i = 1+b \\ 1-q, & \text{αν} \quad \omega_i = 1+a \end{cases}$$

**Σημείωση:** *Το μέτρο αυτό ορίζεται μόνο αν* $a < r < b$*. Αν* $a = b$ *το μοντέλο αυτό δεν έχει σημασία και στην ουσία είναι ντετερμινιστικό.*

*Έχοντας λοιπόν μία επιλογή για το ισοδύναμο μέτρο martingale* $Q$ *μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του παραγώγου συμβολαίου. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein και είναι το διακριτό ανάλογο του μοντέλου Black-Scholes [7]. Μπορεί μάλιστα να δειχθεί ότι το διακριτό αυτό μοντέλο συγκλίνει σε αυτό των Black-Scholes.*

### 2.7.3 Μοντέλα αναζήτησης (search models)

Ένα ακόμα παράδειγμα όπου η θεωρία των martingale μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα οικονομικά είναι η οικονομική της αναζήτησης. Θα παρουσιάζουμε παράδειγμα τέτοιου μοντέλου εδώ, και συγκεκριμένα ένα μοντέλο αναζήτησης εργασίας, το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στην βιβλιογραφία.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα άτομο αναζητεί εργασία και ότι κάθε μέρα έχει ακριβώς μία προσφορά για εργασία. Σε κάθε προσφορά αντιστοιχεί κάποιος αριθμός ο οποίος είναι η προεξοφλημένη σημερινή αξία (discounted present value ) των ισοβίων αποδοχών του από την εργασία αυτή. Ταυτόχρονα, βέβαια η αναζήτηση εργασίας έχει κάποιο κόστος καθώς το άτομο πρέπει να συντηρείται καθώς ψάχνει για εργασία. Διαφορετικοί πιθανοί εργοδότες κάνουν διαφορετικές προσφορές στο άτομο αυτό. Τις διαφορετικές αυτές προσφορές τις μοντελοποιούμε με μία στατιστική κατανομή προσφορών $F$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μία προσφορά εργασίας την χρονική στιγμή $i$ αποφέρει στο άτομο $X_i$ ευρώ ενώ υπάρχει ένα σταθερό κόστος $c$ ευρώ για την συντήρηση του κάθε χρονική περίοδο. Αν θεωρήσουμε ότι το άτομο που ψάχνει για εργασία, κρατάει την μεγαλύτερη προσφορά που του έχει γίνει μέχρι την χρονική περίοδο $n$ τότε η απόδοση που θα έχει σταματώντας την περίοδο $n$ θα είναι ίση με

$$Y_n = max(X_1, ..., X_n) - n\, c.$$

Η $Y_n$ είναι μία τυχαία μεταβλητή. Είναι ενδιαφέρον να ρωτήσουμε την ερώτηση, ποιός θα είναι (αν βέβαια υπάρχει) ο βέλτιστος χρόνος για να σταματήσει η αναζήτηση εργασίας έτσι ώστε η απόδοση αυτή να γίνει μέγιστη. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας χρόνος στάσης $n^*$ τέτοιος ώστε

$$E[Y_{n^*}] = sup_{\tau} E[Y_{\tau}]$$

όπου το $sup$ λαμβάνεται στο σύνολο όλων των χρόνων στάσης.

Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί χρησιμοποιώντας την θεωρία των martingale. Η λεπτομερής ανάλυση προβλημάτων τέτοιου τύπου αφήνεται για την συνέχεια. Αρκούμαστε προς το παρόν να αναφέρουμε ότι η απάντηση είναι [8] ότι είναι βέλτιστο να σταματήσουμε την αναζήτηση στο $n$ που είναι τέτοιο ώστε $max(X_1, ..., X_n) \geq \gamma$ όπου $\gamma$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$E[(X - \gamma)^+] = c.$$

Με άλλα λόγια είναι βέλτιστο να συμπεριφερθούμε 'μυωπικά' και να αποδεχθούμε την πρώτη προσφορά που μας γίνεται αρκεί αυτή να είναι ίση από ένα κατώφλι $\gamma$. Αυτή η θεωρία χρησιμοποιήθηκε για να εξηγήσει την καμπύλη του Philips, η οποία είναι μία εμπειρική καμπύλη που συνδέει την υποαπασχόληση με τους μισθούς[31]. Παρόμοια προβλήματα εμφανίζονται στην αποτίμηση παραγώγων Αμερικάνικου τύπου.

[8] Βλ. πχ το κλασσικό άρθρο των Chow και Robbins [6]

## 2.8 Ορισμένες γενικεύσεις

Θα εισάγουμε εδώ ορισμένες έννοιες οι οποίες γενικεύουν τις έννοιες των martingale που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο ώστε να έχουν εφαρμογές και σε πιο γενικές περιπτώσεις.

Θα ξεκινήσουμε με την έννοια της τοπικής martingale (local martingale).

**Ορισμός 2.8.1** *Η στοχαστική διαδικασία $M_t$ είναι μία* **τοπική martingale (local martingale)** *αν υπάρχει ακολουθία χρόνων στάσης $T_n$, $T_n \to \infty$, τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $X_t^{T_n} = X_{t\wedge T_n}$ να είναι μία martingale για κάθε $n$. Αν η σταματημένη διαδικασία $X_t^{T_n} = X_{t\wedge T_n}$ να είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale για κάθε $n$, τότε η $X_t$ ονομάζεται τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τοπική martingale. Η ακολουθία $T_n$ ονομάζεται τοπική ακολουθία (localizing sequence).*

Από μία συνεχή martingale $M_t$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μία τοπική martingale χρησιμοποιώντας την ακολουθία χρόνων στάσης $T_n = inf\{t : \mid M_t \mid > n\}$. Πολλά από τα αποτελέσματα που δώσαμε το κεφάλαιο αυτό μπορεί να διατυπωθούν για τοπικές martingales. Σαν παράδειγμα φέρνουμε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό μίας διαδικασίας που είναι τοπικά πεπερασμένης μεταβολής (locally of bounded variation).

**Ορισμός 2.8.2** *Η στοχαστική διαδικασία $A_t$ είναι μια διαδικασία τοπικά πεπερασμένης μεταβολής αν υπάρχουν χρόνοι στάσης $R_n$ τέτοιοι ώστε η στοχαστική διαδικασία $A_{R_n\wedge t}$ να είναι φραγμένης μεταβολής.*

Είναι δυνατό να δειχθεί ότι το θεώρημα 2.6.3 μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση τοπικών martingale οι οποίες είναι τοπικά πεπερασμένης μεταβολής.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε και την έννοια της semimartingale.

**Ορισμός 2.8.3** *Η στοχαστική διαδικασία $X_t$ είναι μία* **semimartingale** *αν μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα μίας τοπικής martingale και μίας διαδικασίας τοπικά φραγμένης μεταβολής, δηλαδή αν $X_t = M_t + A_t$.*

Για μία semimartingale $X_t$ ισχύει $< X >_t = < M >_t$.

Η θεωρία των semimartingale βρίσκει εφαρμογές στην θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης και των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

## 2.9 Παράρτημα: Αποδείξεις θεωρημάτων

Στο παράρτημα αυτό θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος $L^1$ σύγκλισης για martingales. Για την απόδειξη του θεωρήματος είναι απαραίτητες $(i)$ η απόδειξη ενός βασικού λήμματος, της ανισότητας των περασμάτων (upcrossing inequality) του Doob και $(ii)$ η απόδειξη των ανισοτήτων για τις martingales που παραθέσαμε στην 2.5. Οι αποδείξεις που παρουσιάζονται εδώ είναι πλέον κλασσικές και η παρουσιάση τους βασίζεται στην παρουσίαση των [1] και [15].

### 2.9.1 Η ανισότητα των περασμάτων του Doob

Ένα πέρασμα της $X_t$ από το διάστημα $[a, b]$, θεωρείται μία διάβαση της $X_t$ που θα ξεκινήσει κάτω από το $x = a$ και θα βρεθεί επάνω από το $x = b$ χωρίς να ξαναβρεθεί κάτω από το $x = a$ μέχρι να περάσει επάνω από το $x = b$. Μαθηματικά, αυτό μπορεί να το εκφράσουμε ορίζοντας χρόνους $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_n < t_n \leq t$ τέτοιους ώστε $X_{s_k} \leq a$ και $X_{t_k} \geq b$ για κάθε $k$[9]. Το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) των $n$ για τα οποία υπάρχουν τέτοιοι χρόνοι $s_k$ και $t_k$ είναι και ο αριθμός των περασμάτων του διαστήματος $[a, b]$ για την $X_t$, ο οποίος συμβολίζεται ως $N_a^b(t)$.

**Λήμμα 2.9.1 Ανισότητα των περασμάτων του Doob**
*Έστω $X_t$ μία (sub)martingale όπου το $t$ παίρνει τιμές σε ένα αριθμήσιμο (countable) σύνολο και ας συμβολίσουμε με $N_a^b(t)$ τον αριθμό των περασμάτων του διαστήματος $[a, b]$ από την $X_t$ μέχρι την χρονική στιγμή $t$. Τότε*

$$E[N_a^b(t)] \leq \frac{E[(X_t - a)^+]}{b - a}, \quad a < b$$

**Απόδειξη:** Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η $X_t$ είναι μία διαδικασία σε διακριτό χρονο και ότι $t \in \mathbb{Z}^+$. Η απεικόνιση $X \to (X - a)^+$ είναι κυρτή και συνεπώς η $Y_t = (X_t - a)^+$ είναι και αυτή μία submartingale. Τα περάσματα του διαστήματος $[a, b]$ από την $X_t$ αντιστοιχούν στα περάσματα του διαστήματος $[0, b - a]$ από την $Y_t$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X_t \geq 0$ και $a = 0$.

Ας ορίσουμε τώρα τους χρόνους στάσης

$$\sigma_k = \inf\{n \geq \tau_{k-1};\, X_n = 0\}, \quad \tau_k = \inf\{n \geq \sigma_k;\, X_n \geq b\},\ k \in \mathbb{N}$$

Είναι προφανές ότι για τους παραπάνω χρόνους στάσης ισχύει $0 = \tau_0 \leq \sigma_1 < \tau_1 < \sigma_2 < \ldots$.

Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$V_n = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{\sigma_k < n \leq \tau_k\}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Λόγω της ειδικής μορφής της διαδικασίας $V_n$ που εκφράζεται σαν άθροισμα δείκτριων συναρτήσεων, η διαδικασία $V_n$ είναι προβλέψιμη. Ο μετασχηματισμός martingale $(1 - V) \bullet X$ είναι λοιπόν επίσης μία submartingale (εφόσον η $(1 - V)$ είναι μία μη αρνητική διαδικασία). Συνεπώς

$$E[((1 - V) \bullet X)_t] \geq E[((1 - V) \bullet X)_0] = 0$$

Από τον ορισμό του αριθμού των περασμάτων έχουμε ότι $(V \bullet X)_t \geq b N_0^b(t)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στην ανισότητα

$$b E[N_0^b(t)] \leq E[(V \bullet X)_t] \leq E[(1 \bullet X)_t] = E[X_t] - E[X_0] \leq E[X_t]$$

Αν θυμηθούμε την αντικατάσταση που κάναμε, στην οποία $X_t \rightsquigarrow (X - a)^+$ και $0 \rightsquigarrow a$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

[9] Ο ακριβής ορισμός των χρόνων αυτών θα δοθεί στην απόδειξη του λήμματος 2.9.1

### 2.9.2 Η απόδειξη των ανισοτήτων martingale

Για την μελέτη της σύγκλισης χρειαζόμαστε επιπλέον και την απόδειξη των ανισοτήτων martingale που αναφέρθηκαν στην 2.5. Θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη του θεωρήματος 2.5.1 το οποίο παραθέτουμε ξανά για την ευκολία του αναγνώστη.

**Θεώρημα 2.5.1** Έστω $X$ μία μη αρνητική submartingale. Τότε για $c > 0$

$$cP(\sup_{k \le n} X_k \ge c) \le E[X_n; \{\sup_{k \le n} X_k \ge c\}] \le E[X_n]$$

**Απόδειξη:** Θα εργαστούμε σε διακριτό χρόνο. Ας ορίσουμε τον χρόνο στάσης $\tau = n \wedge \inf\{k; X_k \ge c\}$ και το σύνολο $B = \{\max_{k \le n} X_k \ge c\}$[10] . Ο χρόνος στάσης $\tau$ είναι φραγμένος εφόσον $\tau \le n$, και το σύνολο $B$ μετρήσιμο ως πρός την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_\tau$ δηλαδή $B \in \mathcal{F}_\tau$. Για το σύνολο $B$ ισχύει ότι $c\,P(B) \le E[X_\tau; B]$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό και το θεώρημα επιλεκτικής στάσης για τον χρόνο στάσης $\tau$ καταλήγουμε στην σχέση

$$c\,P(B) \le E[X_\tau; B] \le E[X_n; B] \le E[X_n^+]$$

το οποίο και δείχνει την ανισότητα που θέλαμε να αποδείξουμε. Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης στην μορφή που μας χρειάζεται, βασιστήκαμε στο γεγονός ότι ο χρόνος στάσης $\tau$ είναι φραγμένος. □

**Σχόλιο:** Η ανισότητα αυτή ισχύει και για συνεχή χρόνο, και η απόδειξη της βασίζεται στην παραπάνω απόδειξη και την χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θα ασχοληθούμε τώρα με την απόδειξη του θεωρήματος 2.5.2, την εκφώνηση του οποίου παραθέτουμε ξανά για την ευκολία του αναγνώστη.

**Θεώρημα 2.5.2** Έστω $p > 1$. Αν $X_t$ είναι μία martingale ή μία θετική submartingale τότε

$$E[(\sup_{s \le t} \mid X_s \mid)^p] \le C\; E[\mid X_t \mid^p]$$

**Απόδειξη:** Θα εργαστούμε σε διακριτό χρόνο. Η απόδειξη σε συνεχή χρόνο μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας την απόδειξη σε διακριτό χρόνο και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.
Ας ορίσουμε για ευκολία στον συμβολισμό

$$X_t^* = \sup_{s \le t} \mid X_s \mid, \quad X^* = \sup_t \mid X_t \mid, \quad \parallel X \parallel_p^p = E[\mid X \mid^p]$$

[10] ή διαφορετικά $B = \{\omega : \max_{k \le n} X_k(\omega) \ge c\}$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen έχουμε ότι η $\mid X_t \mid$ είναι μία submartingale στην οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα του θεωρήματος 2.5.1 για να λάβουμε ότι

$$cP\{X_t^* > c\} \leq E[\mid X_t \mid ; \{X_t^* > c\}],\ c > 0 \tag{2.2}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα ένα αποτέλεσμα που αποδείξαμε στο παράδειγμα 1.4.7

$$\| X_t^* \|_p^p = p \int_0^\infty P(X_t^* > c) c^{p-1} dc$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση 2.2 και κάνοντας χρήση της ανισότητας του Hölder στο ολοκλήρωμα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\| X_t^* \|_p^p &\leq \int_0^\infty E[\mid X_t \mid ; X_t^* > c] c^{p-2} dc \\
&= p \int_0^\infty \int_{\{X_t^* > c\}} \mid X_t \mid c^{p-2} dc\, dP \\
&= p \int \mid X_t \mid \left\{ \int_0^{X_t^*} c^{p-2} dc \right\} dP \\
&= q \int \mid X_t \mid (X_t^*)^{p-1} dP \leq q \| X_t \|_p \| X_t^* \|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

όπου το $q$ ικανοποιεί την σχέση $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας με το $\| X_t^* \|_p^{p-1}$ καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.
□

**Σχόλιο:** Για να ισχύουν τα παραπάνω χρειάζεται να υποθέσουμε ότι $\| X_t \|_p < \infty$ από το οποίο προκύπτει ότι $\| X_t \|_p < \infty$ για $s \leq t$ και συνεπώς $\| X_t^* \|_p < \infty$.

### 2.9.3 Απόδειξη του θεωρήματος $L^1$-σύγκλισης

θα ασχοληθούμε τώρα με την απόδειξη των θεωρημάτων σύγκλισης για martingales. θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1. Παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος για την διευκόλυνση του αναγνώστη.

**Θεώρημα 2.4.1** Έστω $X_t$ μία $L^1$ (sub)martingale δηλαδή ισχύει $E[\mid X_t \mid] < \infty$. Τότε το όριο $lim_{t\to\infty} X_t$ υπάρχει $\sigma.\beta.$

**Απόδειξη:** Θα εργαστούμε αρχικά σε διακριτό χρόνο. Έστω $N_a^b = \lim_{t\to\infty} N_a^b(t)$. Για κάθε ζεύγος $a$ και $b$ ρητών, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των περασμάτων και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$E[N_a^b] \leq c(b-a)^{-1}$$

όπου $c$ είναι μία σταθερά. Από το παραπάνω βλέπουμε ότι $N_a^b < \infty$, $\sigma.\beta.$ Αν τα $a$ και $b$ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί, μπορούμε να προσεγγίσουμε το διάστημα

$[a, b]$ σαν ένωση διαστημάτων $[a, b]$ όπου $a$ και $b$ ρητοί. Παίρνοντας την ένωση αυτή βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατό η ακολουθία $X_t$ να έχει $\limsup X_t > \liminf X_t$. Συνεπώς η ακολουθία $X_t$ συγκλίνει $\sigma.\beta$ σε κάποιο όριο $X$. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το όριο αυτό είναι και φραγμένο. Από το λήμμα του Fatou έχουμε ότι

$$E[\lim_{t\to\infty} \mid X_t \mid] \leq \sup_t \mid X_t \mid < \infty$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $X_t$ είναι $L^1$ (sub)martingale. Από αυτό καταλήγουμε στο ότι $X_t$ συγκλίνει σε ένα φραγμένο όριο. □

**Σχόλιο:** Το θεώρημα ισχύει και για supermartingales . Αρκεί να θέσουμε $-X_t$ όπου $X_t$.

### 2.9.4 Απόδειξη του θεωρήματος της σύγκλισης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα 2.4.2 σχετικά με την συγκλίση ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale. Παραθέτουμε το θεώρημα για την ευκολία του αναγνώστη.

**Θεώρημα 2.4.2Σύγκλιση ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale**
$(i)$ Έστω $X_t$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale. Τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή $X$ τέτοια ώστε $\lim_{t\to\infty} X_t = X$ και η σύγκλιση είναι στον $L^1$.
$(ii)$ Αν η $X_t$ είναι martingale τότε μπορεί να γραφεί σαν $X_t = E[X \mid \mathcal{F}_t]$ όπου $X = \lim_{t\to\infty} X_t = X$ το όριο της $X_t$ στον $L^1$, και $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ (η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $X_t$).

**Απόδειξη:** Η σύγκλιση στον $L^1$ ακολουθεί από την σχεδόν βέβαιη σύγκλιση της $X_t$ και την ιδιότητα της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας. Αν $t < n$, ισχύει λόγω του ότι η $X_t$ είναι martingale ότι $X_t = E[X_n \mid \mathcal{F}_t]$. Έστω $A \in \mathcal{F}_t$. Τότε

$$E[X_t; A] = E[X_n; A] \to E[X_\infty; A]$$

αφού η $X_n$ όριο στον $L^1$, το οποίο ονομάζουμε $X_\infty$. Εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{F}_t$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$X_t = E[X_\infty \mid \mathcal{F}_t]$$

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θα δόσουμε τώρα και την απόδειξη του θεωρήματος σύγκλισης της υπό συνθήκη μέσης τιμής ως προς την διήθηση (Θεώρημα 2.4.3). Για την ευκολία των αναγνωστών παραθέτουμε ξανά και την εκφώνηση του θεωρήματος.

**Θεώρημα 2.4.3** Έστω $X$ μία $L^1$ τυχαία μεταβλητή και $\mathcal{F}_t$ μία διήθηση. Τότε

$$\lim_{t\to\infty} E[X \mid \mathcal{F}_t] = E[X \mid \mathcal{F}_\infty]$$

όπου η σύγκλιση είναι σχεδόν βέβαιη ($\sigma.\beta.$) και $L^1$-σύγκλιση. Ως $\mathcal{F}_\infty$ ορίζεται η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$ δηλαδή η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα σύνολα $A \in \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$.

**Απόδειξη:** Ας εργαστούμε για απλότητα σε διακριτό χρόνο. Η στοχαστική διαδικασία $M_k = E[X \mid \mathcal{F}_k]$ είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale συνεπώς υπάρχει τυχαία μεταβλητή $M \in L^1(P)$ τέτοια ώστε $M_k \to M$,καθώς $k \to \infty$ $\sigma.\beta.$ και στον $L^1$. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $M = E[X \mid \mathcal{F}_\infty]$. Από τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_A X\, dP = \int_A M\, dP, \quad \forall A \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \tag{2.3}$$

Παρατηρούμε ότι

$$|| \, M_k - E[M \mid \mathcal{F}_k] \, ||_{L^1(P)} = || \, E[M_k - M \mid \mathcal{F}_k] \, ||_{L^{1]}(P)_{\leq || M_k - M ||_{L^1(P)}}}$$

Το δεξιό μέλος τείνει στο 0 καθώς $k \to 0$ άρα ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} || \, M_k - E[M \mid \mathcal{F}_k] \, ||_{L^1(P)} = 0$$

Από αυτό μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση (2.3) και το ζητούμενο έπεται.
□

## 2.10 Βασικά σημεία του κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε βασικές έννοιες της θεωρίας των martingale στις οποίες βασίζεται η θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Οι βασικές έννοιες του κεφαλαίου αυτού (ορισμένες από τις οποίες συναντήσαμε από το προηγούμενο κεφάλαιο) είναι οι ακόλουθες:

- Δειγματικός χώρος, σ-άλγεβρες και μέτρα πιθανότητας και η σχέση τους με τις έννοιες της δομής πληροφορίας. Ορισμένες από τις έννοιες αυτές είναι τεχνικές και ίσως στρυφνές σε πρώτη επαφή, αλλά είναι δυνατό να έχετε κάποια διαισθητική ιδέα για το τι αντιπροσωπεύουν αυτές.

- Υπό συνθήκη μέση τιμή ως η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την τιμή κάποιας τυχαίας μεταβλητής δεδομένης της πληροφορίας που περιέχεται σε κάποια σ-άλγεβρα. Για την αντιμετώπιση των martingale είναι απαραίτητο να ανατρέξετε στις ιδιότητες της υπό συνθήκης μέσης τιμής που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τονίζουμε ξανά την ανάγκη διαισθητικής κατανόησης των ιδιοτήτων αυτών.

- Διήθηση: Μία δομή αύξουσας πληροφορίας.
- Διαδικασίες martingale και οι ιδιότητες τους. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στις ιδιότητες των martingale ως προς τους χρόνους στάσης (π.χ θεώρημα επιλεκτικής στάσης).
- Οι martingales εμφανίζονται με φυσικό τρόπο στην οικονομική. Ένα παράδειγμα είναι ποσότητες που σχετίζονται με τιμές χρεογράφων.

# Κεφάλαιο 3

# Η κίνηση *Brown*

Μία από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες είναι η κίνηση Brown. Η κίνηση Brown (που μπορεί κανείς να την συναντήσει και με το όνομα διαδικασία Wiener ) παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής απόψεως όσο και από πλευράς εφαρμογών. Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την κίνηση Brown και θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες ιδιότητες της.

## 3.1 Ορισμός της κίνησης *Brown*

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της κίνησης Brown

**Ορισμός 3.1.1** *Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία $B_t$ η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) *Αν $t_0 < t_1 < ... < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι* **ανεξάρτητες** *(ανεξάρτητες μεταβολές)*

(ii) *Αν $s, t \geq 0$, τότε*

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} exp\left(-\frac{|\, x \,|^2}{2t}\right),$$

*όπου $A$ κάποιο σύνολο Borel , δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την* **κανονική κατανομή** *(κατανομή Gauss ).*

(iii) *Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι* **συνεχείς** *με πιθανότητα 1, δηλαδή η $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

Οι τρείς αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά μαθηματικά η ύπαρξη μίας στοχαστικής διαδικασίας με τις παραπάνω ιδιότητες.

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να συνάγουμε τις ιδιότητες του μέτρου $\mu$ που αυτή επάγει (μέτρο Wiener)

$$\mu_{t_1,t_2,...t_n}(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 ... \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

όπου $x_0 = x$, $t_1 = 0$, και

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} exp\left(-\frac{\mid y-x \mid^2}{2t}\right)$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι κατά κάποιο τρόπο η πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία τις χρονικές στιγμές $t_i$ στα υποσύνολα $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Μπορούμε να σκεφτούμε τα υποσύνολα αυτά σαν διαστήματα του $\mathbb{R}$ οπότε και η παραπάνω ποσότητα είναι ουσιαστικά η πιθανότητα να βρίσκεται η κίνηση Brown τις χρονικές στιγμές $t_i$ σε συγκεκριμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$. Η ποσότητα

$$\mu_{t_1,t_2,...,t_n}(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = P(B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2, ..., B_{t_n} \in A_n)$$

ονομάζεται **πεπερασμένης διάστασης κατανομή** και η γνώση της είναι πολύ σημαντική στο να κατασκευάσουμε το μέτρο $\mu$ (Θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov).

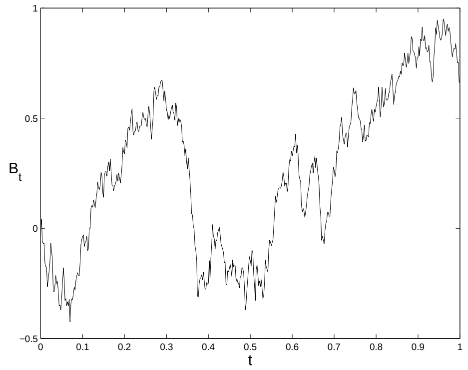
Η κατανομή του $B_t$ εξαρτάται από το αρχικό σημείο στο οποίο ξεκινάμε την διαδικασία, δηλαδή το σημείο $B_0$. Αν $B_0 = x$ τότε η συνάρτηση κατανομής θα συμβολίζεται $P_x(B_t \in A)$ για κάποιο σύνολο Borel $A$. Η μέση τιμή ή υπο συνθήκη μέση τιμή ως προς το μέτρο αυτό θα συμβολίζεται $E_x$ ή $E_x[\cdot]$ αντιστοίχως.

**Σχόλιο:** Πολλοί συγγραφείς στον ορισμό τους για την κίνηση Brown παίρνουν ότι η κίνηση Brown ξεκινάει από το 0 (βλ. π.χ. [4]). Εμείς ακολουθούμε την σύμβαση να αφήνουμε την κίνηση Brown να ξεκινάει σε οποιοδήποτε σημείο $x$ (βλ. π.χ. [29]). Το σημείο που θα ξεκινάει η κίνηση Brown θα γίνεται σαφές στο μέτρο πιθανότητας που θα χρησιμοποιείται και αν δεν αναφέρεται τίποτα θα εννοείται ότι ξεκινάμε από το 0. Η κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0 συνήθως αναφέρεται και σαν τυπική (standard) κίνηση Brown.

**Παράδειγμα 3.1.1** *Αν $B_t$ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = 0$ τότε*

$$E[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dx$$

*(Η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο Wiener που επάγει η κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0)*
*Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι $E[B_t^2] = t$.*




Σχήμα 3.1: Μία τροχιά της κίνησης Brown .

**Παράδειγμα 3.1.2** *Αν $B_t$ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = x$ τότε*

$$E_x[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dx$$

*(Η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο Wiener που επάγει η κίνηση Brown που έχει αρχίσει στο σημείο x). Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι $E_x[B_t] = x$ και ότι $E_x[(B_t - x)^2] = t$. Φυσικά ισχύει και ότι*

$$E_x[f(B_t)] = E_0[f(x+B_t)] \equiv E[f(x+B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dx$$

*όπου η δεύτερη και τρίτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0.*

**Παράδειγμα 3.1.3 Η 1-διάστατη κίνηση Brown και αλλαγή χρονικής κλίμακας.** *Αν $B_0 = 0$ τότε για κάθε $t > 0$*

$$\{B_{st}, s \geq 0\} = \{t^{1/2} B_s, s \geq 0\}$$

*όπου η ισότητα σημαίνει ότι οι δύο αυτές οικογένειες έχουν την ίδια (πεπερασμένης διάστασης) κατανομή.*

*Πράγματι,*

$$\begin{aligned}
P(B_{st} \leq a) &= \frac{1}{(2\pi st)^{1/2}} \int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2st}\right) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi st)^{1/2}} \int_{-\infty}^{at^{-1/2}} exp\left(-\frac{x_1^2}{2s} t^{1/2} dx_1\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi s)^{1/2}} \int_{-\infty}^{at^{-1/2}} exp\left(-\frac{x_1^2}{2s}\right) dx_1 \\
&= P(B_s \leq at^{-1/2}) = P(t^{1/2} B_s \leq a)
\end{aligned}$$

*οπότε το αποτέλεσμα που θέλουμε αποδείχθηκε. Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητών $x_1 = t^{-1/2}x$ στο ολοκλήρωμα.*

**Παράδειγμα 3.1.4 Ένα μοντέλο για τις τιμές χρεογράφων (securities).** *Ένα μοντέλο για τις τιμές χρεογράφων (π.χ. τιμές μετοχών) το οποίο θα συναντήσουμε πολύ συχνά στο βιβλίο αυτό, είναι ότι η τιμή $S_t$ μίας μετοχής την χρονική στιγμή $t$ δίνεται από τον τύπο*

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right)$$

*όπου $r$ και $\sigma$ είναι θετικές πραγματικές σταθερές, $S_0$ μία ντετερμινιστική αρχική συνθήκη και $B_t$ μία μονοδιάστατη κίνηση Brown. Ποιά θα είναι η μαθηματική προσδοκία (μέση τιμή) για την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t$, $E[S_t]$· Είναι η $S_t$ μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$ που παράγεται από την κίνηση Brown·*

*Στο μέλλον όποτε χρησιμοποιούμε το σύμβολο της μέσης τιμής χωρίς συγκεκριμένη αναφορά στο μέτρο το οποίο χρησιμοποιούμε θα υποθέτουμε ότι είναι το μέτρο κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία $B_t$ είναι μία κίνηση Brown . Έχουμε λοιπόν ότι*

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} + \sigma x\right) dx = S_0 \exp(rt) \end{aligned}$$

*Το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει ότι η στοχαστική διαδικασία $S_t$ δεν είναι μία martingale εφόσον για μία martingale θα περιμέναμε $E[S_t] = E[S_0]$ το οποίο εδώ δεν ισχύει αφού $\exp(r\,t) \neq 1$. Αυτό το αποτέλεσμα βέβαια ισχύει με βάση το μέτρο κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία $B_t$ είναι μία κίνηση Brown. Όπως θα δούμε στην συνέχεια υπάρχουν μέτρα $Q$ κάτω από τα οποία η στοχαστική διαδικασία $S_t$ μπορεί να είναι martingale.*

**Παράδειγμα 3.1.5 Οι ιδιότητες των μεταβολών της κίνησης Brown** *Σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) του ορισμού της κίνησης Brown μπορούμε να δούμε ότι*

$$P(B_t - B_s \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

*συνεπώς η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X = B_t - B_s$ είναι η συνάρτηση $p(t-s,x,0) = p(t-s,0,x)$. Από αυτό μπορούμε να δούμε ότι*

$$E[f(B_t - B_s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

*Πιο συγκεκριμένα έχουμε*

$$E[(B_t - B_s)] = 0$$
$$E[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

*Επίσης αν* $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, *η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown μέχρι την χρονική στιγμή* $s$, *τότε λόγω της ιδιότητας* $(i)$ *έχουμε ότι η μεταβολή* $B_t - B_s$ *είναι* **ανεξάρτητη** *από την σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}_s$. *Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπό συνθήκης μέσης τιμής έχουμε*

$$E[f(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = E[f(B_t - B_s)]$$

*και πιο συγκεκριμένα*

$$E[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)] = 0$$
$$E[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

*Κλείνοντας το παράδειγμα αυτό θα θέλαμε να επιστήσουμε την προσοχή του αναγνώστη ότι η μεταβολή* $B_t - B_s$ *είναι ανεξάρτητη της* $\mathcal{F}_s$ *και* **όχι** *η ίδια η* $B_t$! *Έτσι έχουμε ότι*

$$E[B_t \mid \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s + B_s \mid \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + E[B_s \mid \mathcal{F}_s] = B_s$$

*Τι αποτέλεσμα θα έπρεπε να πάρουμε αν η* $B_t$ *ήταν ανεξάρτητη της* $\mathcal{F}_s$;

**Παράδειγμα 3.1.6 Η χαρακτηριστική συνάρτηση της κίνησης Brown** *Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της καθώς και την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της.*

*Θα υπολογίσουμε πρώτα την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της κίνησης Brown:*

$$\begin{aligned}\phi_{B_t - B_s}(\lambda) &= E[exp(i\lambda(B_t - B_s))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) exp(i\lambda x) dx\end{aligned}$$

*Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού αρκεί να γράψουμε την ποσότητα η οποία είναι μέσα στο εκθετικό σαν ένα τέλειο τετράγωνο*

$$i\lambda x - \frac{x^2}{2(t-s)} = -\frac{(x - i\lambda(t-s))^2}{2(t-s)} - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}$$

*Κάνοντας την αντικατάσταση και εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε τελικά ότι*

$$\phi_{B_t - B_s}(\lambda) = exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right) \tag{3.1}$$

*Από την χαρακτηριστική αυτή συνάρτηση μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πολυωνυμικές ροπές των μεταβολών της κίνησης Brown. Αυτό μπορεί να γίνει* *παίρνοντας τις ανώτερες παραγώγους της* $\phi_{B_t-B_s}(\lambda)$ *ως προς το* $\lambda$ *και θέτωντας* $\lambda = 0$. *Για παράδειγμα μπορούμε να δούμε ότι*

$$E[(B_t - B_s)^4] = 3(t-s)^2$$

*Για την εύρεση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της κίνησης Brown αρκεί στην εξίσώση (3.1) να θέσουμε* $s = 0$ *για να λάβουμε*

$$\phi_{B_t}(\lambda) = exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

**Παράδειγμα 3.1.7** *Βρείτε την από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών* $B_t$ *και* $B_t$ *και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε την μέση τιμή* $E[B_t B_s]$.

*Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι* $s < t$. *Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της κίνησης Brown (συγκεκριμένα των ιδιοτήτων* $(i)$ *και* $(ii)$ *του ορισμού) μπορούμε να δούμε ότι*

$$f_{B_t B_s}(x,y) = p(s,0,x)p(t-s,x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right)$$

*Η μέση τιμή της ποσότητας* $B_t B_s$ *μπορεί να γραφεί σαν ολοκλήρωμα επάνω στην από κοινού κατανομή*

$$\begin{aligned} E[B_t B_s] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(s,0,x)p(t-s,x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(s,0,x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} yp(t-s,x,y)dy\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(s,0,x)dx = s \end{aligned}$$

*Οι λεπτομέρειες της ολοκλήρωσης αφήνονται στον αναγνώστη. Γενικά λοιπόν καταλήγουμε ότι*

$$E[B_s B_t] = s \wedge t = min(s,t)$$

## 3.2 Δύο σημαντικές ιδιότητες

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα της κίνησης Brown είναι ότι έχει την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Οι ιδιότητες αυτές είναι πολύ χρήσιμες στους υπολογισμούς με την κίνηση Brown. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση της ιδιοτητας Markov για παράδειγμα μπορεί να διευκολύνει σημαντικά το υπολογισμό υπό συνθήκη μέσων τιμών ορισμένων συναρτήσεων της κίνησης Brown ως προς συγκεκριμένες σ-άλγεβρες που σχετίζονται με την ιστορία της κίνησης Brown. Τέτοιοι υπολογισμοί εμφανίζονται συχνά στον υπολογισμό των τιμών ορισμένων παραγώγων συμβολαίων όπως θα δούμε και στην συνέχεια. Μία άλλη εφαρμογή είναι στην αρχή της ανάκλασης, η οποία βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στον υπολογισμό των τιμών εξωτικών παραγώγων π.χ. παράγωγα συμβόλαια με φράγματα (barrier options). Αξίζει να τονιστεί ότι η κίνηση Brown δεν είναι η μόνη στοχαστική διαδικασία που έχει την ιδιότητα Markov. Θα δούμε στα επόμενα μία γενική κλάση στοχαστικών διαδικασιών που παράγεται από την κίνηση Brown και που έχει την ιδιότητα αυτή. Επίσης πολλές ενδιαφέρουσες στοχαστικές διαδικασίες π.χ. διαδικασίες ανανέωσης κλπ έχουν την ιδιότητα αυτή (βλ. π.χ. [8], [38]).

### 3.2.1 Η ιδιότητα Markov

Διαισθητικά το ότι η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov σημαίνει ότι αν πάρουμε κάποιο $s \geq 0$ τότε η $B_{t+s} - B_s$ είναι μία κίνηση Brown η οποία είναι ανεξάρτητη από το τι συνέβη πριν την χρονική στιγμή $s$. Έτσι, η κίνηση Brown **ξεχνάει** το παρελθόν της πλήρως και ότι συμβαίνει από το την χρονική στιγμή $s$ και πέρα εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή της κίνησης Brown δηλαδή από το $B_s$. Επίσης, η $B_{t+s} - B_s$ είναι και αυτή μία κίνηση Brown η οποία έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $(t+s) - s = t$, δηλαδή αν παρακολουθήσουμε την διαδικασία $B_{t+s} - B_s$ είναι σαν να παρακολουθούμε μία διαδικασία Brown η οποία ξεκινάει στο 0 και 'τρέχει' για χρόνο $t$. Η ιδιότητα αυτή προέρχεται από τον ορισμό της κίνησης Brown (δείτε επίσης και το παράδειγμα 3.1.5).

Θα προσπαθήσουμε τώρα να μετατρέψουμε παραπάνω διαισθητική πρόταση σε μία πιο ακριβή πρόταση. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ η $\sigma-$ άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown ως την χρονική στιγμή $s$. Αυτή η $\sigma-$ άλγεβρα είναι η μικρότερη $\sigma-$ άλγεβρα η οποία κάνει την τυχαία μεταβλητή $B_r$, $r \leq s$ μετρήσιμη. Κατά κάποιο τρόπο η $\mathcal{F}_s$ περιέχει ότι όλη την πληροφορία σχετικά με το τι συνέβει στην κίνηση Brown μέχρι την χρονική στιγμή $s$.

Αν $f$ είναι φραγμένη συνάρτηση τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι

$$E_x[f(B_{t+s} - B_s) \mid \mathcal{F}_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών της κίνησης Brown. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$E_x[f(B_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s) \mid \mathcal{F}_s]$$

και αφού το $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητο της άλγεβρας $\mathcal{F}_s$ και το $B_s$ πλήρως γνωστό μέχρι την χρονική στιγμή $s$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε δεδομένη την τιμή του $B_s = z$ και γράφουμε

$$E_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s) \mid \mathcal{F}_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s + z)]$$

Το $B_{t+s} - B_s$ όμως είναι και αυτό μία κίνηση Brown η οποία αρχίζει στο 0 και 'τρέχει' για χρόνο $t + s - s = t$. Άρα, η διαδικασία $B_{t+s} - B_s + z$ είναι ισοδύναμη σε νόμο (έχει την ίδια κατανομή) με μία κίνηση Brown η οποία ξεκινάει στο σημείο $z$ και 'τρέχει' για χρόνο $t$. Συνεπώς

$$E_x[f(B_{t+s} - B_s + z)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+z) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-z)^2}{2t}\right) dy = E_z[f(B_t)] = E_{B_s}[f(B_t)]$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$E_x[f(B_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{(y-B_s)^2}{2t}\right) dy \qquad (3.2)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι μία έκφραση της ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown.

Οι σχέσεις που εκφράζουν την ιδιότητα Markov ως προς τις μέσες τιμές μπορεί να γραφούν ισοδύναμα και ως σχέσεις για τις πιθανότητες, αν αντί σαν $f$ επιλέξουμε την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου. Για παράδειγμα η ιδιότητα Markov δίνει

$$P_x[B_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_s] = P_{B_s}(B_t \in A)$$

για κάθε σύνολο Borel $A$.

**Σχόλιο** Θα πρέπει να είναι φανερό ότι μία ισοδύναμη μορφή της ιδιότητας Markov είναι η

$$E_x[f(B_t) \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_{t-s})], \ s \leq t$$

Το παραπάνω μας λέει με απλά λόγια ότι αν πάρουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή κάποιας συνάρτησης της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή $t$ έχοντας υπόψην την 'ιστορία' της κίνησης Brown μέχρι την χρονική στιγμή $s$ αρκεί να υπολογίσουμε την ίδια ποσότητα επάνω σε μία κίνηση καινούργια Brown που ξεκινάει στην θέση που είχε φτάσει η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή $s$, δηλαδή την $B_s$ και 'τρέχει' για χρονική διάρκεια $t-s$! Όλη η ιστορία της αρχικής κίνησης Brown πρίν από την χρονική στιγμή $s$ μας είναι άχρηστη!

### 3.2.2 Η χρήση του τελεστή μετατόπισης

Η ιδιότητα Markov πολλές φορές εμφανίζεται σε μία κάπως πιο αφηρημένη μορφή, που όμως είναι αρκετά χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές. Η μορφή αυτή κάνει χρήση του τελεστή μετατόπισης $\theta_s$ (shift operator) ο οποίος μας μετατοπίζει επάνω σε μία συγκεκριμένη τροχιά της στοχαστικής διαδικασίας (στην συγκεκριμένη περίπτωση της κίνησης Brown) κατά μία χρονική μετατόπιση $s$. Ένας τρόπος να το γράψουμε αυτό συμβολικά είναι θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $B_t$ σαν την τυχαία συνάρτηση $B(\omega(t))$, όπου $\omega(t)$ είναι το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος την χρονική στιγμή $t$ από το οποίο και εξαρτάται η τιμή της τυχαίας μεταβλητής $B_t$. Μπορούμε με τον τρόπο αυτό να ορίσουμε την δράση του τελεστή $\theta_s$ επάνω στο $\omega$ με τον ακόλουθο τρόπο

$$(\theta_s\omega)(t) = \omega(t+s)$$

Συνεπώς

$$B_t \circ \theta_s = B((\theta_s\omega)(t)) = B_{t+s}$$

Η δράση του τελεστή μετατόπισης $\theta_s$ επάνω σε μία τροχία της κίνησης Brown φαίνεται στο σχήμα 3.2.

Η δράση του τελεστή μετατόπισης μπορεί να γενικευθεί με βάση τα παραπάνω, σε οποιαδήποτε απεικόνιση που η τιμή της εξαρτάται από την κίνηση Brown. Αν $Y = Y(\omega(t), t)$ όπου η εξάρτηση από το $\omega(t)$ υποδηλώνει την εξάρτηση της $Y$ από την θέση της κίνησης Brown την χρονική στιγμή $t$, τότε

$$Y \circ \theta_s = Y((\theta_s\omega)(t), t) = Y(\omega(t+s), t)$$

Πρέπει να το τονιστεί ότι ο τελεστής μετατόπισης δρά **μόνο** επάνω στο $\omega(t)$ δηλαδή επάνω στο τυχαίο μέρος της $Y$ και **όχι** γενικά επάνω στο $t$!

Ας σημειωθεί ότι αν $Y = f(B_t)$ τότε $Y \circ \theta_s = f(B_{s+t})$.

Έχοντας ως βάση την ιδιότητα Markov στην μορφή της εξίσωσης (3.2) και τον ορισμό του τελεστή μετατόπισης μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποτελεί μία εναλλακτική μορφή της ιδιότητας Markov.

**Θεώρημα 3.2.1 (Ιδιότητα Markov)** *Έστω $Y$ μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και $\theta_s$ ο τελεστής μετατόπισης (shift operator) ο οποίος έχει την ακόλουθη δράση $(\theta_s\omega)(t) = \omega(t+s)$. Τότε*

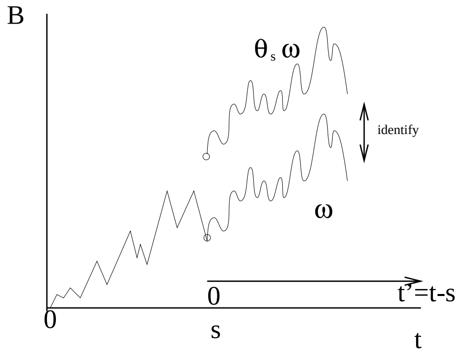
$$E_x[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y]$$

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

Ο λόγος που δίνουμε εδώ την ιδιότητα Markov στην μορφή αυτή είναι γιατί η $Y$ μπορεί να είναι μία μεταβλητή που εξαρτάται από την $B_t$ αλλά όχι απαραίτητα της μορφής $f(B_t)$. Αυτό φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα:

**Παράδειγμα 3.2.1** *Ορίζουμε την συνάρτηση $u(x,t) = E_x[\int_0^t g(B_r)dr]$, όπου $g$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα Markov για να συμπεράνετε ότι αν $0 < s < t$ τότε*

$$E_x[\int_0^t g(B_r)dr \mid \mathcal{F}_s] = \int_0^s g(B_r)dr + u(t-s, B_s)$$




Σχήμα 3.2: Η επίδραση του τελεστή μετατόπισης $\theta_s$ σε μία τροχιά της κίνησης Brown .

*Ξαναγράφουμε το αριστερό μέλος της εξισώσεως αυτής στην μορφή*

$$\begin{aligned} E_x[\int_0^s g(B_r)dr \mid \mathcal{F}_s] + E_x[\int_s^t g(B_r)dr \mid \mathcal{F}_s] \\ = \int_0^s g(B_r)dr + E_x[\int_s^t g(B_r)dr \mid \mathcal{F}_s] \end{aligned} \tag{3.3}$$

*όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_0^s g(B_r)dr$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη καθώς και τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής. Ορίζοντας $Y = \int_0^{t-s} g(B_r)dr$ μπορούμε να δούμε ότι*

$$E_x[\int_s^t g(B_r)dr \mid \mathcal{F}_s] = E_x[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s]$$

*και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov στην τελευταία έκφραση καταλήγουμε ότι*

$$E_x[\int_s^t g(B_r)dr \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y] = E_{B_s}[\int_0^{t-s} g(B_r)dr] = u(t-s, B_s)$$

*Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην εξίσωση (3.3) παίρνουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε.*

**Παράδειγμα 3.2.2 Υπο συνθήκη μέση τιμή των τιμών μιάς μετοχής.** *Θεωρούμε όπως και στο παράδειγμα 3.1.4 ότι η τιμή $S_t$ μιάς μετοχής την χρονική στιγμή $t$ δίνεται από τη σχέση*

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right)$$

*όπου $r$ και $\sigma$ είναι θετικές πραγματικές σταθερές και $B_t$ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown. Να ευρεθεί η υπο συνθήκη μέση τιμή $E[S_{t+\tau} \mid \mathcal{F}_t]$.*

*Μπορούμε να γράψουμε*

$$S_{t+\tau} = S_t \exp\left( (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma(B_{t+\tau} - B_t) \right)$$

*Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπο-συνθήκη μέσης τιμής λαμβάνουμε:*

$$E[S_{t+\tau} \mid \mathcal{F}_t] = S_t \exp\left( (r - \frac{\sigma^2}{2}) \right) E[\exp(\sigma(B_{t+\tau} - B_t)) \mid \mathcal{F}_t] \qquad (3.4)$$

*Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown ξέρουμε ότι η μεταβολή* $B_{t+\tau} - B_t$ *είναι ανεξάρτητη από την* $\mathcal{F}_t$, *συνεπώς*

$$\begin{aligned} E[\exp(\sigma(B_{t+\tau} - B_t)) \mid \mathcal{F}_t] &= E[\exp(\sigma(B_{t+\tau} - B_t)] \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau}\right) dx &= \exp\left(\frac{\sigma^2 \tau}{2}\right) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

*Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.5) στην (3.4) λαμβάνουμε*

$$E[S_{t+\tau} \mid \mathcal{F}_t] = S(t) \exp(r\,\tau)$$

**Παράδειγμα 3.2.3 Μία δεύτερη ματιά στο παράδειγμα 3.2.2.** *Επανερχόμαστε τώρα στο παράδειγμα 3.2.2 κάνοντας χρήση της ιδιότητας Markov και του τελεστή μετατόπισης. Με τον τρόπο αυτό θα γίνει πιο σαφής η χρήση της ιδιότητας Markov και του συμβολισμού της με την χρήση του τελεστή μετατόπισης. Με τον συμβολισμό αυτό η ιδιότητα που αποδείξαμε στο παράδειγμα 3.2.2 παίρνει την μορφή*

$$E[S_{t+s} \mid \mathcal{F}_s] = S_s \exp(r\,t)$$

*Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι*

$$S_{t+s} = \exp(a\,(t+s)) \exp(\sigma\, B_{t+s})$$

*όπου* $a = r - \frac{\sigma^2}{2}$. *Εφόσον η* $a$ *είναι μία αιτιοκρατική (ντετερμινιστική) συνάρτηση και άρα τελείως ανεξάρτητη από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μέχρι την χρονική στιγμή* $s$ *(δηλαδή ανεξάρτητη από την διήθηση* $\mathcal{F}_s$*) έχουμε ότι*

$$E[S_{s+t} \mid \mathcal{F}_s] = \exp(a\,(t+s))\, E[\exp(\sigma B_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s]$$

*Ορίζουμε* $Y = exp(\sigma B_t)$. *Βλέπουμε ότι*

$$E[\exp(\sigma B_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = E[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y]$$

*Αλλά η τελευταία μέση τιμή, είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής* $Y$ *επάνω στο μέτρο που ορίζει μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο* $y = B_s$ *(το* *οποίο θεωρούμε ότι είναι δεδομένο - σταθερό) και συνεπώς*

$$E_{B_s}[Y] = E_{B_s}[\exp(\sigma B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma\, x) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) dx$$

$$= \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{2}\right) \exp(\sigma y) = \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{2}\right) \exp(\sigma B_s)$$

*(δηλαδή θεωρούμε τώρα το $B_t$ σαν μία κίνηση Brown η οποία ξεκίνησε στο σημείο $y = B_s$). Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι*

$$E[S_{s+t} \mid \mathcal{F}_s] = \exp(a\, s) \exp(r\, t) \exp(\sigma\, B_s) = \exp(r\, t) S_s$$

**Παράδειγμα 3.2.4** *Ας επιλέξουμε ως $f(B_t) = \mathbf{1}_{\{B_t \in I\}}$, $t \in [t_1, t_2]$ όπου $I$ είναι κάποιο διάστημα του $\mathbb{R}$ (με σταθερά άκρα). Τότε από την ιδιότητα Markov έχουμε ότι*

$$P_x(B_t \in I, t \in [t_1, t_2] \mid \mathcal{F}_s) = P_{B_s}(B_t \in I, t \in [t_1 - s, t_2 - s])$$

### 3.2.3 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Η ισχυρή ιδιότητα Markov είναι ουσιαστικά το ότι η ιδιότητα Markov ισχύει όχι μόνο για αιτιοκρατικούς χρόνους αλλά και για μία συγκεκριμένη κατηγορία τυχαίων χρόνων τους **χρόνους στάσης**. Στους χρόνους στάσης αναφερθήκαμε εκτενώς στο κεφάλαιο 2.

Η βάση της ισχυρής ιδιότητας Markov, για την κίνηση Brown είναι το παρακάτω θεώρημα το οποίο μας εξασφαλίζει ότι η ανεξαρτησία των μεταβολών της κίνησης Brown ισχύει όχι μόνο για αιτιοκρατικούς χρόνους αλλά και για χρόνους στάσης.

Πρίν αναπτύξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov πρέπει πρώτα να υπενθυμίσουμε τον ακριβή ορισμό της σ-άλγεβρας που περιέχει τα γεγονότα που σχετίζονται με την στοχαστική διαδικασία μέχρι τον χρόνο στάσης $T$

**Ορισμός 3.2.1** *Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$ όπου $T$ είναι ένας χρόνος στάσης ορίζεται σαν*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t > 0\}$$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 3.2.2** *Έστω $B_t$ μία κίνηση Brown και $T$ ένας πεπερασμένος χρόνος στάσης για την $B_t$. Τότε ισχύει ότι $\{B_{t+T} - B_T\}$ είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη της άλγεβρας $\mathcal{F}_T$.*

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να δείξουμε ότι αποτελέσματα ανάλογα με την ιδιότητα Markov για αιτιοκρατικούς χρόνους ισχύουν και για κατάλληλα επιλεγμένους τυχαίους χρόνους. Συγκεκριμένα έχουμε ότι

**Θεώρημα 3.2.3** *Έστω $\theta_s$ ο τελεστής μετατόπισης, $Y$ μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και $T$ ένας χρόνος στάσης. Τότε*

$$E_x[f(Y \circ \theta_T) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[Y]$$

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

Όπως και προηγουμένως μία ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι η

$$E_x[f(B_{t+T}) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[B_t],$$

όπου $f$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση. Η παραπάνω ιδιότητα μας λέει ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή της συνάρτησης $f$ υπολογισμένης στην θέση που έφτασε η κίνηση Brown την χρονική στιγμή $t+T$ δεδομένης της πληροφορίας για την κίνηση Brown ως τον χρόνο στάσης (τυχαίο χρόνο) T, είναι η μέση τιμή της ίδιας ποσότητας επάνω σε μία κίνηση Brown η οποία ξεκινάει στο σημείο $B_T$ που έφτασε η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή $T$, και που τρέχει για χρόνο $t$. Αν σαν $f$ επιλέξουμε την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου τότε η ιδιότητα Markov μπορεί να γραφεί σαν μία σχέση πιθανοτήτων

$$P_x[B_{t+T} \in A \mid \mathcal{F}_T] = P_{B_T}(B_t)$$

Η ισχυρή ιδιότητα Markov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη αρκετών χρήσιμων ιδιοτήτων της κίνησης Brown. Αυτή που συναντάμε πιο συχνά σε διάφορες εφαρμογές είναι η αρχή της ανάκλασης.

**Παράδειγμα 3.2.5 Η αρχή της ανάκλασης.** *Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της ισχυρής ιδιότητας Markov εμφανίζεται στην απόδειξη της αρχής της ανάκλασης για την κίνηση Brown. Έστω ότι παίρνουμε την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο 0. Ορίζουμε ως $T_a = inf\{t : B_t = a\}$. Τότε η στοχαστική διαδικασία*

$$\bar{B}_t = \begin{cases} B_t, & t < T_a \\ 2a - B_t, & t \geq T_a \end{cases}$$

*είναι και αυτή μία κίνηση Brown. Η $\bar{B}_t$ είναι απλά η αρχική κίνηση Brown μόνο που έχει ανακλασθεί ως προς την ευθεία $x = a$ μετά την πρώτη φορά που 'χτύπησε' την ευθεία αυτή.*

*Για να δείξουμε ότι η $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown θα ορίσουμε τις βοηθητικές στοχαστικές διαδικασίες $Y_t = B_t$, $0 \leq t \leq T_a$ και την $Z_t = B_{t+T_a} - a = B_{t+T_a} - B_{T_a}$. Εφόσον ο τυχαίος χρόνος $T_a$ είναι ένας χρόνος στάσης, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.2 η διαδικασία $Z_t$ θα είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη από την άλγεβρα $\mathcal{F}_{T_a}$ και συνεπώς ανεξάρτητη από την στοχαστική διαδικασία $Y$. Άρα, από τις ιδιότητες της κίνησης Brown και η $-Z$ θα είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη της $Y$. Συνεπώς οι διαδικασίες $(Y, Z)$ και $(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή.*

*Ας πάρουμε τώρα την απεικόνιση*

$$\phi : (Y, Z) \to (Y\mathbf{1}_{\{t\le T_a\}} + (a + Z_{t-T_a})\mathbf{1}_{\{t>T_a\}})$$

*Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής στο $t = T_a$. Λόγω της συνέχειας της απεικόνισης $\phi$ και του ότι οι διαδικασίες $(Y, Z)$ και $(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και οι διαδικασίες $\phi(Y, Z)$ και $\phi(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή. Όμως*

$$\phi(Y, Z) = B_t\mathbf{1}_{\{t\le T_a\}} + (a + B_{t+T_a-T_a} - a)\mathbf{1}_{\{t>T_a\}} = B_t\mathbf{1}_{\{t\le T_a\}} + B_t\mathbf{1}_{\{t>T_a\}} = B_t$$

*και*

$$\begin{aligned}\phi(Y, -Z) &= B_t\mathbf{1}_{\{t\le T_a\}} + (a - (B_{t+T_a-T_a} - a))\mathbf{1}_{\{t>T_a\}} \\ &= B_t\mathbf{1}_{\{t\le T_a\}} + (2a - B_t)\mathbf{1}_{\{t>T_a\}} = \bar{B}_t\end{aligned}$$

*Συνεπώς οι $B_t$ και $\bar{B}_t$ έχουν την ίδια κατανομή και η $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown.*

Η αρχή της ανάκλασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της διαδικασίας μεγίστου την κίνησης Brown.

**Παράδειγμα 3.2.6** *Έστω $S_t = sup\{B_u : u \le t\}$. Τότε*

$$P(S_t \ge a, B_t \le a - y) = P(B_t \ge a + y),\ a, y \ge 0\ t \ge 0$$

*Θα χρησιμοποιήσουμε την στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ (που ορίσαμε στο παράδειγμα 3.2.5). Ορίζουμε τον χρόνο εξόδου της στοχαστικής αυτής διαδικασίας $\bar{T}_a = inf\{t > 0, \bar{B}_t = a\}$. Εφόσον η $\bar{B}_t$ είναι και αυτή μία κίνηση Brown (ακολουθεί τον ίδιο νόμο με την $B_t$) αναμένουμε και οι χρόνοι εξόδου $T_a$ και $\bar{T}_a$ να ακολουθούν την ίδια κατανομή. Συνεπώς εφόσον οι στοχαστικές μεταβλητές $(T_a, B_t)$ και $(\bar{T}_a, \bar{B}_t)$ ακολουθούν τον ίδιο νόμο (έχουν την ίδια κατανομή) θα ισχύει*

$$P(\bar{T}_a \le t, \bar{B}_t < a - y) = P(T_a \le t, B_t < a - y) \tag{3.6}$$

*Εφόσον όμως η $\bar{B}_t$ και η $B_t$ είναι ακριβώς οι ίδιες μέχρι τον χρόνο $T_a$ έχουμε ότι $T_a = \bar{T}_a$. Επομένως τα ακόλουθα γεγονότα είναι τα ίδια*

$$\{\bar{T}_a, \bar{B}_t < a - y\} = \{T_a \le t, 2a - B_t < a - y\} = \{T_a \le t, B_t > a + y\} \tag{3.7}$$

*(αφού για $t \ge T_a$, $\bar{B}_t = 2a - B_t$). Από τις (3.6) και (3.7) παίρνουμε*

$$P(T_a \le t, B_t < a - y) = P(T_a \le t, B_t > a + y) \tag{3.8}$$

*Θα μελετήσουμε τώρα χωριστά τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.8):*

- *Δεξιό μέλος: Ισχύει ότι* $\{T_a \leq t\} = \{S_t \geq a\}$ *συνεπώς* $\{T_a \leq t\} \cap \{B_t > a+y\} = \{S_t \geq a\} \cap \{B_t > a+y\}$. *Περαιτέρω έχουμε την σχέση* $\{B_t > a+y\} \subset \{S_t \geq a\}$ *η οποία μας δίνει ότι* $\{S_t \geq a\} \cap \{B_t > a+y\} = \{B_t > a+y\}$. *Συνεπώς*

$$P(T_a \leq t, B_t > a+y) = P(S_t \geq a, B_t > a+y) = P(B_t > a+y)$$

- *Αριστερό μέλος: Εφόσον* $\{T_a \leq t\} = \{S_t \geq a\}$ *θα ισχύει*

$$P(T_a \leq t, B_t < a-y) = P(S_t \geq a, B_t < a-y)$$

*Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι*

$$P(S_t \geq a, B_t < a-y) = P(B_t > a+y) = \int_{a+y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

*που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.*

*Μία ισοδύναμη μορφή του αποτελέσματος αυτού είναι και η ακόλουθη*

$$P(S_t \geq x, B_t \leq y) = P(B_t \geq 2x - y)$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίσουμε και την κατανομή των χρόνων πρώτης εξόδου από το χωρίο $x \leq a$.

**Παράδειγμα 3.2.7** *Να υπολογισθεί η κατανομή των τυχαίων χρόνων* $T_a$.

*Έχουμε αρχικά ότι*

$$P(T_a \leq t) = P(S_a \geq a) = P(S_t \geq a, B_t \leq a) + P(S_t \geq a, B_t > a)$$

*Για να καταλήξουμε στο παραπάνω χρησιμοποιήσαμε*
*(i) ότι τα γεγονότα* $\{T_a \leq t\}$ *και* $\{S_t \geq a\}$ *είναι ταυτόσημα*
*και*
*(ii) ότι το γεγονός* $\{S_t \geq a\}$ *μπορεί να συμβεί με δύο τρόπους: είτε η κίνηση Brown βγήκε από το χωρίο* $x \leq a$ *πρίν την χρονική στιγμή* $t$ *και την χρονική στιγμή* $t$ *έχει επιστρέψει ξανά στο χωρίο αυτό, είτε βγήκε από το χωρίο πριν την χρονική στιγμή* $t$ *και την χρονική στιγμή* $t$ *συνεχίζει να βρίσκεται έξω από το χωρίο αυτό. Τα δύο αυτά γεγονότα αποκλείουν το ένα το άλλο.*

*Όμως εφόσον* $\{B_t > a\} \subset \{S_t \geq a\}$ *ισχύει*

$$P(S_t \geq a, B_t > a) = P(B_t > a)$$

*Επίσης χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.2.6 επιλέγοντας* $y = 0$:

$$P(S_t \geq a, B_t \leq a) = P(B_t \geq a)$$

*Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι*

$$\begin{aligned} P(T_a \leq t) &= P(S_t \geq a) = 2\,P(B_t \geq a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \end{aligned} \tag{3.9}$$

*Με μία απλή παραγώγιση ως προς $t$ μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή των χρόνων εξόδου της κίνησης Brown από το χωρίο $x \leq a$. Το αποτέλεσμα είναι*

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)$$

Αποτελέσματα σαν και αυτά που δίνονται στα παραδείγματα 3.2.6 και 3.2.7, και που σχετίζονται με την αρχή της ανάκλασης, είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην χρηματοοικονομική, και συγκεκριμένα στην αποτίμηση ορισμένων παραγώγων συμβολαίων, τα οποία απαντώνται με το γενικότερο όνομα εξωτικά παράγωγα (exotics). Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό αργότερα.

Θα παρουσιάσουμε τώρα την αρχή της ανάκλασης χρησιμοποιώντας τον τελεστή μετατόπισης $\theta$ για να εξοικειωθούμε με την χρήση και τις ιδιότητες του:

**Παράδειγμα 3.2.8** *Αποδείξτε την αρχή της ανάκλασης χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα Markov σε μία κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση της κίνησης Brown. Συγκεκριμένα, αρχικά δείξτε ότι*

$$P(T_a \leq t) = 2P(T_a \leq t, B_t \leq a)$$

*όπου $T_a = inf\{t : B_t = a\}$, από το οποίο έπεται ότι*

$$P(T_a \leq t) = P(S_t \geq a) = 2P(B_t \geq a).$$

*Όπως και προηγουμένως $S_t$ είναι το μέγιστο της κίνησης Brown μέχρι την χρονική στιγμή $t$.*

*Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή*

$$Y_s(\omega(t)) = Y_s(B(\omega(t)) = \begin{cases} 1, & s < t,\ B_{t-s} < a \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

*όπου με το $\omega(t)$ υποδηλώνουμε την εξάρτηση από το $B_t$. Ας χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή μετατόπισης $\theta$. Αν θυμηθούμε το πως ο τελεστής μετατόπισης δρά επάνω στην τροχιά της κίνησης Brown βλέπουμε ότι*

$$Y_s \circ \theta_{T_a} = Y_s(B(\omega(t + T_a))) = \begin{cases} 1, & s < t,\ B_{t+T_a-s} < a \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

*(θυμηθείτε ότι ο τελεστής μετατόπισης επιδρά* **μόνο** *επάνω στην κίνηση Brown). Συνεπώς*

$$Y_{T_a} \circ \theta_{T_a} = \begin{cases} 1, & T_a < t, \ B_t < a \\ 0, & \text{Σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

*Χρησιμοποιούμε τώρα την ισχυρή ιδιότητα Markov για την συνάρτηση αυτή*

$$E_0[Y_\tau \circ \theta_\tau \mid \mathcal{F}_\tau] = E_{B_\tau}[Y_\tau]$$

*όπου* $\tau$ *είναι ένας χρόνος στάσης, και το δεξιό μέλος είναι η συνάρτηση* $\phi(x,s) = E_x Y_s$ *υπολογισμένη στο* $s = \tau$ *και* $x = B_\tau$. *Ας επιλέξουμε* $s = T_a$ *έτσι ώστε* $B_\tau = a$.

*Ας υπολογίσουμε τώρα την συνάρτηση* $\phi(x,s)$, *για την επιλογή αυτή του* $Y$:

$$\begin{aligned} \phi(x,s) &= E_x[Y_s] = \int \mathbf{1}_{\{s<t\}} \mathbf{1}_{\{B_{t-s}<a\}} d\mu_x \\ &= \int_{-\infty}^{a} \mathbf{1}_{\{s<t\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} exp(-\frac{(z-x)^2}{2(t-s)}) dz. \end{aligned}$$

*Στον παραπάνω υπολογισμό δεχθήκαμε ότι το ότι το μέτρο* $\mu_x$ *είναι το μέτρο Wiener που επάγει η κίνηση Brown έχοντας ξεκινήσει στο σημείο* $B_0 = x$ *(βλ. παράγραφο 3.1). Συνεπώς, το ολοκλήρωμα της χαρακτηριστικής συνάρτησης* $\mathbf{1}_{\{B_{t-s}<a\}}$ *επάνω στο* $d\mu_x$ *δεν είναι παρά η πιθανότητα του γεγονότος* $\{B_{t-s} < a\}$) *(για κίνηση Brown που ξεκίνησε στο* $x$*) η οποία δίνεται από το ολοκλήρωμα που γράψαμε παραπάνω. Θέτοντας τώρα* $x = a$ *στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι*

$$\phi(a,s) = \mathbf{1}_{\{s<t\}} \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} exp(-\frac{(z-a)^2}{2(t-s)}) dz = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{s<t\}}.$$

*Έτσι με την χρήση της ισχυρής ιδιότητας Markov βρίσκουμε ότι*

$$E_0[Y_{T_a} \circ \theta_{T_a} \mid \mathcal{F}_{T_a}] = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{s<t\}}.$$

*Τώρα παίρνουμε την μέση τιμή* $E_0$ *και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπο συνθήκη μέσης τιμής (και συγκεκριμένα τον νόμο της ολικής πιθανότητας) βρίσκουμε ότι*

$$P(T_a \le t, B_t \le a) = \frac{1}{2} P(T_a \le t) \tag{3.10}$$

*(παραλείπουμε το* $P_0$*).*

*Έχοντας αποδείξει την παραπάνω ιδιότητα μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την αρχή της ανάκλασης. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να γράψουμε:*

$$\begin{aligned} P(T_a \le t) &= P(T_a \le t, B_t > a) + P(T_a \le t, B_t \le a) \\ &= P(T_a \le t, B_t > a) + \frac{1}{2}P(T_a \le t) = P(B_t \ge a) + \frac{1}{2}P(T_a \le t) \end{aligned}$$

*από την οποία μπορούμε να δούμε ότι*

$$P(T_a \leq t) = P(S_t \geq a) = 2P(B_t \geq a)$$

Μία ακόμα ενδιαφέρουσα εφαρμογή της ισχυρής ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown είναι ο λεγόμενος νόμος του αντιστρόφου συνημιτόνου του Levy.

**Παράδειγμα 3.2.9** *Δείξτε ότι η πιθανότητα να έχει η κίνηση Brown τουλάχιστον ένα σημείο μηδενισμού στο διάστημα $[t_0, t_1]$ δεδομένου ότι $B_0 = 0$ δίνεται από την σχέση*

$$p = \frac{2}{\pi} arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}$$

*Μπορούμε να γράψουμε*

$$\begin{aligned} P[\min_{0\leq u\leq t} B_u \leq 0 \mid B_0 = a] &= P[\max_{0\leq u\leq t} B_u \geq 0 \mid B_0 = -a] \\ &= P[\max_{0\leq u\leq t} B_u \geq a \mid B_0 = 0] = P(T_a \leq t) \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{s^{3/2}} exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) ds, \; a > 0 \end{aligned}$$

*Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την συμμετρία της κίνησης Brown γύρω από την τιμή 0, στην δεύτερη την χωρική ομοιογένεια της κίνησης Brown και για την τελευταία το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.2.7.*

*Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί και να ερμηνευθεί και ως εξής: Αν $B_{t_0} = a$ τότε η πιθανότητα $P(a)$, να έχει η $B_t$ τουλάχιστον ένα μηδενισμό μεταξύ των $t_0$ και $t_1$ είναι*

$$P(a) = \frac{\mid a \mid}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1 - t_0} \frac{1}{s^{3/2}} exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) ds$$

*Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από την ομοιογένεια στον χρόνο της κίνησης Brown, ενώ η απόλυτη τιμή προκύπτει για λόγους συμμετρίας.*

*Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να μηδενίζεται η $B_t$ τουλάχιστον μία φορά στο διάστημα $(t_0, t_1)$ δεδομένου ότι $B_0 = 0$ θα δεσμεύσουμε σε όλες τις πιθανές τιμές της $B_{t_0}$: Αν $B_{t_0} = a$ η πιθανότητα να μηδενίζεται η $B_t$ στο διάσημα $(t_0, t_1)$ είναι ίση προς $P(a)$. Συνεπώς,*

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} P(a) P[B_{t_0} = a \mid B_0 = 0] da = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \int_0^{\infty} P(a) exp\left(-\frac{a^2}{2t_0}\right) da$$

*Μετά από λίγη άλγεβρα*

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\pi\sqrt{t_0}} \int_0^{t_1 - t_0} s^{-3/2} \int_0^{\infty} a exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{t_0}\right) da\right] ds \\ &= \frac{\sqrt{t_0}}{\pi} \int_0^{t_1 - t_0} \frac{ds}{(t_0 + s)\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi} arctan \sqrt{\frac{t_1 - t_0}{t_0}} = \frac{2}{\pi} arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}} \end{aligned}$$

## 3.3 Ιδιότητες *martingale* της κίνησης *Brown*

Η θεωρία της κίνησης Brown μπορεί να αναπτυχθεί κάνοντας χρήση αποτελεσμάτων από την θεωρία των διαδικασιών martingale. Όπως θα δείξουμε και στην παράγραφο αυτή, η κίνηση Brown είναι martingale, και πολλές από τις ιδιότητες της μπορεί να συναχθούν από την ιδιότητα αυτή. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 3.3.1** *Έστω $B_t$ μία κίνηση Brown και $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$. Οι παρακάτω στοχαστικές διαδικασίες είναι martingales ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_s$:*

$(i)$ $B_t$

$(ii)$ $(B_t)^2 - t$

$(iii)$ $M_t^\lambda = exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$.

**Απόδειξη:** $(i)$ Μπορούμε να δούμε ότι $E[\mid B_t \mid] < \infty$ εφόσον το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid exp(-x^2/2t)dx$ συγκλίνει. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E[B_t \mid \mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s \mid \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + E[B_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s = B_s \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο άθροισμα αυτό χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$, και ότι η μέση τιμή της μεταβολής αυτής είναι 0. Για το δεύτερο όρο χρησιμοποιήσαμε το ότι η $B_s$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη. Οι $(ii)$ και $(iii)$ αφήνονται σαν άσκηση. □

**Παράδειγμα 3.3.1** *Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της κίνησης Brown είναι η $< B >_t = t$. Αυτό μπορεί να φανεί από το $(ii)$ του θεωρήματος 3.3.1 και από τον ορισμό της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μία martingale. Μπορεί όμως να αποδειχθεί και ευθέως απο τον ορισμό της τετραγωνικής μεταβολής ως*

$$< B >_t = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

*όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του $[0, t]$, $\Delta = \sup_i \mid t_{i+1} - t_i \mid$, και όριο λαμβάνεται κατά πιθανότητα. Θα επανέλθουμε στην οπτική αυτή στην παράγραφο 3.5.*

**Παράδειγμα 3.3.2 Νόμος των χρόνων εξόδου για την κίνηση Brown** *Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.3.1 για να βρούμε με διαφορετικό τρόπο το νόμο για την τυχαία μεταβλητή $T_a = inf\{t : S_t \geq a\}$ όπου $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$, και $B$ είναι η μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0.*

*Από το θεώρημα 3.3.1 βλέπουμε ότι για $\lambda \geq 0$, η στοχαστική διαδικασία $M_t^\lambda$ είναι μία martingale. Ας θεωρήσουμε τώρα την σταματημένη martingale*

$M^{\lambda}_{t\wedge T_a}$. Αυτή είναι μία martingale η οποία είναι φραγμένη από το $e^{\lambda a}$ και συνεπώς χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιλεκτικής στάσης βλέπουμε πως

$$E[M^{\lambda}_{T_a}] = E[M^{\lambda}_0] = 1.$$

Αυτό μας δίνει ότι

$$E\left[exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2 T_a}{2}\right)\right] = 1$$

οπότε

$$E\left[exp\left(-\frac{\lambda^2 T_a}{2}\right)\right] = exp(-\lambda a)$$

Ορίζοντας το $s$ από την σχέση $s = \frac{\lambda^2}{2}$ παίρνουμε

$$E(e^{-sT_a}) = e^{-\sqrt{2s}a}$$

Όμως, αν $f(t)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T_a$ τότε

$$E(e^{-sT_a}) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

οπότε $E(e^{-sT_a})$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T_a$. Αναστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιώντας τυπικές μεθόδους βρίσκουμε ότι

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right).$$

Σχετικά με τον μετασχηματισμό Laplace και τις ιδιότητες του παραπέμπουμε σε εγχειρίδια εφαρμοσμένων μαθηματικών (βλ. πχ. [23]).

**Παράδειγμα 3.3.3** Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες martingale της κίνησης Brown και την ανισότητα submartingale του Doob μπορούμε να δείξουμε ότι αν $S_t = \sup_{s\le t} B_s$ τότε

$$P(S_t \ge at) \le exp\left(-\frac{a^2 t}{2}\right)$$

**Απόδειξη**: Για $\lambda > 0$ θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική martingale $M^{\lambda}$ περιορισμένη στο διάστημα $[0, t]$. Από τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης (μονοτονία) έχουμε ότι

$$exp\left(\lambda S_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) \le \sup_{s\le t} M^{\lambda}_s$$

*και από αυτό παίρνουμε*

$$\begin{aligned} P(S_t \geq at) &\leq P\left[\sup_{s\leq t} M_s^\lambda \geq exp\left(\lambda at - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)\right] \\ &\leq exp\left(-\lambda at + \frac{\lambda^2 t}{2}\right) E(M_t^\lambda). \end{aligned}$$

*Εφόσον* $M^\lambda$ *είναι martingale ισχύει ότι* $E(M_t^\lambda) = E(M_0^\lambda) = 1$ *και αφού*

$$\inf_{\lambda>0}(-\lambda at + \lambda^2 t/2) = -a^2 t/2$$

*(ελαχιστοποιούμε ως προς* $\lambda$*) έπεται το ζητούμενο.*

## 3.4 Χαρακτηρισμός της κίνησης *Brown*

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα τρόπο ελέγχου του αν μία δεδομένη στοχαστική διαδικασία (ως προς την διήθηση που παράγει) είναι κίνηση Brown ή όχι. Ο τρόπος ελέγχου βασίζεται σε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα που οφείλεται στον Paul Levy και που χαρακτηρίζει την κίνηση Brown χρησιμοποιώντας ουσιαστικά τις ιδιότητες martingale που αυτή έχει. Παραθέτουμε το θεώρημα αυτό και θα δώσουμε την απόδειξη στο παράρτημα του κεφαλαίου.

**Θεώρημα 3.4.1** *(Levy ) Έστω* $X_t$*,* $t \geq 0$ *μία στοχαστική διαδικασία και* $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ *η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η* $X_t$ *είναι μία κίνηση Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες*

$(i)$ $X_0 = 0$ $\sigma.\beta.$

$(ii)$ *Οι τροχίες της* $X_t$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.*

$(iii)$ *Η* $X_t$ *είναι μία martingale ως προς την διήθηση* $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$*.*

$(iv)$ *Η* $X_t^2 - t$ *είναι μία martingale ως προς την διήθηση* $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$*.*

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. □

**Σημείωση:** Το θεώρημα αυτό χαρακτηρίζει την κίνηση Brown ουσιαστικά από την μέση τιμή της και την διακύμανση και φυσικά την ανεξαρτησία των μεταβολών της. Συγκεκριμένα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συνθήκες $(iii)$ και $(iv)$ του παραπάνω θεωρήματος με τις συνθήκες:
$(iii)'$ Η διαδικασία $X_t$ έχει στάσιμες (stationary ) και ανεξάρτητες μεταβολές
$(iv)'$ Οι μεταβολές $X_t - X_s$ , $s < t$ είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά $t - s$.
Επίσης η συνθήκη $(iv)$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία συνθήκη σχετικά με την τετραγωνική μεταβολή της martingale $X_t$ και συγκεκριμένα από την $< X_t >= t$.

Το θεώρημα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και βρίσκει αρκετές εφαρμογές στην χρηματοοικονομική. Αυτό που πρέπει να μας εντυπωθεί εδώ είναι το ότι αν μία διαδικασία είναι κίνηση Brown ή όχι εξαρτάται από την διήθηση την οποία την συνοδεύει καθώς και από το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο την βλέπουμε. Οι ιδέες αυτές θα ξεκαθαρίσουν και παρακάτω όταν αναπτύξουμε το θεώρημα του Girsanov.

**Παράδειγμα 3.4.1** *Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Levy αποδείξτε ότι η στοχαστική διαδικασία* $X_t = B_{t+T} - B_T$ *όπου* $B_t$ *είναι μία κίνηση Brown και* $T$ *ένας ντετερμινιστικός χρόνος είναι και αυτή μία κίνηση Brown.*

*Η διήθηση* $\mathcal{G}_t$ *που παράγει η στοχαστική διαδικασία* $X_t$ *σχετίζεται με την διήθηση* $\mathcal{F}_t$ *που παράγει η κίνηση Brown. Πράγματι*

$$\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t) = \sigma(B_{s+T} - B_T, s \leq t) = \sigma(B_s, s \leq t+T) = \mathcal{F}_{t+T}$$

*Οι ιδιότητες* $(i)$ *και* $(ii)$ *του θεωρήματος του Levy είναι προφανείς από τον ορισμό της κίνησης Brown.*

*Θα ελέγξουμε την* $(iii)$

$$\begin{aligned} E[X_t \mid \mathcal{G}_s] &= E[X_t - X_s + X_s \mid \mathcal{G}_s] = X_s + E[X_t - X_s \mid \mathcal{G}_s] \\ &= E[B_{t+T} - B_{s+T} \mid \mathcal{F}_{s+T}] + X_s = E[B_{t+T} - B_{s+T}] + X_s = X_s \end{aligned}$$

*(το μέτρο κάτω από το οποίο παίρνουμε τις μέσες τιμές είναι το μέτρο που παράγει η κίνηση Brown).*

*Θα ελέγξουμε τώρα την* $(iv)$

$$\begin{aligned} E[X_t^2 - t \mid \mathcal{G}_s] &= E[(X_t - X_s + X_s)^2 - t \mid \mathcal{G}_s] \\ &= E[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{G}_s] - t + X_s^2 \\ &= E[(B_{t+T} - B_{s+T})^2 \mid \mathcal{F}_{s+T}] - t + X_s^2 \\ &= (t + T - (s+T)) - t + X_s^2 = X_s^2 - s \end{aligned}$$

*όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι* $E[X_t - X_s \mid \mathcal{G}_s] = 0$ *που δείξαμε κατά την απόδειξη της ιδιότητας* $(iii)$ *και τις ιδιότητες της κίνησης Brown.*

*Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία* $X_t$ *είναι μία κίνηση Brown. Δοκιμάστε να δείξετε τις ιδιότητες* $(iii)'$ *και* $(iv)'$ *σαν άσκηση.*

**Παράδειγμα 3.4.2** *Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία* $Z_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ *όπου* $c > 0$ *και* $B_t$ *η κίνηση Brown. Η στοχαστική διαδικασία* $Z_t$ *είναι μία κίνηση Brown.*

*Η απόδειξη μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το θέωρημα του Levy. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι η σ-άλγεβρα* $\mathcal{G}_t$ *που παράγεται από την διαδικασία* $Z_t$ *είναι ουσιαστικά η σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}_{c^2 t}$ *όπου* $\mathcal{F}_t$ *είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown. Τα υπόλοιπα αφήνονται σαν άσκηση.*

## 3.5 Ιδιότητες των τροχιών της κίνησης *Brown*

Οι τροχιές της κίνησης Brown έχουν μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες, μελέτη των οποίων έχει απασχολήσει αρκετά την μαθηματική κοινότητα. Ιδιαίτερα με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν μεγάλοι μαθηματικοί όπως π.χ. ο Levy , ο Wiener κ.α. Εδώ απλά θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές απο αυτές. Τα αποτελέσματα αυτά είναι αρκετά τεχνικά, γι΄ αυτό και αναφέρουμε τα περισσότερα χωρίς απόδειξη.

Ξεκινάμε με την ιδιότητα της συνέχειας των τροχιών.

**Θεώρημα 3.5.1** *Έστω $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ και $0 < T < \infty$. Τότε, υπάρχει τυχαία μεταβλητή $N$ (η οποία εξαρτάται και από τα $\epsilon$ και $T$) τέτοια ώστε $E[N^p] < \infty$ $\forall p$, $0 < p < \infty$ για την οποία ισχύει*

$$| B_t(\omega) - B_s(\omega) | \leq N(\omega) \mid t - s \mid^{\frac{1}{2}-\epsilon}, \quad \forall s, t \in [0, T]$$

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. Βλ. π.χ. [21]. □

Ο Kintchin έχει αποδείξει ένα πιο ισχυρό θεώρημα σχετικά με την συμπεριφορά των τροχιών της κίνησης Brown σε μικρούς και σε μεγάλους χρόνους, που δίνει ένα πιο καλό φράγμα από το παραπάνω. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως ο νόμος του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου (law of the iterated logarithm).

**Θεώρημα 3.5.2** *Για την κίνηση Brown ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις με πιθανότητα 1*

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{lnln\left(\frac{1}{t}\right)}} = \limsup_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{lnln(t)}} = 1$$

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{lnln\left(\frac{1}{t}\right)}} = \liminf_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{lnln(t)}} = -1$$

**Απόδειξη:**Παραλείπεται. □

Η παραπάνω ιδιότητα της κίνησης Brown , που ουσιαστικά μας λέει ότι το όριο $\frac{B_t}{\sqrt{lnln(\frac{1}{t})}}$ στο $t = 0$ δεν υπάρχει μας δίνει μία ιδέα για την παθολογική συμπεριφορά των τροχιών της κίνησης Brown. Αυτή η ιδέα μπορεί να επιβεβαιωθεί και από τα αποτελέσματα που παρατίθενται στην συνέχεια.

Σημαντική είναι η ιδιότητα της αυτοομοιότητας της κίνησης Brown:

**Θεώρημα 3.5.3** *Έστω $B_t$ μία κίνηση Brown. Τότε και οι στοχαστικές διαδικασίες*

(*i*) $X_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$

(*ii*) $Y_t = t B_{\frac{1}{t}}$

*είναι επίσης κινήσεις Brown.*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη της (*i*) έχει ουσιαστικά σκιαγραφηθεί σαν παράδειγμα στην παράγραφο 3.4 χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Levy. Η απόδειξη της (*ii*) επίσης μπορεί να γίνει επίσης κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Levy. Το μόνο λεπτό σημείο είναι η απόδειξη της συνέχειας της $Y_t$ στο σημείο $t = 0$. Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα από την ανάλυση. Για το παρόν μας αρκεί να λάβουμε την συνέχεια της $Y_t$ στο $t = 0$ ως δεδομένη.□

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα της κίνησης Brown είναι ότι δεν είναι διαφορίσιμη πουθενά $\sigma.\beta.$ Είναι δηλαδή ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι συνεχής αλλά μη διαφορίσιμη. Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής για την κίνηση Brown διατυπώθηκε για πρώτη φορά την δεκαετία του 1930 από τους Paley, Wiener και Zygmund. Παραθέτουμε μία μορφή του αποτελέσματος αυτού.

**Θεώρημα 3.5.4** *Η κίνηση Brown $B_t$ είναι μη διαφορίσιμη $\sigma.\beta.$ στο σημείο $t$, για κάθε $t \geq 0$ .*

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. □

Η τετραγωνική μεταβολή της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, t]$ είναι ίση με $t$. Αντίθετα η κινηση Brown έχει άπειρη μεταβολή. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 3.5.5** *Η κίνηση Brown έχει τις παρακάτω ιδιότητες*

$(i)$ *Η τετραγωνική της μεταβολή στο διάστημα $[0, t]$ είναι ίση με $t$.*

$(ii)$ *Η μεταβολή της είναι άπειρη.*

**Απόδειξη:** $(i)$ Προκύπτει από το ότι η στοχαστική διαδικασία $B_t^2 - t$ είναι martingale. Μία εναλλακτική απόδειξη δίνεται στο Παράδειγμα 3.5.1.
$(ii)$ Προκύπτει από το ότι η $B_t$ είναι συνεχής martingale και από το θεώρημα 2.6.3. □

Το γεγονός ότι η μεταβολή της κίνησης Brown είναι άπειρη είναι ιδιαίτερα σημαντικό για αυτά που θα ακολουθήσουν. Λόγω της ιδιότητας αυτής **δεν** μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης $f$ επάνω στην κίνηση Brown, $\int f(s, \omega) dB_s$ σαν ένα ολοκλήρωμα Riemann-Stieljes αλλά θα πρέπει να βρούμε ένα εναλλακτικό τρόπο ορισμού του, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα αυτό να έχει νόημα. Θα επανέλθουμε στις ιδέες αυτές όταν συζητάμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô.

**Παράδειγμα 3.5.1** *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 = t$$

*όπου $\Delta_i^n B = B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}$ και με $t_i^n$ συμβολίζουμε την διαμέριση $\tau_i^n = \frac{it}{n}$ του διαστήματος $[0, t]$. Η σύγκλιση είναι σύγκλιση κατά $L^2$.*

*Αρκεί να δείξουμε ότι*

$$\lim_{n\to} E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - t\right)^2\right] = 0$$

*Μπορούμε να γράψουμε*

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n B)^2 - t\right)^2\right] &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left((\Delta_i^n B)^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right] \\
&\quad \textit{λόγω ανεξαρτησίας} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left((\Delta_i^n B)^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left\{E[(\Delta_i^n B)^4] - \frac{2t}{n}E[(\Delta_i^n B)^2] + \frac{t^2}{n^2}\right\}
\end{aligned}$$

*Όμως, από τις ιδιότητες της κίνησης Brown γνωρίζουμε ότι*

$$E[(\Delta_i^n B)^4] = \frac{3t^2}{n^2}, \quad E[(\Delta_i^n B)^2] = \frac{t}{n} \tag{3.11}$$

*Συνεπώς,*

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n B)^2 - t\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3t^2}{n^2} - \frac{2t^2}{n^2} + \frac{t^2}{n^2}\right) = \frac{2t^2}{n}$$

*από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n B)^2 - t\right)^2\right] = 0$$

*Έτσι αποδείχθηκε το ζητούμενο. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να δειχθεί και για γενικότερες διαμερίσεις. Από τις ιδιότητες της σύγκλισης βλέπουμε ότι η $L^2$-σύγκλιση εξασφαλίζει και την σύγκλιση σε πιθανότητα, οπότε το παράδειγμα αυτό μας δείχνει με διαφορετικό τρόπο ότι η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της κίνησης Brown $< B >_t = t$.*

## 3.6 Πολυδιάστατη κίνηση *Brown*

Θα ορίσουμε τώρα την πολυδιάστατη κίνηση Brown.

**Ορισμός 3.6.1** *Η κίνηση Brown $d$-διαστάσεων είναι η στοχαστική διαδικασία $B_t = (B_{1,t}, B_{2,t}, ..., B_{d,t})$ όπου $B_{i,t}$, $i = 1, ..., d$ είναι κινήσεις Brown ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Οι ιδιότητες της πολυδιάστατης κίνησης Brown μπορεί να συναχθούν από τις ιδιότητες των επι μέρους μονοδιάστατων κινήσεων Brown που την αποτελούν.

**Ορισμός 3.6.2** *Μία $d-$διάστατη κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία $B_t$ η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^d$ και που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) *Αν* $t_0 < t_1 < ... < t_n$, *τότε οι (διανυσματικές) τυχαίες μεταβλητές* $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *είναι ανεξάρτητες, (ανεξάρτητες αυξήσεις)*

(ii) *If* $s, t \geq 0$, *τότε*

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),$$

*όπου* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. *Οι αυξήσεις της κίνησης Brown σε* $d-$*διαστάσεις είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή σε* $d-$*διαστάσεις (κατανομή Gauss ).*

(iii) *Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η συνάρτηση* $t \to B_t$ *είναι συνεχής.*

Οι τρείς αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Η ύπαρξη της στοχαστικής διαδικασίας με τις παραπάνω ιδιότητες μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας γενικεύσεις των τρόπων απόδειξης της ύπαρξης της μονοδιάστατης κίνησης Brown.

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να συνάγουμε τις ιδιότητες του μέτρου που επάγει η κίνηση Brown στις $d$-διαστάσεις:

$$\mu_{t_1,t_2,...t_n}(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 ... \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

όπου $x_0 = x \in \mathbb{R}^d$, $t_1 = 0$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, ..., n$ και

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} exp\left(-\frac{|y - x|^2}{2t}\right)$$

Με τον συμβολισμό $|x|$ εννοούμε την Ευκλείδια νόρμα στον $\mathbb{R}^d$. Η ποσότητα $\mu_{t_1,t_2,...t_n}(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)$ είναι κατά κάποιο τρόπο η πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία $B_t$ τις χρονικές στιγμές $t_i$ στα υποσύνολα $A_i$ (που ανήκουν στο σύνολο Borel που παράγεται από το $\mathbb{R}^d$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης κατανομή και η γνώση της είναι πολύ σημαντική στο να κατασκευάσουμε το μέτρο $\mu$ [1]

Η πολυδιάστατη κίνηση Brown έχει πολλές από τις ιδιότητες της μονοδιάστατης κίνησης Brown. Ένα παράδειγμα είναι η ιδιότητα Markov και η ισχυρή ιδιότητα Markov. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι ιδιότητες martingale της κίνησης Brown και διαφόρων συναρτήσεων της. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε εύκολα να δούμε την γενίκευση του θεωρήματος του Levy για την κίνηση Brown σε περισσότερες της μίας διάστασης.

**Θεώρημα 3.6.1** *Έστω* $X_t = (X_{1,t}, ..., X_{d,t}) \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$ *μία στοχαστική διαδικασία και* $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ *η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η* $X_t$ *είναι μία κίνηση Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες*

[1] Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov (Kolmogorov's extension theorem). Βλέπε π.χ. [1]

(i) $X_0 = 0$ *σ.β.*

(ii) *Οι τροχιές της $X_t$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.*

(iii) *Η $X_t$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.*

(iv) *Οι $X_{i,t}X_{j,t} - \delta_{ij}t$, $i,j = 1,...,d$ είναι martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Το $\delta_{ij}$ είναι το δέλτα του Kronecker.*

## 3.7 Κατασκευή της κίνησης *Brown*

Θα ασχοληθούμε τώρα εν συντομία με την κατασκευή της κίνησης Brown. Αν και μία απόδειξη ύπαρξης της πολύ σημαντικής αυτής στοχαστικής διαδικασίας είναι απαραίτητη, ο λόγος που θα το κάνουμε αυτό δεν πηγάζει πλήρως από θεωρητικό ενδιαφέρον. Οι μέθοδοι κατασκευής της κίνησης Brown που θα δόσουμε είναι κατασκευαστικές και συνεπώς μπορεί να μας φανούν χρήσιμες στην αριθμητική κατασκευή τροχιών της κίνησης Brown και στην παραγωγή αριθμητικών αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων.

Θα δώσουμε δύο διαφορετικές κατασκευές της κίνησης Brown, μία που βασίζεται στην αναπαράσταση της χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις βάσης, και μία κατασκευή της σαν το κατάλληλο όριο ενός τυχαίου περιπάτου.

### 3.7.1 Αναπαράσταση της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Haar

Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας μία βάση του χώρου των συνεχών συναρτήσεων, την βάση των συναρτήσεων Haar.

**Ορισμός 3.7.1** *Οι συναρτήσεις $\phi_{ij}(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζονται με βάση τον παρακάτω τύπο*

$$\phi_{ij}(t) = \begin{cases} 2^{(i-1)/2}, & \frac{2j-2}{2^i} \leq t < \frac{2j-2}{2^i} \\ -2^{(i-1)/2}, & \frac{2j-1}{2^i} \leq t < \frac{2j}{2^i} \\ 0, & \text{για κάθε άλλο } t \end{cases}$$

*για $i = 1, 2, ...$ και $j = 1, 2, ..., 2^{i-1}$ ονομάζονται* **συναρτήσεις Haar**.

Οι συναρτήσεις Haar έχουν μερικές πολύ χρήσιμες ιδιότητες:

- Οι συναρτήσεις Haar είναι ορθογώνιες στο $[0,1]$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $< f, g >= \int_0^1 \bar{g} f dt$
- Οι συναρτήσεις Haar αποτελούν ένα ορθοκανονικό πλήρες σύστημα στον χώρο $L^2[0,1] = \{f :< f, f >< \infty\}$.
- Οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων Haar είναι πυκνοί στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια, εφόσον το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων είναι πυκνό στον χώρο $L^2[0,1]$, οι γραμμικοί συνδιασμοί των συναρτήσεων Haar θα είναι πυκνοί στον χώρο $L^2[0,1]$.

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ και οποιαδήποτε συνάρτηση που ανήκει στον $L^2[0,1]$ θα μπορεί να προσεγγιστεί σαν γραμμικός συνδιασμός συναρτήσεων Haar. Κατά συνέπεια, και η κίνηση Brown που εμπίπτει στις παραπάνω κατηγορίες θα μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια των συναρτήσεων αυτών.

**Πρόσεγγιση της κίνησης Brown**
Ορίζουμε τις

$$\psi_{ij}(t) = \int_0^t \phi_{ij}(s)ds$$

και θεωρούμε μία ακολουθία από ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες κανονικές μεταβλητές $Y_{ij}$ με $E[Y_{ij}] = 0$ και $E[Y_{ij}^2] = 1$.

Κατασκευάζουμε τα αθροίσματα

$$\begin{aligned} V_0(t) &= Y_{00}\psi_{00}(t) \\ V_i(t) &= \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij}\psi_{ij}(t),\ i \geq 1 \end{aligned}$$

Το άθροισμα

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij}\psi_{ij}(t),\ i \geq 1$$

είναι μία προσέγγιση της κίνησης Brown στο διάστημα $[0,1]$.

Για την προσέγγιση της κίνησης Brown σε οποιοδήποτε διάστημα αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της κίνησης Brown ότι αν $B_t$ είναι κίνηση Brown τότε και η $\widehat{B}_t = t\,B_{1/t}$ είναι κίνηση Brown. Η ιδιότητα αυτή επεκτείνει την παραπάνω κατασκευή για $t$ από το διάστημα $[0,1]$ σε κάθε $t$.

Το οτι η παραπάνω κατασκευή είναι καλά ορισμένη και το οτι προσεγγίζει την κίνηση Brown μπορεί να εκφραστεί με το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 3.7.1** *Η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} V_i(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $t$ (σ.β.). Αν $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t)$ τότε η $X_t$ είναι μά κίνηση Brown για την οποία ισχύει $X_0 = 0$.*

**Απόδειξη:** Βλ. [1]. □.

**Σχόλιο:** Η αναπαράσταση της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας ως βάση τις συναρτήσεις Haar δεν είναι η μόνη δυνατή τέτοια αναπαράσταση. Μία αρκετά δημοφιλής αναπαράσταση της κίνησης Brown είναι σαν μία σειρά Fourier με τυχαίους συντελεστές. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται ανάπτυγμα Karhunen-Loéve. Σύμφωνα με την αναπαράσταση αυτή το άθροισμα

$$X_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega)\Phi_n(t),\ 0 \leq t \leq T$$

όπου

$$\Phi_n(t) = \frac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right), \ n = 0, 1, ...$$

και οι $\{Z_i\}$, $i = 0, 1, ...$ είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με $E[Z_i] = 0$ και $E[Z_i^2] = 1$, συγκλίνει κατά $L^2$ σε μία κίνηση Brown στο διάστημα $[0, T]$.

### 3.7.2 Η εμβύθιση Skorokhod (Skorokhod Embedding)

Θα δώσουμε τώρα μία εναλλακτική κατασκευή της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας ως βασικό εργαλείο τον τυχαίο περίπατο. Χρησιμοποιώντας την ιδέα της εμβύθισης του Skorokhod (Skorokhod embedding) μπορούμε να προσεγγίσουμε μία κίνηση Brown ξεκινώντας από ένα τυχαίο περίπατο και κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή κλίμακας.

Η κεντρική ιδέα της κατασκευής αυτής βασίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Έστω $\xi_i$ ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $E[\xi_i] = 0$ και $E[\xi_i^2] = 1$. Ορίζουμε τον τυχάιο περίπατο $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Τότε υπάρχει μία κίνηση Brown $B_t$ και χρόνοι στάσης $\tau_1 \leq \tau_2 \leq ...$ τέτοιοι ώστε $B_{\tau_n} = S_n$, $\sigma.\beta.$ για κάθε $n$.

Η κεντρική αυτή ιδέα μπορεί να γραφεί σε πιο αυστηρή μορφή με την χρήση του παρακάτω θεωρήματος:

**Θεώρημα 3.7.2** *(Skorokhod, Strassen) Έστω $\xi_i$ ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $E[\xi_i] = 0$, και $E[\xi_i^2] = 1$. Ας γράψουμε $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Τότε, υπάρχει μία κίνηση Brown τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{t^{1/2}} \sup_{r \leq t} \mid S_{[r]} - B_r \mid \to 0, \ t \to \infty$$

*όπου με $[r]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του $r$, και το όριο θεωρείται ως σύγκλιση σε πιθανότητα.*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη παραλείπεται. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον [15] □

Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε ποσότητες υπολογισμένες στην τροχιά μίας κίνησης Brown από ποσότητες υπολογισμένες στα διαδοχικά σημεία που επισκέπτεται ένας τυχαίος περίπατος. Το θεώρημα αυτό οφείλεται στον Donsker και πολλές φορές αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν το **συναρτησιακό κεντρικό οριακό θεώρημα (functional central limit theorem)**.

**Θεώρημα 3.7.3** *Έστω $\xi_i$ ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $E[\xi_i] = 0$ και $E[\xi_i^2] = 1$. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία*

$$X_t^n = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k \leq nt} \xi_k, \ t \in [0, 1], n = 1, 2, ...$$

*Έστω επίσης ότι $B$ είναι μία κίνηση Brown στο $[0,1]$ και ας ορίσουμε σαν $D[0,1]$ τον χώρο των συναρτήσεων στο $[0,1]$ που είναι δεξιά συνεχείς και έχουν αριστερά όρια. Έστω $f$ μία απεικόνιση $f: D[0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και σ.β. συνεχής στην τροχία της $B$. Τότε*

$$f(X^n) \to f(B)$$

*και η σύγκλιση είναι σύγκλιση σε κατανομή.*

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον [15] □

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να προτείνουμε την παρακάτω διαδικασία προσέγγισης της κίνησης Brown.

**Προσέγγιση της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας τον τυχαίο περίπατο.**
Για να προσεγγίσουμε τις τροχίες της κίνησης Brown μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

- Παράγουμε ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών $\xi_i$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες, π.χ. τέτοιες ώστε $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$.
- Υπολογίζουμε τα άθροισματα

$$X_t^n = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k \le nt} \xi_k, \ t \in [0,1], \ n = 1, 2, ..$$

  Τα $X_t^n$ για αρκετά μεγάλο $n$ είναι προσεγγίσεις της τροχίας μίας κίνησης Brown $B_t$. Η προσέγγιση εννοείται κατά την έννοια που περιγράφει το θεώρημα 3.7.3.
- Για την επέκταση της διαδικασίας κατασκευής έξω από το διάστημα $[0,1]$ αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι αν $B_t$ είναι κίνηση Brown τότε και η $\hat{B}_t = tB_{1/t}$ είναι και αυτή κίνηση Brown.

## 3.8 Παράρτημα: Αποδείξεις θεωρημάτων

### 3.8.1 Απόδειξη της ιδιότητας Markov

Θα παρουσιάσουμε εδώ μία απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1 που αποτελεί μία έκφραση της ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown. Για την ευκολία των αναγνωστών παραθέτουμε ξανά την διατύπωση του θεωρήματος.

**Θεώρημα 3.2.1** Έστω $Y$ μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και $\theta_s$ ο τελεστής μετατόπισης (shift operator ) ο οποίος έχει την ακόλουθη δράση $(\theta_s \omega)(t) = \omega(t+s)$. Τότε

$$E_x[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y]$$

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη ακολουθούμε τον Bass [1]. Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση $Y = f(B_t)$ όπου $f$ φραγμένη και μετρήσιμη κατά Borel συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή η προς απόδειξη σχέση παίρνει την μορφή

$$E_x[f(X_t) \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = E_{X_s}[f(X_t)]$$

Αρκεί να δείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για την περίπτωση όπου $f(x) = e^{ikx}$ όπου $i^2 = -1$ και $k \in \mathbb{R}$. Η γενικότερη $f$ μπορεί να προσεγγιστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής $e^{ikx}$ (ανάπτυγμα Fourier), οπότε χρησιμοποιώντας την γραμμική ιδιότητα της υπό συνθήκη μέσης τιμής μπορούμε να καταλήξουμε στο ζητούμενο.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} E_x[f(B_t) \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] &= E_x[f(B_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = E_x[e^{ikB_{t+s}} \mid \mathcal{F}_s] \\ = E_x[e^{ik(B_{t+s}-B_s)} e^{ikB_s} \mid \mathcal{F}_s] &= e^{ikB_s} E_x[e^{ik(B_{t+s}-B_s)} \mid \mathcal{F}_s] \\ &= e^{ikB_s} E_x[e^{ik(B_{t+s}-B_s)} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-k^2 t/2} e^{ikB_s} \end{aligned}$$

όπου στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά την ιδιότητα της κίνησης Brown σύμφωνα με την οποία η μεταβολή $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$ και την ιδιότητα ότι η κατανομή της μεταβολής αυτής είναι η $N(0,t)$. Για κάθε $z$ έχουμε ότι

$$E_z[e^{ikB_s}] = E_0[e^{ikB_t} e^{ikz}] = e^{ikz} e^{-k^2 t/2}$$

Αντικαθιστώντας το $z$ με το $X_s$ έχουμε το ζητούμενο.

Για την γενικότερη περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι η $Y$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_\infty$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να προσεγγίσουμε την $Y$ σαν το γινόμενο $\prod_{i=1}^n f_i(B_{t_i})$, $s \le t_1 \le ... \le t_n$ όπου οι $f_i$ είναι φραγμένες συναρτήσεις. Η γενική περίπτωση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της υπό συνθήκη μέσης τιμής και παίρνοντας το όριο $n \to \infty$. Στο όριο αυτό θα προσεγγίσουμε την γενική φραγμένη και $\mathcal{F}_\infty$ μετρήσιμη $Y$. Η αυστηρή αιτιολόγηση της προσέγγισης αυτής βασίζεται στην χρήση του θεωρήματος μονότονης κλάσης (monotone class theorem) από την θεωρία μέτρου το οποίο είναι εκτός των πλαισίων του παρόντος. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [33], [15]. Η απόδειξη της ιδιότητας Markov για $Y \in \mathcal{F}_\infty$ της παραπάνω μορφής μπορεί να γίνει με επαγωγή. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός ισχύει όπως δείξαμε πιο πάνω στην περίπτωση που $Y = f(B_t)$. Ας υποθέσουμε πως ισχύει για γενικό $n$. θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Ας θέσουμε $V = \prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j} - B_{t_1})$ και $h(y) = E_y[V]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E_x[\prod_{j=1}^{n+1} f_j(B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s] &= E_x[E_x[V \circ \theta_{t_1} \mid \mathcal{F}_{t_1}] \mid \mathcal{F}_s]] \\ &= E_x[E_{B_{t_1}}[V] f_1(B_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] = E_x[h(B_{t_1}) f_1(B_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E_x[h\, f_1(B_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[h\, f_1(B_{t_1-s})] \end{aligned}$$

Αλλά για κάθε $y$ έχουμε

$$\begin{aligned} E_y[(hf_1)(B_{t_1-s})] &= E_y[E_{B_{t_1-s}}[V]f_1(B_{t_1-s})] \\ &= E_x[E_y[V\circ\theta_{t_1-s} \mid \mathcal{F}_{t_1-s}]f_1(B_{t_1-s})] \\ &= E_y[(V\circ\theta_{t_1-s})f_1(B_{t_1-s})] \end{aligned}$$

Θέτωντας $V := \prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j} - B_{t_1})$ και $y = B_s$ παίρνουμε την ισότητα που θέλουμε για $n+1$ και έτσι ολοκληρώνεται το βήμα της επαγωγής. □

**Σχόλιο:** Στο παραπάνω θεώρημα το $Y \in \mathcal{F}_\infty$ όπου $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \le t)$. Τα αποτελέσματα του θεωρήματος ισχύουν και για $Y$ τα οποία είναι μετρήσιμα ως προς κάποιες μεγαλύτερες σ-άλγεβρες τις $\mathcal{F}_\infty^+$ όπου $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\epsilon>0}\tilde{\mathcal{F}}_{t+\epsilon}$ όπου $\tilde{\mathcal{F}}$ είναι η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ στην οποία έχουμε συμπεριλάβει και τα σύνολα τα οποία έχουν μέτρο 0 κάτω από το μέτρο Wiener. Για την γενίκευση παραπέμπουμε στο [1].

## 3.8.2 Απόδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown

Θα ασχοληθούμε τώρα με την αποδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov. Θα αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα 3.2.2 το οποίο και παραθέτουμε ξανά για την ευκολία των αναγνωστών.

**Θεώρημα 3.2.2** Έστω $B_t$ μία κίνηση Brown και $T$ ένας πεπερασμένος χρόνος στάσης για την $B_t$. Τότε ισχύει ότι $\{B_{t+T} - B_t\}$ είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη της άλγεβρας $\mathcal{F}_T$.

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστεί να προσεγγίσουμε τον χρόνο στάσης $T$ με μία ακολουθία χρόνων στάσης $T_n$ η οποία ορίζεται σαν $T_n = \frac{k}{2^n}$ αν $T(\omega) \in [\frac{(k-1)}{2^n}, \frac{k}{2^n})$. Η ακολουθία αυτή τείνει μονότονα στον χρόνο στάσης $T$, $T_n \downarrow T$. Υπενθυμίζουμε επίσης και τον ορισμό της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_T$

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t > 0\}$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού της ανεξαρτησίας αρκεί να δείξουμε ότι

$$E_x\left[e^{i\nu(B_{T+t}-B_T)}e^{i\lambda B_{T-\tau}}\right] = E_x\left[e^{i\nu(B_{T+t}-B_T)}\right]E_x\left[e^{i\lambda B_{T-\tau}}\right]$$

(αν κρίνετε σκόπιμο συμβουλευθείτε την παράγραφο σχετικά με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις και την ανεξαρτησία). Εφόσον ο χρόνος στάσης $T$ θεωρείται φραγμένος μπορούμε να γράψουμε

$$E_x[e^{i\nu(B_{T_n+t}-B_{T_n})}e^{i\lambda B_{T_n-\tau}}] = \sum_{k=1}^{\infty} E_x\left[e^{i\nu(B_{T_n+t}-B_{T_n})}e^{i\lambda B_{T_n-\tau}}; \{T_n = \frac{k}{2^n}\}\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_x[e^{i\nu(B_{T_n+t}-B_{T_n})}]E_x[e^{i\lambda B_{T_n-\tau}}]\mathbf{1}_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}} = E_x[e^{i\nu(B_{T_n+t}-B_{T_n})}]E_x[e^{i\lambda B_{T_n-\tau}}]$$

όπου στην προτελευταία ισοτητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $B_{\frac{k}{2^n}+t} - B_{\frac{k}{2^n}}$ και των $B_{\frac{k}{2^n}-\tau}$ για κάθε $k$. Μπορούμε τώρα να πάρουμε το όριο $n \to \infty$ στην παραπάνω ισότητα και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης να περάσουμε το όριο μέσα από την μέση τιμή καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Αποδείξαμε λοιπόν την ανεξαρτησία.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η $B_{T+t} - B_T$ είναι μία κίνηση Brown που μάλιστα έχει την ίδια κατανομή με την $B_t$. Για να γίνει αυτό αρκεί να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $B_{T+t} - B_T$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια διαδικασία προσέγγισης του χρόνου στάσης $T$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
E_x[e^{i\lambda(B_{T_n+t}-B_{T_n})}] &= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\left[e^{i\lambda(B_{T_n+t}-B_{T_n})}\mathbf{1}_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\left[e^{i\lambda(B_{\frac{k}{2^n}+t}-B_{\frac{k}{2^n}})}\mathbf{1}_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}\mathbf{1}_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}} = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}
\end{aligned}$$

Τώρα, παίρνουμε το όριο $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για να αντιμεταθέσουμε τον τελεστή της μέσης τιμής με το όριο καταλήγουμε στο ότι

$$E_x[e^{i\lambda(B_{T+t}-B_T)}] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

το οποίο δείχνει ότι η $B_{T+t} - B_T$ είναι μία κινηση Brown.

**Σχόλιο:** Ο περιορισμός $T$ φραγμένος δεν είναι απαραίτητος και μπορεί να παραλειφθεί. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [1].

Θα αποδειξουμε τωρα το θεώρημα 3.2.3.

**Θεώρημα 3.2.3** Έστω $\theta_s$ ο τελεστής μετατόπισης που ορίστηκε προηγουμένως, $U$ μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και $T$ ένας χρόνος στάσης. Τότε

$$E_x[f(Y \circ \theta_T) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[Y]$$

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη του θεωρήματος 3.2.3 θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την προσέγγιση του χρόνου στάσης $T$ από την ακολουθία $T_n$ (βλ. απόδειξη θεωρήματος 3.2.2). Αρκεί να δείξουμε ότι

$$E_x[f(B_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[f(B_t)]$$

για $f$ συνεχή και φραγμένη.

Αν $A$ κάποιο σύνολο που ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_{T_n}$ μπορούμε να γράψουμε

$$E_x[f(B_{T_n+t}); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}] = E_x[f(B_{t+\frac{k}{2^n}}); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}]$$
$$E_x[E_{B_{\frac{k}{2^n}}} f(B_t); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}] = E_x[E_{B_{T_n}} f(B_t); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιοτητα Markov για την κίνηση Brown στον χρόνο $\frac{k}{2^n}$.

Με βάση τον παραπάνω υπολογισμό έχουμε

$$E_x[f(B_{T_n+t}); A \cap \{T < \infty\}] = \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[ f(B_{T_n+t}); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[ E_{B_{T_n}}[f(B_t)]; A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \right] = E_x \left[ E_{B_{T_n}}[f(B_t)]; A \cap \{T < \infty\} \right]$$

Παίρνουμε τώρα το όριο $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης καταλήγουμε στο

$$E_x[f(B_{T+t}); A \cap \{T < \infty\}] = E_x[E_{B_T}[f(B_t)]; A \cap \{T < \infty\}]$$

Από τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής καταλήγουμε στο ότι

$$E_x[f(B_{t+T}) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[f(B_t)]$$

Η γενικότερη $Y$ μπορεί να προσεγγιστεί σαν γινόμενο της μορφής $\prod_{i=1}^{n} f_i(B_{t_i})$ στο όριο όπου $n \to \infty$ με παρεμφερή τρόπο όπως και στην ιδιότητα Markov. □

### 3.8.3 Απόδειξη του θεωρήματος του Levy

Θα ασχοληθούμε έδώ με την απόδειξη του θεωρήματος του Levy. Το θεώρημα αυτό έχει την ακόλουθη μορφή.

**Θεώρημα 3.4.1** Έστω $X_t$, $t \geq 0$ μία στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η $X_t$ είναι μία κίνηση Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

$(i)$ $X_0 = 0$ $\sigma.\beta.$

$(ii)$ Οι τροχίες της $X_t$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

$(iii)$ Η $X_t$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

$(iv)$ Η $X_t^2 - t$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

**Απόδειξη:** Το ευθύ είναι απλό και ουσιαστικά η απόδειξη έχει δοθεί στην απόδειξη του θεωρήματος 3.3.1. Το αντίστροφο απαιτεί λίγο παραπάνω κόπο. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Αν η $X_t$ έχει τις ιδιότητες 1-4 μπορούμε να δειξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία

$$M_t = \exp\left(i\lambda X_{t\wedge T} + \frac{1}{2}\lambda^2(t\wedge T)\right)$$

είναι martingale για κάθε $\lambda$, όπου $T$ κάποιος (φραγμένος) χρόνος στάσης και $i^2 = -1$. Για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{F}_s$, $s < t < T$ έχουμε

$$E[\mathbf{1}_A M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbf{1}_A M_s$$

από όπου με κατάλληλη αναδιοργάνωση των όρων καταλήγουμε στο

$$E[\mathbf{1}_A e^{i\lambda(X_t - X_s)}] = P(A)e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$$

Από την σχέση αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$ και είναι κατανεμημένη με βάση την κατανομή $N(0, t-s)$. Συνεπώς, η $X_t$ είναι κίνηση Brown . $\square$

## 3.9 Βασικά σημεία του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε μία πολύ σημαντική στοχαστική διαδικασία, την κίνηση Brown (ή διαδικασία Wiener) και μελετήσαμε κάποιες από τις ιδιότητες της. Η κίνηση Brown είναι πολύ βασική για την στοχαστική ανάλυση και τις διαδικασίες διάχυσης ειδικότερα, αφού αποτελεί την βάση για την μελέτη πιο περίπλοκων διαδικασιών.

Πρέπει να θυμόμαστε:

- Τον ορισμό της κίνησης Brown και το ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή.
- Η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Η ισχυρή ιδιότητα Markov είναι η ίδια με την ιδιότητα Markov αλλά για μία κατηγορία τυχαίων χρόνων, τους χρόνους στάσης.
- Η κίνηση Brown σχετίζεται με μερικές martingales. Οι ιδιότητες martingale της κίνησης Brown είναι ικανές για τον χαρακτηρισμό της κίνησης Brown με βάση το θεώρημα του Levy .

# Κεφάλαιο 4

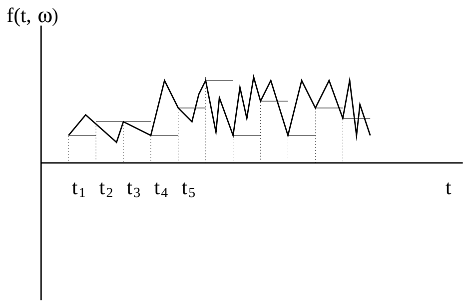
# Η θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες από την στοχαστική ανάλυση. Οι έννοιες αυτές σχετίζονται με τον ορισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας ως διαδικασία ολοκλήρωσης (ολοκληρωτή) μία στοχαστική διαδικασία όπως π.χ. η κίνηση Brown. Θα μελετήσουμε εκτενώς την θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης επάνω στην κίνηση Brown και τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος. Στο τέλος του κεφαλαίου θα δοθούν νύξεις για επεκτάσεις των εννοιών αυτών για ολοκλήρωση επάνω σε πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες.

Η θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εφαρμογές της στην χρηματοοικονομική, και συγκεκριμένα σε προβλήματα όπως π.χ. τιμολόγηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων (τιμολόγηση παραγώγων συμβολαίων), επιλογή χαρτοφυλακίου κ.α.

## 4.1 Το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο σχετικά με την κίνηση Brown η κίνηση Brown είναι μία συνάρτηση παθολογική της οποίας η παράγωγος δεν ορίζεται πουθενά. Όμως μπορούμε να ολοκληρώσουμε επάνω σε αυτή. Ολοκληρώματα επάνω στην κίνηση Brown είναι πολύ χρήσιμα όταν χρειαστεί να μελετήσουμε την θεωρία διαχύσεων ή τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε πως μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown παρουσιάζοντας τον τρόπο που υπέδειξε στα τέλη της δεκαετίας του 1940 ο Ιάπωνας μαθηματικός Kyoshi Itô . Κατά την διάρκεια του κεφαλαίου θα αναφερθούμε εν συντομία και σε άλλους εναλλακτικούς τρόπους ορισμού στοχαστικών ολοκληρωμάτων.




Σχήμα 4.1: Προσέγγιση (λεπτή γραμμή) της $f(t,\omega)$ (παχειά γραμμή) για μία μόνο πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας (δηλαδή γιά κάποιο δεδομένο $\omega$».

### 4.1.1 Ορισμός του ολοκληρώματος Itô : Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία τυχαία συνάρτηση $f$ η οποία εξαρτάται με κάποιο τρόπο από την έκβαση κάποιας κίνησης Brown και θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της επάνω στις μεταβολές της κίνησης Brown. Θέλουμε δηλαδή να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega)$$

όπου $B_t(\omega)$ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0 ενώ $f$ είναι μία συνάρτηση $f:(0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$. Θεωρούμε φυσικά ότι $(\Omega,\mathcal{F},P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων. Η εξάρτηση της συνάρτησης από την τυχαία μεταβλητή και συγκεκριμένα από την κίνηση Brown ενυπάρχει μέσω του $\omega$.

Ας ξεκινήσουμε με το να εξηγήσουμε διαισθητικά τι εννοούμε με το παραπάνω ολοκλήρωμα και κατόπιν θα ασχοληθούμε με τον αυστηρό ορισμό της έννοιας αυτής.

**Ορισμός 4.1.1** *Ας θεωρήσουμε την διαμέριση $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ του διαστήματος $[a,b]$ και ότι προσεγγίζουμε την συνάρτηση $f(t,\omega)$ ως*

$$f(t,\omega)\simeq\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

*(βλέπε σχήμα 4.1) Το* **ολοκλήρωμα Itô** *μπορεί να οριστεί σαν το όριο στον $L^2$*

$$\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(t_i,\omega)[B_{t_{i+1}}-B_{t_i}](\omega)$$

Θα τονίσουμε δύο σημεία του ορισμού στα οποία θα επανέλθουμε στην συνέχεια με περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες.

- Η τιμή της συνάρτησης $f$ την χρονική στιγμή $t$ θα πρέπει να εξαρτάται από τις τιμές του $B_s$ για $s\le t$ **αλλά όχι για** $s\ge t$.

- Το όριο λαμβάνεται κατά την $L^2$ έννοια και όχι σημειακά δηλαδή για κάθε $\omega$.

Τα δύο παραπάνω σημεία είναι ιδιαίτερα σημαντικά και διαφοροποιούν το ολοκλήρωμα του Itô από άλλους πιθανούς ορισμούς στοχαστικών ή και ντετερμινιστικών ολοκληρωμάτων.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t,\omega)dX_t$ επάνω σε πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες $X_t$. Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση όπου η $X_t$ είναι martingale. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στην παράγραφο 4.8.3.

**Παράδειγμα 4.1.1** *Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα σχετικά με το που μπορεί να χρειαστεί ένα τέτοιο ολοκλήρωμα. Ας θεωρήσουμε ότι ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει καποιο ποσό σε έναν τίτλο η αξία του οποίου, $S_t$, είναι μία στοχαστική διαδικασία. Ας υποθέσουμε δε ότι ένα μοντέλο για την τιμή του τίτλου αυτού είναι η κίνηση Brown δηλαδή $S_t = B_t$. Ο επενδυτής αποφασίζει κάθε χρονική στιγμή πόσα κομμάτια από τον τίτλο θα έχει στην κατοχή του, ας ονομάσουμε $h_t$ το ποσό αυτό. Η απόφαση του πόσα κομμάτια θα κρατήσει από τον τίτλο στην διάθεση του ο επενδυτής εξαρτάται από την εξέλιξη της τιμής του τίτλου δηλαδή είναι και αυτό μία τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται από την $B_t$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $h_t = h(t,\omega)$. Σε κάποιο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ κατά το οποίο θεωρούμε ότι το $h_t$ παραμένει σταθερό, λόγω της μεταβολής της τιμής του τίτλου ο επενδυτής θα έχει μεταβολή του πλούτου του κατά $h_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) = h_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$. Ο συνολικός του πλούτος, $V_t$, στην καταληκτική χρονική στιγμή $t$, η ισοδύναμα μετά από την πάροδο $N$ χρονικών περιόδων, θα είναι το άθροισμα των μεταβολών αυτών δηλαδή*

$$V_t = V_0 + \sum_{i=1}^{N} h_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

*όπου $t_N = t$. Αν θεωρήσουμε ότι $\sup_i(t_{i+1} - t_i) \to 0$ ή ισοδύναμα ότι $N \to \infty$, δηλαδή ότι οι μεταβολές γίνονται σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα έτσι ώστε ο χρόνος να μπορεί να θεωρηθεί ότι μεταβάλλεται συνεχώς, τότε βλέπουμε οτι ο πλούτος του επενδυτή μπορεί να παρασταθεί από ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα. Αυτό είναι μία πολύ απλή πρώτη εφαρμογή. Όπως θα δούμε και στην συνέχεια οι ιδέες αυτές μπορεί να επεκταθούν και για περιπτώσεις που οι διαδικασίες των τιμών μπορεί να είναι και πιο περίπλοκες από την κίνηση Brown.*

Μπορούμε να κάνουμε την διαισθητική αυτή προσέγγιση του ολοκληρώματος κατά Itô πιό αυστηρή με τον ακόλουθο τρόπο:

- Μπορούμε να ορίσουμε μία συγκεκριμένη κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες βήματος (step processes ) οι οποίες είναι της μορφής

$$f_{step}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

όπου $\eta_j$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι $\mathcal{F}_{t_j}$-μετρήσιμες και $t_j$ είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε $a = t_0 < t_1 < ... < t_n \leq b$. Μπορούμε να θεωρήσουμε μία ακολουθία διαμερίσεων του διαστήματος που γίνονται όλο και πιο λεπτές καθώς το $n \to \infty$ και συνεπώς να πάρουμε μία ακολουθία απο διαδικασίες βήματος $f_{step,n}$.

- Το στοχαστικό ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί για μία διαδικασία βήματος σαν ένα άθροισμα

$$I(f_{step}(t)) := \int_a^b f_{step}(t)dB_t = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Για το στοχαστικό ολοκλήρωμα μίας διαδικασίας βήματος ισχύει ότι

$$E[\mid I(f_{step}] \mid^2) := E\left[\left|\int_a^b f_{step}(t)dB_t\right|^2\right] = E\left[\int_a^b \mid f_{step}(t) \mid^2 dt\right] \quad (4.1)$$

- Δεδομένης μίας στοχαστικής διαδικασίας $f(t)$ λέμε ότι έχουμε μία προσέγγιση της διαδικασίας αυτής από μία ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}(t)$ αν ισχύει

$$\mid\mid f - f_{step,n} \mid\mid_{M^2} := \left(\int_a^b \mid f - f_{step,n} \mid^2 dt\right)^{1/2} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty$$

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $I(f_{step,n})$ είναι μία ακολουθία η οποία είναι ακολουθία Cauchy στον χώρο $L^2$ και η οποία συνεπώς συγκλίνει[1]. Αυτό οφείλεται στο ότι ισχύει η ιδιότητα (4.1) για τα ολοκληρώματα διαδικασιών βήματος. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι το όριο της ακολουθίας αυτής είναι ανεξάρτητο από την προσέγγιση της διαδικασίας $f$ από διαδικασίες βήματος δηλαδή ανεξάρτητη της επιλογής της ακολουθίας $f_{step,n}$ (αρκεί φυσικά η ακολουθία αυτή να πληρεί την συνθήκη $lim_{n\to\infty} \mid\mid f - f_{step,n} \mid\mid_{M^2} = 0$). Το όριο της ακολουθίας $I(f_{step,n})$ ορίζεται σαν το στοχαστικό ολοκλήρωμα $I(f)$ της συνάρτησης $f$.

- Συνοψίζοντας μπορούμε να ορίσουμε (α) τον χώρο $M^2$ που αποτελείται από τις στοχαστικές διαδικασίες $f(t)$ τέτοιες ώστε να μπορούν να προσεγγιστούν από ακολουθίες διαδικασιών βήματος και για τις οποίες ισχύει $E[\int_a^b \mid f(t) \mid^2 dt] < \infty$ και (β) τον χώρο $L^2$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών δηλαδή των τυχαίων μεταβλητών $\eta$ για τις οποίες ισχύει $E[\eta^2] < \infty$ και να θεωρήσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σαν μία απεικόνιση απο τον χώρο $M^2$ στον χώρο $L^2$. Η απεικόνιση αυτή είναι μία

[1] Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου 1 και παράρτημα του παρόντος κεφαλαίου.

γραμμική απεικόνιση η οποία είναι και μία ισομετρία μεταξύ των δύο χώρων δηλαδή ισχύει

$$\| I(f) \|_{L^2} = \| f \|_{M^2}$$

Με βάση την παραπάνω κατασκευή, το στοχαστικό ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία που ανήκει στον χώρο $M^2$. Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση της συνάρτησης $f(t,\omega)$ που υιοθετήσαμε στον ορισμό του ολοκληρώματος του Itô είναι μία προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας αυτής από μία διαδικασία βήματος, όπου $\eta_j = f(t_j, \omega)$. Μπορούμε να δούμε πως αν $f \in M^2$ τότε και $\eta_j \in L^2$.

### 4.1.2 Ορισμός του ολοκληρώματος Itô : Τεχνικά σημεία

Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε πιο διεξοδικά τα παραπάνω βήματα.

Ας ξεκινήσουμε με μερικούς ορισμούς.

**Ορισμός 4.1.2** *Μία στοχαστική διαδικασία $f$ η οποία μπορεί να γραφεί στην μορφή*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) \tag{4.2}$$

*για κάποια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ του διαστήματος $[a,b]$ όπου $\eta_j$ τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι $\mathcal{F}_{t_j}$ μετρήσιμες και $E[\eta_j^2] < \infty$ ονομάζεται* **διαδικασία βήματος**. *Θα συμβολίζουμε με $M_{step}([a,b])$ το σύνολο των διαδικασιών βήματος στο διάστημα $[a,b]$.*

Θα ορίσουμε τώρα το στοχαστικό ολοκλήρωμα για μία διαδικασία βήματος.

**Ορισμός 4.1.3** *Αν η στοχαστική διαδικασία $f$ είναι διαδικασία βήματος της μορφής της εξίσωσης (4.2) τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της ως προς την κίνηση Brown ορίζεται ως*

$$\int_a^b f(t) dB_t = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \left( B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right)$$

**Παράδειγμα 4.1.2** *Αν $f_{step}$ είναι μία διαδικασία βήματος αποδείξτε ότι ισχύει η ισομετρία του Itô δηλαδή ότι*

$$E[\mid I(f_{step}] \mid^2) := E\left[ \left| \int_a^b f_{step}(t) dB_t \right|^2 \right] = E\left[ \int_a^b \mid f_{step}(t) \mid^2 dt \right]$$

*Η ιδιότητα αυτή όπως είδαμε και παραπάνω είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία*

$f$.

**Απόδειξη:** *Ας θεωρήσουμε την διαδικασία βήματος*

$$f_{step}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

*η οποία όπως είδαμε και πιο πάνω έχει το στοχαστικό ολοκλήρωμα*

$$I(f_{step}) := \int_a^b f_{step}(t)dt \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (Bt_{j+1} - B_{t_j})$$

*Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την μέση τιμή του τετραγώνου της παράστασης αυτής. Έχουμε ότι*

$$\mid I(f_{step}) \mid^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + 2 \sum_{k<j} \eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \eta_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

*όπου απλά χωρίσαμε τους διαγώνιους και τους μη διαγώνιους όρους στο άθροισμα αυτό. Η μεταβολή της κίνησης Brown* $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ *είναι ανεξάρτητη από ότι συνέβει πρίν από την χρονική στιγμή* $t_j$. *Συνεπώς, εφόσον η τυχαία μεταβλητή* $\eta_j$ *είναι* $\mathcal{F}_{t_j}$ *μετρήσιμη, οι τυχαίες μεταβλητές* $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ *και* $\eta_j$ *είναι ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε συνάρτηση των μεταβλητών αυτών. Συνεπώς*

$$E[\eta_j^2 (Bt_{j+1} - B_{t_j})^2] = E[\eta_j^2] E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = E[\eta_j^2](t_{j+1} - t_j)$$

*εφόσον* $E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = (t_{j+1} - t_j)$ *από τις ιδιότητες της κίνησης Brown. Επιπλέον εφόσον* $k < j$ *οι τυχαίες μεταβλητές* $\eta_k$, $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$, $\eta_j$, $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ *είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και συνεπώς*

$$E[\eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \eta_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})] = E[\eta_j (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \eta_k] E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] = 0$$

*εφόσον* $E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] = 0$ *από τις ιδιότητες της κίνησης Brown. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε ότι*

$$E[I(f_{step})] = \sum_{j=0}^{n-1} E[\eta_j^2](t_{j+1} - t_j)$$

*Ο τελευταίος όρος όμως μπορεί πολύ εύκολα να αναγνωριστεί σαν η μέση τιμή του ολοκληρώματος*

$$E\left[\int_a^b \mid f_{step}(t) \mid^2 dt\right] = E\left[\int_a^b \left| \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} \right|^2 dt\right]$$

*Πράγματι, έχουμε ότι*

$$| f_{step} |^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})} + \sum_{k<j} \eta_k \eta_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})} \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1})} = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}$$

*αφού* $\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})} \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1})} = 0$ *για* $k < j$ [2], *από όπου προκύπτει ότι*

$$E\left[\int_a^b | f_{step}(t) |^2 \, dt\right] = E\left[\int_a^b \left|\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}\right|^2 dt\right] = \sum_{j=0}^{n-1} E[\eta_j^2](t_{j+1} - t_j)$$

*Συνεπώς αποδείχθηκε ότι για διαδικασίες βήματος ισχύει η ισομετρία του Itô .* □

Θα ορίσουμε τώρα μία γενικότερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών (όχι αναπαραίτητα διαδικασιών βήματος) για τις οποίες θα μπορέσουμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα.

**Ορισμός 4.1.4** *Μία στοχαστική διαδικασία $f$ λέμε ότι ανήκει στον χώρο $M^2([a,b])$ αν είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \le t)$ και ικανοποιεί την συνθήκη*

$$|| f ||_{M^2([a,b])} := E\left[\int_a^b | f |^2 \, dt\right] < \infty$$

**Σχόλιο:** Πολλές φορές όταν δεν υπάρχει αμφιβολία ως προς το διάστημα το οποίο μας ενδιαφέρει μπορεί να παραλείπουμε την αναφορά του διαστήματος στον ορισμό του χώρου δηλαδή να γράφουμε απλά $M^2$ αντί για $M^2([a,b])$.

Οι στοχαστικές διαδικασίες που ανήκουν στον χώρο $M^2([a,b])$ μπορούν να προσεγγιστούν από διαδικασίες βήματος σύμφωνα με την έννοια που υποδεικνύει το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 4.1.1** *Για κάθε $f \in M^2([a,b])$ υπάρχει μία ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} || f(t) - f_{step,n}(t) ||_{M^2([a,b])} = \lim_{n\to\infty} E\left[\int_a^b | f(t) - f_{step,n}(t) |^2 \, dt\right] = 0$$

**Απόδειξη:** Στην απόδειξη ακολουθούμε το [24]. Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία που ανήκει στο $M^2([a,b])$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία **φραγμένων** στοχαστικών διαδικασιών που ανήκουν στο $M^2([a,b])$. Το δεύτερο βήμα είναι να δείξουμε ότι κάθε φραγμένη στοχαστική διαδικασία που ανήκει στο $M^2([a,b])$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία **φραγμένων και**

[2] Το $t$ δεν μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα και στο διάστημα $[t_j, t_{j+1})$ και στο διάστημα $[t_k, t_{k+1})$ για $k < j$

**συνεχών** στοχαστικών διαδικασιών που ανήκουν στο $M^2([a,b])$. Συνεπώς, μία οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία στο $M^2([a,b])$ μπορεί να προσεγγιστεί (κατά την $L^2$ έννοια) από μία ακολουθία φραγμένων και συνεχών στοχαστικών διαδικασιών του $M^2([a,b])$. Το τρίτο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι μία οποιαδήποτε φραγμένη και συνεχής διαδικασία του $M^2([a,b])$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία διαδικασιών βήματος. Η σύνθεση των τριών αυτών βημάτων οδηγεί στο ζητούμενο. Παραθέτουμε τώρα αναλυτικά τα τρία αυτά βήματα.

- Έστω $f \in M^2([a,b])$. Ορίζουμε την ακολουθία στοχαστικών διαδικασιών $\phi_n(t) = [-n \vee f(t)] \wedge n$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η ακολουθία $\phi_n(t)$ είναι φραγμένη και ότι $\phi_n(t) \in M^2([a,b])$ για κάθε $n$. Επίσης, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = f(t)$. Συνεπώς από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μπορούμε να δούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_a^b \mid f(t) - \phi_n(t) \mid^2 dt\right] = 0$$

- Ας θεωρήσουμε $\phi(t) \in M^2([a,b])$ φραγμένη. Μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία $\psi_n(t)$ κατά τον ακόλουθο τρόπο: Για κάθε $n$ ας θεωρήσουμε $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ μία συνεχή συνάρτηση τέτοια ώστε $\rho_n(t) = 0$ για $t \leq -\frac{1}{n}$ και $t \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t)dt = 1$. Ορίζουμε

$$\psi_n(t) = \int_a^b \rho_n(s-t)\phi(s)ds$$

Η ακολουθία $\psi_n(t)$ είναι μία ακολουθία στοχαστικών διαδικασιών επειδή η $\phi(s)$ είναι και αυτή μία στοχαστική διαδικασία. Το ολοκλήρωμα συνέλιξης που ορίζει την $\psi_n$ είναι ένα τυπικό ολοκλήρωμα Riemann. Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος και λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\psi(t)$ είναι φραγμένη καταλήγουμε στο ότι η ακολουθία $\psi_n(t)$ αποτελείται από **συνεχείς** συναρτήσεις και είναι **φραγμένη**. Επίσης ανήκει στο $M^2([a,b])$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_a^b \mid f(t) - \phi_n(t) \mid^2 dt\right] = 0$$

- Τέλος αν $\psi(t) \in M^2([a,b])$ και είναι φραγμένη και συνεχής μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ ως εξής:

$$f_{step,n}(t) = \psi(a)\mathbf{1}_{[a,a+\frac{b-a}{n}]}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \psi\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\mathbf{1}_{(a+i\frac{b-a}{n},a+(i+1)\frac{b-a}{n}]}(t)$$

Η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη. Χρησιμοποιώντας και πάλι το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης μπορούμε να καταλήξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_a^b \mid \psi(t) - f_{step,n}(t) \mid^2 dt\right] = 0$$

- Με την σύνθεση των τριών παραπάνω βημάτων και την χρήση της τριγωνικής ανισότητας καταλήγουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_a^b \mid f(t) - f_{step,n}(t) \mid^2 dt\right] = 0$$

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Σχόλιο:** Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα όχι μόνο μας δείχνει την δυνατότητα να προσεγγίσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες που ανήκουν στο $M^2([a,b])$ με μία ακολουθία διαδικασιών βήματος αλλά είναι και κατασκευαστικό, δηλαδή μας δείχνει και τον τρόπο να γίνει αυτή η προσέγγιση. Φυσικά ο τρόπος που προτείνει το παραάνω θεώρημα δεν είναι και ο μοναδικός.

**Παράδειγμα 4.1.3 Παράδειγμα διαμέρισεως και προσέγγισεως.** *Μία εύλογη ερώτηση είναι ποιά θα μπορούσε να είναι η επιλογή της διαμέρισης $t_j$. Το παραπάνω θεώρημα δίνει κάποιες ιδέες οι οποίες φυσικά δεν είναι και μοναδικές. Δίνουμε εδώ ένα παράδειγμα τέτοιας επιλογής.*

*Αν το αρχικό διάστημα είναι το $[0,T]$ μία πιθανή επιλογή διαμέρισης μπορεί να είναι η $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_j^n < ... < t_n^n = T$, $j = 0,...,n$ με $t_j^n = \frac{jT}{n}$ Μία πιθανή προσέγγιση της στοχαστικης διαδικασίας $f(t,\omega)$, στο διάστημα $[0,T]$, χρησιμοποιώντας την διαμέριση αυτή μπορεί να είναι η ακολουθία από διαδικασίες βήματος*

$$f_{step,n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j,\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

*Αν η στοχαστική διαδικασία $f(t,\omega)$ είναι συνεχής σ.β. στην μεταβλητή $t$ μπορούμε να δείξουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \mid\mid f - f_{step,n} \mid\mid_{M^2} := \lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T \mid f - f_{step,n} \mid^2 dt\right] = 0$$

*δηλαδή ότι η ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ προσεγγίζει την στοχαστική διαδικασία $f$. Η διαμέριση αυτή και η προσέγγιση αυτή είναι η συνήθης προσέγγιση που ακολουθούμε στον υπολογισμό στοχαστικών ολοκληρωμάτων κατά Itô. Αν για παράδειγμα $f(t,\omega) = B_t^2$ τότε μία πιθανή προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας $f$ από διαδικασίες βήματος είναι η*

$$f_{step,n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} B^2_{\frac{jT}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{jT}{n},\frac{(j+1)T}{n})}(t),$$

*ή ισοδύναμα*

$$f_{step,n}(t) = B^2_{\frac{jT}{n}}, \ \ \text{αν} \ \ t \in [\frac{jT}{n}, \frac{(j+1)T}{n}) \ \ j = 0,...,n-1.$$

Έχοντας τώρα προσεγγίσει μία οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([a,b])$ με μία ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ και εφόσον το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο για μία στοχαστική διαδικασία βήματος μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Itô με τον ακόλουθο τρόπο

**Ορισμός 4.1.5** *Έστω $f \in M^2([a,b])$. Το ολοκλήρωμα Itô της $f$ ορίζεται σαν το ακόλουθο όριο*

$$I(f) := \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} I(f_{step,n}) := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_{step,n}(t)dB_t$$

*οπου $f_{step,n}$ είναι μία ακολουθία διαδικασιών βήματος που προσεγγίζουν κατά $L^2$ την $f$ και τα ολοκληρώματα $\int_a^b f_{step,n}(t)dB_t := I(f_{step,n})$ ορίζονται σύμφωνα με τον ορισμό 4.1.3.*

Για να έχει νόημα ο παραπάνω ορισμός θα πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $I(f_{step,n}) := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_{step,n}(t)dB_t$ συγκλίνει. Αυτό είναι και το βασικό αποτέλεσμα το παρακάτω θεωρήματος.

**Θεώρημα 4.1.2** *Έστω $f \in M^2([a,b])$ και $f_{step,n}$ μία ακολουθία διαδικασιών βήματος η οποία προσεγγίζει κατά $L^2$ την $f$. Τότε η ακολουθία $I(f_{step,n}) = \int_a^b f_{step,n}(t)dB_t$ όπου το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô έχει οριστεί σύμφωνα με τον ορισμό 4.1.3 συγκλίνει καθώς το $n \to \infty$ σε μία τυχαία μεταβλητή είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (δηλαδή ανήκει στον χώρο $L^2$).*

**Απόδειξη:** Λόγω των ιδιοτήτων του χώρου $L^2$ (πληρότητα) αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $r_n := I(f_{step,n})$ είναι μία ακολουθία Cauchy δηλαδή ότι ισχύει

$$\| r_n - r_m \|_{L^2} := E[| r_n - r_m |^2] \to 0 \,\text{καθώς}\; n,m \to \infty.$$

Στο παραπάνω υπενθυμίζουμε ότι με τον συμβολισμό $\| \, \|_{L^2}$ συμβολίζουμε την νόρμα του χώρου τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών $L^2$ η οποία και ορίζεται σύμφωνα με την σχέση $\| \eta \|_{L^2} := E[\eta^2]$ για κάθε $\eta \in L^2$. Για να δείξουμε την ιδιότητα Cauchy για την ακολουθία $r_n$ θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η ακολουθία $f_{step,n}$ προσεγγίζει κατά $L^2$ την $f$ δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_a^b [f(t) - f_{step,n}(t) \,|^2 \, dt\right] = 0$$

και την εξαιρετικά χρήσιμη ιδιότητα του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô για διαδικασίες βήματος σύμφωνα με την οποία

$$E\left[\left|\int_a^b f_{step,n}(t)dB_t\right|^2\right] = E\left[|f_{step,n}(t)|^2 dt\right]$$

Η ιδιότητα αυτή που συνδέει την μέση τιμή του τετραγώνου του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô μίας διαδικασίας βήματος με την μέση τιμή του ολοκληρώματος Riemann του τετραγώνου της διαδικασίας αποδείχθηκε στο παράδειγμα 4.1.2. Τέλος θα χρειαστούμε την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Itô για διαδικασίες βήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned}
E[\mid r_n - r_m \mid^2] &= E\left[\left|\int_a^b f_{step,n}(t)dt - \int_a^b f_{step,m}(t)dt\right|^2\right] \\
&= E\left[\left|\int_a^b (f_{step,n}(t) - f_{step,m}(t))dt\right|^2\right] \\
&= E\left[\int_a^b \mid f_{step,n}(t) - f_{step,m}(t) \mid^2 dt\right] \\
&= E\left[\int_a^b \mid f_{step,n}(t) - f(t) + f(t) - f_{step,m}(t) \mid^2 dt\right] \\
&\leq E\left[\int_a^b \mid f_{step,n}(t) - f(t) \mid^2 dt\right] + E\left[\int_a^b \mid f_{step,m}(t) - f(t) \mid^2 dt\right]
\end{aligned}$$

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Itô για διαδικασίες βήματος, την ισομετρία του Itô για διαδικασίες βήματος και την τριγωνική ανισότητα. Λόγω του ότι η $f_{step,n}(t)$ προσεγγίζει κατά $L^2$ την $f(t)$ βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης τείνει στο 0 καθώς $m \to \infty$ και $n \to \infty$. Συνεπώς αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

**Σχόλιο:** Η ιδιότητα της πληρότητας του χώρου $L^2$ αποτελεί ένα βασικό αποτέλεσμα της συναρτησιακής ανάλυσης. Η απόδειξη της ιδιότητας της πληρότητας του $L^2$, η οποία ήταν απαραίτητη στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, παρατίθεται στο παράρτημα του κεφαλαίου.

**Παράδειγμα 4.1.4** *Υπολογίστε με την βοήθεια του ορισμού το στοχαστικό ολοκλήρωμα*

$$I(1) := \int_0^T dB_t$$

*Η υπό ολοκλήρωση στοχαστική διαδικασία είναι η* $f(t,\omega) = 1$. *θα πάρουμε την διαμέριση* $0 < t_1^n < t_2^n < ... < t_n^n = T$, $t_j^n = \frac{jT}{n}$ *και την προσέγγιση της κατά ολοκλήρωση στοχαστικής διαδικασίας* $f_{step,n} = \sum_{j=0}^n \mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}$. *Παίρνουμε λοιπόν την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $I(f_{step,n}) = \sum_{j=0}^{n-1} 1(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) = B_T$ *το όριο της οποίας κατά* $L^2$ *θα είναι και το στοχαστικό ολοκλήρωμα που ζητάμε. Είναι προφανές ότι το* $L^2$ *όριο της ποσότητας αυτής είναι η ίδια η τυχαία μεταβλητή* $B_T - B_0 = B_T$ *συνεπώς*

$$I(1) = \int_0^T dB_t = B_T$$

**Παράδειγμα 4.1.5** *Αποδείξτε με την βοήθεια του ορισμού ότι ισχύει*

$$I(B_t) = \int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{T}{2}$$

*Η υπό ολοκλήρωση στοχαστική διαδικασία είναι η* $f(t,\omega) = B_t$. *θα πάρουμε την διαμέριση* $0 < t_1^n < t_2^n < ... < t_n^n = T$, $t_j^n = \frac{jT}{n}$ *και την προσέγγιση της κατά ολοκλήρωση στοχαστικής διαδικασίας*

$$f_{step,n}(t) = \sum_{j=0}^{n} B_{t_j^n} \mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}(t).$$

*Παίρνουμε λοιπόν την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών*

$$I(f_{step,n}) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j^n}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}),$$

*το όριο της οποίας κατά* $L^2$ *θα είναι και το στοχαστικό ολοκλήρωμα που ζητάμε. Για να υπολογίσουμε το όριο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα*

$$a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$$

*με την επιλογή* $a = B_{t_j^n}$, $b = B_{t_{j+1}^n}$. *Έχουμε λοιπόν*

$$B_{t_j^n}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) = \frac{1}{2}(B_{t_{j+1}^n}^2 - B_{t_j^n}^2) - \frac{1}{2}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2$$

*Αθροίζοντας επάνω σε όλα τα* $j$ *από* $j = 0$ *ως το* $j = n-1$ *βλέπουμε ότι*

$$I(f_{step,n}) = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2$$

*Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το* $L^2$ *όριο της τυχαίας μεταβλητής* $\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})$. *Ισχυριζόμαστε ότι το όριο αυτό είναι ίσο με* $\frac{1}{2}T$. *Πράγματι,*

$$E\left[\left|\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) - \frac{1}{2}T\right|^2\right] = 0$$

*καθώς* $n \to \infty$. *Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει μετά από κάποιες πράξεις, χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των μεταβολών της κίνησης Brown και τις ιδιότητες*

$$E[B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}] = 0,\ E[(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2] = \frac{T}{n},\ E[(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^4] = \frac{3T^2}{n^2}$$

*Συνεπώς ολοκληρώσαμε τον υπολογισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος.*

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Itô έχει διαφορετικές ιδιότητες από το ολοκλήρωμα κατά Riemann το οποίο έχουμε δει την Πραγματική Ανάλυση μέχρι σήμερα. Αυτό φαίνεται από το ότι

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \underbrace{\frac{1}{2}T}$$

Ο όρος που είναι υπογραμμισμένος είναι ένας όρος τον οποίο δεν θα περιμέναμε αν το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα κατά Riemann[3]. Ο όρος αυτός οφείλεται στις ιδιότητες και τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô και στο ότι η διαδικασία επάνω στην οποία γίνεται η ολοκλήρωση είναι η κίνηση Brown. Δεν θα θελαμε να μπούμε πολύ βαθιά στις λεπομέρειες της ανάλυσης αλλά θέλουμε να τονίσουμε εδώ ότι, οι παθολογικές ιδιότητες της κίνησης Brown και πιο ειδικά το ότι δεν έχει φραγμένη μεταβολή (bounded variation) δεν επιτρέπουν τον ορισμό ενός ολοκληρώματος κατά Riemann επάνω στην κίνηση Brown αλλά επιβάλλουν τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος όπως αυτό έγινε εδώ. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στην παράγραφο 4.7

Επίσης, όπως φαίνεται από το παραπάνω παράδειγμα, ο υπολογισμός ενός στοχαστικού ολοκληρώματος από τον ορισμό δεν είναι ιδιαίτερα απλή διαδικασία. Θα δούμε στην συνέχεια ένα αποτέλεσμα, το λήμμα του Itô , το οποίο μας επιτρέπει εύκολα τον υπολογισμό ορισμένων στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

### 4.1.3 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô

**Θεώρημα 4.1.3** *Το ολοκλήρωμα Itô έχει τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες*

*(1) Είναι γραμμικό, δηλαδή για δύο στοχαστικές διαδικασίες $f_1$ και $f_2$ ισχύει $I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2)$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*

*(2) $E\left[\int_a^b f dB_t\right] = 0$*

*(3) $E\left[\left|\int_a^b f(t,\omega)dB_t\right|^2\right] = E\left[\int_a^b \mid f(t,\omega)\mid^2 dt\right]$*
*Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται η ισομετρία του Itô*

*Σε όλα τα παραπάνω θεωρούμε ότι η συνάρτηση την οποία ολοκληρώνουμε ανήκει στον κατάλληλο χώρο $M^2$.*

**Απόδειξη:** Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών ξεκινάνε με την απόδειξη της ιδιότητας για την αντίστοιχη ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ που προσεγγίζουν την $f$ και μετά με το πέρασμα στο όριο $n \to \infty$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση. □

[3] Αν $f(t)$ ήταν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του $t$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^T f(t)df(t) = \int_0^T f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}(f(T)^2 - f(0)^2)$.

Έχοντας σαν βάση τις τρείς αυτές ιδιότητες μπορούμε να αποδείξουμε και άλλες χρήσιμες ιδιότητες για το ολοκλήρωμα του Itô.

**Παράδειγμα 4.1.6** *Αποδείξτε ότι για κάθε* $f, g \in M^2$ *ισχύει ότι*

$$E[I(f)I(g)] = E\left[\int_0^T f(t)dB_t \int_0^T g(t)dB_t\right] = E\left[\int_0^T f(t)g(t)dt\right]$$

**Απόδειξη:** *Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα*

$$a\,b = \frac{1}{4}(| a+b |^2 - | a-b |^2)$$

*όπου* $a = I(f)$ *και* $b = I(g)$. *Αντικαθιστώντας και παίρνοντας την μέση τιμή έχουμε ότι*

$$E[I(f)I(g)] = \frac{1}{4}(E[| I(f)+I(g) |^2] - E[| I(f)-I(g) |^2]) = \frac{1}{4}(E[| I(f+g) |^2] - E[| I(f-g) |^2])$$

*όπου ήδη χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα του στοχαστικού ολοκληρώματος. Όμως*

$$E[| I(f+g) |^2] = E\left[\int_0^T | f+g |^2 \, dt\right]$$

*από την ιδιότητα της ισομετρίας του Itô και ομοίως*

$$E[| I(f-g) |^2] = E\left[\int_0^T | f-g |^2 \, dt\right]$$

*Αντικαθιστώντας αυτά στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι*

$$E[I(f)I(g)] = E\left[\int_0^T \frac{1}{4}(| f+g |^2 - | f-g |^2)dt\right] = E\left[\int_0^T f(t)g(t)dt\right]$$

*και έτσι το ζητούμενο αποδείχθηκε.* □

## 4.2 Το ολοκλήρωμα Itô σαν στοχαστική διαδικασία

### 4.2.1 Ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας $\int_0^t f(t)dB_t$ και οι ιδιότητες της

Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε και είδαμε τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô όταν τα όρια της ολοκλήρωσης $a$ και $b$ ήταν δεδομένα. Θα θεωρήσουμε τώρα ότι ενώ το κάτω όριο της ολοκλήρωσης παραμένει σταθερό, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να το θέσουμε $a = 0$, επιτρέπουμε το επάνω όριο της ολοκλήρωσης να μεταβάλλεται και να είναι $b = t$.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t)dB_t$ όπου $0 \leq t \leq T$. Για κάθε τιμή του $t$ το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται όπως και παραπάνω αρκεί η στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0,T])$. Συνεπώς με την παραπάνω κατασκευή, για κάθε τιμή του $t$ παίρνουμε μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και η τιμή της είναι ίση με το ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t)dB_t$. Άρα κατασκευάζουμε μία στοχαστική διαδικασία

$$I_t := \int_0^t f(t)dB_t$$

Η στοχαστική αυτή διαδικασία ονομάζεται το **αόριστο ολοκλήρωμα του Itô**. Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία, ισοδύναμα μπορεί να οριστεί σαν το στοχαστικό ολοκλήρωμα από 0 ως το $T$ της $f(t)\mathbf{1}_{[0,t]}$ δηλαδή

$$\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^T f(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)dB_s \tag{4.3}$$

Με βάση τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να δείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες για την στοχαστική διαδικασία $I_t$.

**Θεώρημα 4.2.1** *Έστω $f \in M^2([0,T])$, $0 \leq t \leq T$ και*

$$I_t = \int_0^t f(s)dB_s$$

*Ισχύουν τα ακόλουθα:*
*(i) Η στοχαστική διαδικασία $I_t$ είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale.*
*(ii) Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της $I_t$ είναι*

$$< I >_t = \int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds$$

**Απόδειξη:** $(i)$ Για να αποδείξουμε ότι η $I_t$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ισομετρία του Itô και το ότι $f \in M^2([0,T])$. Μπορούμε επίσης εύκολα να δούμε ότι η $I_t$ είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$, από τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος. Μένει να δείξουμε ότι $E[I_t \mid \mathcal{F}_s] = I_s$, $0 \leq s \leq t \leq T$. Για να δειχθεί αυτό αρκεί να προσέξουμε οτι

$$I_t = I_s + \int_s^t f(t')dB_{t'}$$

και να θυμηθούμε ότι λόγω της ανεξαρτησίας του $\int_s^t f(t')dB_{t'}$ από την $\mathcal{F}_s$

$$E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'} \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'}\right] = 0$$

Για να πάρουμε το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα 4.1.3. Συνεπώς από τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι

$$E[I_t \mid \mathcal{F}_s] = E[I_s \mid \mathcal{F}_s] + E\left[\int_s^t f(t^{'})dB_{t'} \middle| \mathcal{F}_s\right] = I_s.$$

Επομένως η $I_t$ είναι martingale.
$(ii)$ Για να δείξουμε ότι η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της $I_t$ είναι η $< I >_t = \int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds$ αρκεί να δείξουμε ότι η $M_t = I_t^2 - < I >_t$ είναι μία συνεχής martingale που μηδενίζεται στο $t = 0$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
E[M_t \mid \mathcal{F}_s] &= E\left[I_t^2 - \int_0^t \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(I_s + \int_s^t f(t^{'})dB_{t'})^2 - \int_0^s \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'} - \int_s^t \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= I_s^2 - \int_0^s \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'} + 2I_s E\left[\int_s^t f(t^{'})dB_{t'} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&+ E\left[\left|\int_s^t f(t^{'})dB_{t'}\right|^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - E\left[\int_s^t \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'} \mid \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Itô βλέπουμε ότι

$$E\left[\int_s^t f(t^{'})dB_{t'} \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$$

και

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\int_s^t f(t^{'})dB_{t'}\right|^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\left|\int_s^t f(t^{'})dB_{t'}\right|^2\right] \\
= E\left[\int_s^t \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'}\right] &= E\left[\int_s^t \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'} \mid \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι

$$E\left[I_t^2 - \int_0^t \mid f(t^{'} \mid^2 dt^{'} \mid \mathcal{F}_s\right] = I_s^2 - \int_0^s \mid f(t^{'}) \mid^2 dt^{'}$$

και από τον ορισμό της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μία martingale αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Η τελευταία γενίκευση που χρειαζόμαστε είναι ο ορισμός του αόριστου στοχαστικού ολοκληρώματος όταν το πάνω όριο είναι ένας χρόνος στάσης. Η γενίκευση αυτή είναι αναμενόμενη αφού το $I_t$ είναι μία martingale και ήδη έχουμε δει αρκετές ενδιαφέρουσες ιδιότητες σχετικά με τις martingale και τους χρόνους στάσης.

Για τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος με όρια χρόνους στάσης θα χρησιμοποιήσουμε την δείκτρια συνάρτηση του στοχαστικού διαστήματος $[0,\tau]$ όπου $\tau$ είναι κάποιος χρόνος στάσης. Η δείκτρια συνάρτηση είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. Αυτό είναι εύκολο να αποδειχθεί αν κανείς εξετάσει την αντίστροφη εικόνα της $\mathbf{1}_{[0,\tau]}$ η οποία μπορεί να δειχθεί ότι αποτελείται από υποσύνολα του $\Omega$ που ανήκουν στην $\mathcal{F}_t$. Συνεπώς, η $\mathbf{1}_{[0,\tau]}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$ και όπως είναι εύκολο να δούμε φραγμένη και δεξιά συνεχής. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα με όρια το 0 και τον χρόνο στάσης $\tau$ σε αναλογία με τον τρόπο ορισμού του στοχαστικού ολοκληρώματος με ντετερμινιστικά όρια 0 και $t$ που δίνεται στην εξίσωση (4.3)

$$\int_0^\tau f(t)dB_t := \int_0^T f(t)\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)dB_t := I_\tau$$

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να επεκταθεί και όταν τόσο το αριστερό όσο και το δεξιό όριο ολοκλήρωσης είναι χρόνοι στάσης. Συγκεκριμένα αν $\tau_1$, $\tau_2$ είναι δύο χρόνοι στάσης ώς προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$ τέτοιοι ώστε $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ τότε

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t := \int_0^{\tau_2} f(t)dB_t - \int_0^{\tau_1} f(t)dB_t := I_{\tau_2} - I_{\tau_1}$$

Έχοντας υπόψην τους παραπάνω ορισμούς, καθώς και τις ιδιότητες martingale του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να καταλήξουμε σε μία σειρά από χρήσιμα συμπεράσματα κάνοντας χρήση του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης. Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα.

**Παράδειγμα 4.2.1** *Αν $\tau_1$, $\tau_2$ είναι δύο χρόνοι στάσης ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ τέτοιοι ώστε $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ υπολογίστε την υπό συνθήκη μέση τιμή $E[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t \mid \mathcal{F}_{\tau_1}]$.*

*Γνωρίζουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $I_t$ είναι martingale οπότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιλεκτικής στάσης[4] έχουμε ότι $E[I_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = I_{\tau_1}$. Συνεπώς,*

$$\begin{aligned} E\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] &= E[I_{\tau_2} - I_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = E[I_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] - E[I_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \\ &= I_{\tau_1} - I_{\tau_1} = 0 \end{aligned}$$

*Στον υπολογισμό του όρου $E[I_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}]$ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή $I_{\tau_1}$ είναι $\mathcal{F}_{\tau_1}-$μετρήσιμη.*

**Παράδειγμα 4.2.2** *Αν $\tau_1$, $\tau_2$ είναι δύο χρόνοι στάσης ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ τέτοιοι ώστε $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ υπολογίστε την υπό συνθήκη μέση τιμή $E[\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t\right|^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_1}]$.*

[4] Θυμηθείτε ότι ο $\tau_2$ είναι ένας φραγμένος χρονος στάσης

*Έχουμε ότι*

$$E\left[\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t\right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = E[|I_{\tau_2} - I_{\tau_1}|^2 \,|\mathcal{F}_{\tau_1}]$$
$$= E[I_{\tau_2}^2 - 2I_{\tau_1}I_{\tau_2} + I_{\tau_1}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = E[I_{\tau_2}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] - I_{\tau_1}^2$$

*Θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τον όρο* $E[I_{\tau_2}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_1}]$. *Παρόλο που η στοχαστική διαδικασία* $I_t$ *είναι martingale η* $I_t^2$ *δεν είναι. Η διαδικασία* $I_t^2 - < I >_t$ *όμως είναι μία martingale. Συνεπώς*

$$E[I_{\tau_2}^2 - < I >_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = I_{\tau_1}^2 - < I >_{\tau_1}$$

*όπου* $< I >_\tau = \int_0^\tau \mid f(t) \mid^2 dt$. *Χρησιμοποιώντας το παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε ότι*

$$E\left[\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t\right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = E\left[< I >_{\tau_2} - < I >_{\tau_1} |\mathcal{F}_{\tau_1}\right] = E\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mid f(t) \mid^2 dt |\mathcal{F}_{\tau_1}\right]$$

**Παράδειγμα 4.2.3** *Ας θεωρήσουμε* $B_t$ *μία κίνηση Brown ως προς μία διήθηση* $\mathcal{F}_t$ *και ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία* $\tilde{B}_t$ *η οποία ορίζεται από το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô*

$$\tilde{B}_t := \int_0^t sign(B_r)dB_r$$

*Με βάση τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Itô και το θεώρημα του Levy μπορούμε να δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία* $\tilde{B}_t$ *είναι μία κίνηση Brown ως προς την διήθηση* $\mathcal{F}_t$.

*Πράγματι, από τον ορισμό της, η* $\tilde{B}_t$ *είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση* $\mathcal{F}_t$. *Επίσης, εφόσον μπορεί να εκφραστεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô, σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.1 η στοχαστική διαδικασία* $\tilde{B}_t$ *είναι μία martingale. Για την εφαρμογή του θεωρήματος του Levy αρκεί να αποδείξουμε ότι και η στοχαστική διαδικασία* $Z_t := \tilde{B}_t^2 - t$ *είναι μία martingale. Έχουμε ότι*

$$E[Z_t \mid \mathcal{F}_s] = E[\bar{B}_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = E\left[\left(\int_0^t sign(B_r)dB_r\right)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s\right]$$
$$= E\left[\left(\int_0^s sign(B_r)dB_r - \int_s^t sign(B_r)dB_r\right)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s\right]$$
$$= \left(\int_0^s sign(B_r)dB_r\right)^2 + E\left[\left(\int_s^t sign(B_r)dB_r\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] +$$
$$2\left(\int_0^s sign(B_r)dB_r\right) E\left[\int_s^t sign(B_r)dB_r \middle| \mathcal{F}_s\right] - t$$
$$= \left(\int_0^s sign(B_r)dB_r\right)^2 + (t-s) - 0 - t = Z_s$$

*οπότε και η $Z_t$ είναι martingale. Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα του Levy η $\bar{B}_t$ είναι κίνηση Brown.*

### 4.2.2 Ανισότητες σχετικά με το ολοκλήρωμα Itô

Θα κλείσουμε την παρουσίαση του ολοκληρώματος Itô αναφέροντας ορισμένες σημαντικές ανισότητες που ισχύουν για το ολοκλήρωμα Itô. Η απόδειξη των ανισοτήτων αυτών είναι τεχνική και χρησιμοποιεί το λήμμα του Itô το οποίο θα δούμε στην επόμενη παράγραφο. Η απόδειξη τους παρατίθεται στο παράρτημα του κεφαλαίου αυτού για τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται για πιο θεωρητικά θέματα.

**Θεώρημα 4.2.2 Ανισότητα Burkholder-Davis-Gundy** *Έστω $f \in M^2([0,T])$. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία*

$$X_t = \int_0^t f(r) dB_r$$

*Τότε για κάθε $p > 0$ υπάρχουν σταθερές $c_p$ και $C_p$ που εξαρτώνται μόνο από το $p$ τέτοιες ώστε*

$$c_p E\left[\left|\int_0^t \mid f(r) \mid^2 dr\right|^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s f(r)dB_r\right|^p\right] \leq C_p E\left[\left|\int_0^t \mid f(r) \mid^2 dr\right|^{\frac{p}{2}}\right]$$

*για κάθε $t \geq 0$.*

**Απόδειξη:** Βλέπε παράρτημα του κεφαλαίου. □

Αρκετά χρήσιμη είναι και η ακόλουθη εκθετική ανισότητα.

**Θεώρημα 4.2.3** *Έστω $g \in L^2$ και έστω $T, a, b$ θετικοί αριθμοί. Τότε ισχύει*

$$P \sup_{0\leq t\leq T}\left[\int_0^t g(s)dB_s - \frac{a}{2}\int_0^t \mid g(s) \mid^2 ds\right] > b\Big) \leq e^{-ab}$$

**Απόδειξη:** Βλέπε παράρτημα του κεφαλαίου. □

## 4.3 Διαδικασίες Itô και το λήμμα του Itô

Στις παραγράφους αυτές θα εισάγουμε μία νέα κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών οι οποίες έχουν σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά, τις διαδικασίες Itô, και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν. Η σημαντικότερη από αυτές δίνεται από το λήμμα του Itô το οποίο χαρακτηρίζει τις ιδιότητες των διαδικασιών του Itô κάτω από αλλαγή μεταβλητών.

### 4.3.1 Διαδικασίες Itô

Κάνοντας χρήση του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô μπορούμε να ορίσουμε μία νέα κατηγορία γενικότερων στοχαστικών διαδικασιών από την κίνηση Brown, τις διαδικασίες του Itô.

**Ορισμός 4.3.1** *Μία διαδικασία Itô είναι μία στοχαστική διαδικασία $X_t$ της μορφής*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s$$

*όπου οι $u$ και $v$ ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$\int_0^t v^2(s,\omega)ds < \infty \;\; \sigma.\beta., \qquad \int_0^t u(s,\omega)ds < \infty \;\; \sigma.\beta.$$

*Η διαδικασία αυτή μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή*

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Βλέπουμε από τον παραπάνω ορισμό ότι μία διαδικασία Itô μπορεί να διασπαστεί σε δύο μέρη: Τον όρο $M_t := \int_0^t vdB_t$ που είναι μία martingale και τον όρο $A_t := \int_0^t uds$ που είναι μία διαδικασία πεπερασμένης μεταβολής. Μπορεί να δειχθεί (βλ. και παράγραφο 4.7) ότι

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_j \mid \Delta A_j \mid = \int_0^t \mid u(s) \mid ds$$

ενώ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_j \mid \Delta M_j \mid^2 = \int_0^t \mid v(s) \mid^2 ds$$

όπου το τελευταίο όριο είναι όριο στον $L^2$. Η διάσπαση αυτή σχετίζεται με την αποσύνθεση Doob-Meyer και μας δείχνει ότι εν γένει μία διαδικασία Itô είναι ένα παράδειγμα ενός semimartingale.

**Παράδειγμα 4.3.1** *Μία μονοδιάστατη κίνηση Brown με ταχύτητα $m$ είναι μία διαδικασία Itô. Πραγματικά έχουμε για την διαδικασία αυτή ότι $X_t = x_0 + m\,t + B_t$ η οποία ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως*

$$X_t = x_0 + \int_0^t mds + \int_0^t dB_s$$

*η σε διαφορική μορφή*

$$dX_t = m\,dt + dB_t$$

**Παράδειγμα 4.3.2 Ένα μοντέλο για τις τιμές των μετοχών με την μορφή μίας διαδικασίας Itô**
*Η στοχαστική διαδικασία*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s$$

*όπου οι $\mu(t)$ και $\sigma(t)$ ικανοποιούν τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού είναι μία διαδικασία Itô. Σε διαφορική μορφή η διαδικασία αυτή γράφεται ως*

$$dX_t = \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right) dt + \sigma(t)\, dB_t$$

*Αν θέσουμε $X_t = \ln S_t$ τότε (όπως θα δούμε και παρακάτω κάνοντας χρήση του λήμματος του Itô) η $S_t$ είναι και αυτή μία διαδικασία Itô, η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη χρηματοοικονομική για την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών. Αν τα $\mu$ και $\sigma$ είναι σταθερές, η $S_t$ ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown.*

**Παράδειγμα 4.3.3 Ένα μοντέλο για τα επιτόκια με την μορφή μίας διαδικασίας Itô**
*Η στοχαστική διαδικασία $X_t$*

$$X_t = X_0 + a\mu \int_0^t e^{as} ds + \sigma \int_0^t e^{as}\, dB_s$$

*είναι μία διαδικασία Itô η οποία μπορεί να γραφεί και σε διαφορική μορφή ως*

$$dX_t = a\mu e^{at} dt + \sigma e^{at} dB_t$$

*Αν θέσουμε $X_t = e^{at} r_t$ τότε όπως θα δούμε και παρακάτω από το λήμμα του Itô η $r_t$ είναι και αυτή μία διαδικασία Itô η οποία ονομάζεται διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck που επιστρέφει προς την μέση τιμή (mean reverting Ornstein-Uhlenbeck process) . Ο λόγος που παίρνει αυτό το όνομα είναι ο ακόλουθος: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Itô μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή του $r_t$. Πράγματι*

$$E[r_t] = e^{-at} X_0 + \mu(1 - e^{-at}) \to \mu, \quad \text{καθώς} \quad t \to \infty$$

*Η μέση τιμή εξαρτάται από τον χρόνο και για μεγάλους χρόνους τείνει στην τιμή $\mu$. Επίσης κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος του Itô μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση της $r_t$ η οποία είναι*

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

*Η διαδικασία αυτή βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά σαν μοντέλο για την χρονική εξέλιξη των επιτοκίων.*

**Παράδειγμα 4.3.4** *Μία διαδικασία Itô $X_t$ της μορφής*

$$dX_t = u\,dt + v\,dB_t$$

*είναι μία martingale αν και μόνο αν $u = 0$ σ.β.*

*Ένας τρόπος να φανεί αυτό είναι παίρνοντας την μέση τιμή της $X_t$. Αν η $X_t$ είναι martingale, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô μπορούμε να δούμε οτι για κάθε $t$ ισχύει $E[\int_0^t u(s)ds] = 0$. Συνεπώς πρέπει να ισχύει και $\int_0^t u(s)ds = 0$ σ.β. για κάθε $t$, οπότε και $u = 0$ σ.β.[5]. Μία εναλλακτική απόδειξη μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση του θεωρήματος αναπαράστασης των martingale (βλ. παράγραφο 4.6) και την μοναδικότητα των συντελεστών μίας διαδικασίας Itô[6].*

### 4.3.2 Ο τύπος του Itô

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τι μορφή έχει μία συνάρτηση μίας διαδικασίας Itô, δηλαδή αν θα είναι και αυτή με την σειρά της μία διαδικασία Itô και αν ναι ποιά θα είναι η ακριβή της μορφή σαν το άθροισμα ενός ολοκληρώματος Riemann και ενός ολοκληρώματος Itô.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το περίφημο Λήμμα του Itô, το οποίο μας προσφέρει έναν κανόνα αλλαγής μεταβλητών τροποποιημένο κατάλληλα ώστε να ισχύει για στοχαστικά ολοκληρώματα.

**Θεώρημα 4.3.1 ( Το λήμμα του Itô )** *Θεωρούμε ότι η $X_t$ είναι μία διαδικασία Itô η οποία μπορεί να εκφραστεί ως*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s.$$

*Τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της $X_t$ της μορφής $g(t,x) \in C^{1,2}$ μπορεί να εκφραστεί επίσης σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής*

$$g(t,X_t) = g(0,X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) ds + \int_0^t v\frac{\partial g}{\partial x}dB_s$$

*Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί και σε ισοδύναμη διαφορική μορφή:*

$$dg(t,X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) dt + v\frac{\partial g}{\partial x}dB_t$$

*Με $C^{1,2}$ συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων $g(t,x)$ που έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο ως προς την πρώτη μεταβλητή και συνεχή δεύτερη παράγωγο ως προς την δεύτερη μεταβλητή.*

[5] Για μία πιο αυστηρή διατύπωση του επιχειρήματος αυτού παραπέμπουμε στο [28] Θεώρημα 1.26, σελ. 31

[6] Για την μοναδικότητα των συντελεστών μίας διαδικασίας Itô βλ. το κεφάλαιο 5

**Σχόλιο:** Στα παραπάνω έχει χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος συμβολισμός:

$$\frac{\partial g}{\partial s} := \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s), \ \ u\frac{\partial g}{\partial x} := u(s, X_s)\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s), \quad \text{κλπ}$$

δηλαδή η μερική παράγωγος της $g$ ώς προς το πρώτο όρισμα (χρόνος) υπολογισμένη στα $t = s$ και $x = X_s$, η μερική παράγωγος της $g$ ως προς το δεύτερο όρισμα (θέση) υπολογισμένη στα $t = s$ και $x = X_s$ και πολλαπλασιασμένη με την συνάρτηση $u$ υπολογισμένη και αυτή στα $t = s$ και $x = X_s$ κλπ.

**Μνημονικός κανόνας για το Λήμμα του Itô:** Αν $Y_t = g(t, X_t)$ τότε

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dX_t)^2$$

όπου υπολογίζοντας τις δυνάμεις των διαφορικών χρησιμοποιούμε τον κανόνα

$$\begin{aligned} dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt &= 0 \\ dB_t \cdot dB_t &= dt. \end{aligned}$$

**Απόδειξη του λήμματος του Itô:** Δεν θα δώσουμε εδώ την πλήρη απόδειξη του λήμματος του Itô αλλά θα συνοψίσουμε τα βασικά βήματα της.
Ας πάρουμε την διαμέριση $t_j^n = \frac{jt}{n}$ του διαστήματος $[0, t]$ και ας γράψουμε

$$\begin{aligned} g(t, X_t) - g(0, X_0) &= \sum_{j=0}^{n-1}[g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n})] = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\underbrace{g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n})} - \sum_{j=0}^{n-1}\underbrace{g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n})} \end{aligned}$$

Η πρώτη ομάδα υπογραμμισμένων όρων αποτελείται από όρους οι οποίοι είναι υπολογισμένοι για την ίδια τιμή της διαδικασίας Itô αλλά για διαφορετικούς χρόνους. Στην πρώτη ομάδα όρων συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση κατά Taylor την μεταβλητή του χρόνου. Η δεύτερη ομάδα όρων αποτελείται από όρους που είναι υπολογισμένοι για την ίδια τιμή του χρόνου αλλά για διαφορετικές τιμές του $X$. Στην δεύτερη ομάδα όρων συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε ανάλυση κατά Taylor στην μεταβλητή $X$. Θα χρησιμοποιήσουμε τις συντομεύσεις $\Delta t_j = t_{j+1}^n - t_j^n$ και $\Delta X_j = X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n}$.

- Taylor κατά $t$: Υπάρχει $\bar{t}_j \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$ τέτοιο ώστε

  $$g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) = \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_j, X_{t_{j+1}^n})\Delta t_j$$

  Χρησιμοποιώντας την συνέχεια των παραγώγων ως προς $t$ της συνάρτησης $g$ μπορούμε να δείξουμε ότι

  $$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_j, X_{t_{j+1}^n})\Delta t_j = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s)ds \ \sigma.\beta.$$

- Taylor κατά $x$: Υπάρχει$\bar{X}_j \in [X_{t_j^n}, X_{t_{j+1}^n}]$ τέτοιο ώστε

$$g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n}) = \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n})\Delta X_j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j)\Delta X_j^2$$

Η δεύτερη αυτή ομάδα όρων απαιτεί λίγο πιο περίπλοκη μεταχείριση. Συγκεκριμένα, θα προσεγγίσουμε τις μεταβολές της διαδικασίας Itô ως εξής

$$\Delta X_j = u(\bar{t}_j, \omega)\Delta t_j + v(\bar{t}_j, \omega)\Delta B_j$$

όπου $\Delta B_j = B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}$ και σαν $\bar{t}_j$ μπορούμε να επιλέξουμε $\bar{t}_j = t_j^n$. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή στο ανάπτυγμα Taylor κατά $x$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n}) &= \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n})u(\bar{t}_j, \omega)\Delta t_j + \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n})u(\bar{t}_j, \omega)\Delta B_j \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j)v(\bar{t}_j, \omega)^2\Delta B_j^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j)u(\bar{t}_j, \omega)\Delta t_j^2} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j)u(\bar{t}_j, \omega)v(\bar{t}_j, \omega)\Delta t_j \Delta B_j} \end{aligned}$$

Το άθροισμα επάνω στην διαμέριση (από $j=0$ εως $j=n-1$) των δύο τελευταίων (υπογραμμισμένων όρων) μπορεί να αποδειχθεί ότι τείνει στο 0 κατά $L^2$ καθώς $n \to \infty$. Από τους όρους που παραμένουν μπορούμε να δούμε ότι

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n})u(\bar{t}_j, \omega)\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)u(s, X_s)ds, \text{ καθώς } n \to \infty$$

και

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n})u(\bar{t}_j, \omega)\Delta B_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s, X_s)dB_s, \text{ καθώς } n \to \infty$$

όπου το όριο λαμβάνεται πάντοτε στον $L^2$. Ο τελευταίος όρος που παραμένει πρέπει να γραφεί στην μορφή

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j)v(\bar{t}_j, \omega)^2\Delta B_j^2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n})v(t_j^n, \omega)^2\Delta t_j \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n})v(t_j^n, \omega)^2(\Delta B_j^2 - \Delta t_j) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j)\right. \\ &- \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n})v^2\Delta B_j^2\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Το άθροισμα των προτελευταίων όρων επάνω στην διαμέριση μηδενίζεται εφόσον το όριο στον $L^2$ των όρων $\Delta B_j^2 - \Delta t_j$ είναι 0 και το άθροισμα των τελευταίων όρων μηδενίζεται λόγω της συνέχειας των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης $g$ ως προς $x$. Το άθροισμα των πρώτων όρων στο όριο δίνει

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(t_j^n, \omega)^2 \Delta t_j \to \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v(s,\omega)^2 dt$$

Αυτό και ολοκληρώνει το σχέδιο της απόδειξης. Τονίζεται ότι οι λεπτομέρειες που αφήσαμε δεν είναι τετριμένες και χρειάζονται λίγη ακόμα δουλειά την οποία αφήνουμε σαν άσκηση στους πιο μαθηματικά προσανατολισμένους από τους αναγνώστες. □

Θέλουμε να τονισουμε τα ακόλουθα σημεία:
(1) Το Λήμμα του Itô είναι ίσως ένα από τα πλέον σημαντικά αποτελέσματα της στοχαστικής ανάλυσης, το οποίο αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο σε οποιαδήποτε εφαρμογή. Η κατανόηση του και η δυνατότητα να το εφαρμόσουμε είναι απαραίτητη. Στην παράγραφο 4.5 δίνονται μία σειρά από παραδείγματα εφαρμογής του Λήμματος του Itô τόσο σε γενικές εφαρμογές όσο και στα οικονομικά.
(2) Το Λήμμα του Itô εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που το $t$ είναι ένας χρόνος στάσης ο οποίος είναι φραγμένος. Η μορφή αυτή του Λήμματος του Itô μπορεί να μας φανεί χρήσιμη σε μία πληθώρα εφαρμογών.
(3) Υπάρχουν γενικεύσεις του Λήμματος του Itô και για συναρτήσεις που ικανοποιούν ασθενέστερες συνθήκες από το να είναι $C^{1,2}$.

## 4.4 Διαδικασίες Itô σε πολλές διαστάσεις

Θα ασχοληθούμε τώρα με την γενίκευση της έννοιας της διαδικασίας Itô και των ιδιοτήτων τους σε παραπάνω από μία διάσταση, δηλαδή όταν η κίνηση Brown η οποία χρησιμοποιείται ως ολοκληρωτής είναι πολυδιάστατη και η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι πιθανόν μία διανυσματική συνάρτηση.

### 4.4.1 Το ολοκλήρωμα Itô επάνω σε μία πολυδιάστατη κίνηση Brown

Θα ξεκινήσουμε με την γενίκευση του ολοκληρώματος του Itô επάνω σε μία πολυδιάστατη κίνηση Brown .

**Ορισμός 4.4.1** *Ας θεωρήσουμε $B_t = (B_{1,t}, ..., B_{d,t})^T$ μία $d-$διάστατη κίνηση Brown και $f \in \mathbb{R}^{n\times d}$ μία οικογένεια από προσαρμοσμένες στοχαστικές διαδικασίες στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ οι οποίες παίρνουν τιμές στον χώρο των πινάκων $n \times d$. Ισοδύναμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f = \{f_{ij}\}$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., d$ όπου $f_{ij} \in \mathbb{R}$ μονοδιάστατες στοχαστικές διαδικασίες που είναι προσαρμοσμένες στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Το (αόριστο) στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô $\int_0^t f dB_s$ είναι η στοχαστική διαδικασία $I_t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (διάνυσμα* *στήλη διάστασης n) το οποίο έχει την μορφή* $I_t = (I_{1,t}, ..., I_{n,t})^T$ *όπου*

$$I_{i,t} = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f_{ij} dB_{j,s}, \quad i = 1, ..., n$$

*και* $\int_0^t f_{ij} dB_{j,s}$, *είναι το μονοδιάστατο ολοκλήρωμα Itô που ορίσαμε προηγουμένως.*

**Σχόλιο:** Ο παραπάνω ορισμός είναι αρκετά φυσικός αφού μπορούμε να γράφουμε

$$\int_0^t f dB_s = \int_0^t \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_{1,s} \\ \vdots \\ dB_{d,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f_{1j} dB_{j,s} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f_{nj} dB_{j,s} \end{pmatrix}$$

Η γενίκευση για το πολυδιάστατο ολοκλήρωμα όταν τα όρια είναι χρόνοι στάσης, ή γενικότερα για το ορισμένο πολυδάστατο στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι προφανής.

Το πολυδιάστατο ολοκλήρωμα του Itô ικανοποιεί ιδιότητες οι οποίες είναι πολύ σχετικές με τις ιδιότητες του μονοδιάστατου ολοκλήρώματος. Μάλιστα οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχθούν κάνοντας χρήση των αντιστοίχων ιδιοτήτων του μονοδιάστατου ολοκληρώματος.

### 4.4.2 Πολυδιάστατες διαδικασίες Itô

Έχοντας σαν βάση την γενίκευση του ολοκληρώματος του Itô επάνω σε πολυδιάστατες κινήσεις Brown μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια των πολυδιάστατων διαδικασιών Itô.

Θα ξεκινήσουμε πρώτα με την γενίκευση της έννοιας της διαδικασίας του Itô όταν η κίνηση Brown ως προς την οποία γίνεται η ολοκλήρωση είναι πολυδιάστατη.

**Ορισμός 4.4.2** *Η* $X_t$ *είναι μία μονοδιάστατη διαδικασία Itô αν*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\, ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t v_i(s,\omega) dB_{i,s}$$

*όπου οι* $u$ *και* $v_i$ *είναι προσαρμοσμένες στις* $\mathcal{F}_t$ *για κάθε* $i$ *και ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$\int_0^T |\ u(s,\omega)\ |\ ds < \infty, \qquad \int_0^T |\ u_i(s,\omega)\ |^2\ ds < \infty \ \ \sigma.\beta.\ \ 1 \leq i \leq d.$$

*Σε διαφορική μορφή αυτό μπορεί να γραφεί σαν*

$$dX_t = u(t,\omega)dt + \sum_{i=1}^{d} v_i(s,\omega) dB_{i,t}$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια της $n-$διάστατης διαδικασίας Itô

**Ορισμός 4.4.3 $n-$διάστατη διαδικασία Itô :** *Μία $n-$διάστατη διαδικασία Itô είναι μία στοχαστική διαδικασία $X_t = (X_{1,t}, ..., X_{n,t})$ όπου η κάθε συνιστώσα είναι μία διαδικασία Itô με την έννοια που ορίστηκε πιο πάνω. Πιο συγκεκριμένα μία $n-$διάστατη διαδικασία Itô είναι μία στοχαστική διαδικασία της μορφής $X_t = (X_{1,t}, ..., X_{n,t})^T$ όπου*

$$X_{i,t} = X_{i,0} + \int_0^t u_i(s,\omega)ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t v_{ij}(s,\omega)\, dB_{j,s}$$

Δίνουμε μερικά παραδείγματα πολυδιάστατων διαδικασιών Itô.

**Παράδειγμα 4.4.1** *Η πιό απλή πολυδιάστατη διαδικασία Itô είναι μία $n-$διάστατη κίνηση Brown $B_t = (B_{1,t}, ..., B_{n,t})^T$.*

**Παράδειγμα 4.4.2 Μοντέλα πολλών παραγόντων για τις τιμές των χρεογράφων** *Ένα παράδειγμα πολυδιάστατης διαδικασίας Itô είναι η διαδικασία των τιμών περισσότερων του ενός χρεογράφων, τα οποία επηρεάζονται από κοινούς στοχαστικούς παράγοντες της οικονομίας (π.χ. διάφορα μακροοικονομικά μεγέθη). Θα δώσουμε εδώ ένα μοντέλο δύο χρεογράφων και δύο παραγόντων της οικονομίας. Έστω $S_{1,t}, S_{2,t}$ οι τιμές των χρεογράφων $1, 2$ την χρονική στιγμή $t$. Οι λογάριθμοι των τιμών ακολουθούν την πολυδιάστατη διαδικασία Itô*

$$\begin{aligned} d(lnS_{1,t}) &= \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) dt + \sigma_1 dB_{1,t} \\ d(lnS_{2,t}) &= \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) dt + \rho\sigma_2 dB_{1,t} + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 dB_{2,t} \end{aligned}$$

*Στο παραπάνω μοντέλο θεωρούμε ότι οι στοχαστικοί παράγοντες της οικονομίας μπορεί να προσομοιωθούν με δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown. Οι παράγοντες αυτοί επηρεάζουν τις τιμές και των δύο χρεογράφων, με κάποιο συντελεστή συσχέτισης $\rho$. Οι παράγοντες $\mu_1, \mu_2$ είναι οι συντελεστές ολίσθησης (drift coefficients) των χρεογράφων ενώ οι συντελεστές $\sigma_1, \sigma_2$ είναι οι συντελεστές πτητικότητας (volatility) των χρεογράφων. Οι ερμηνείες των συντελεστών αυτών μπορεί να γίνουν πιο καθαρές αν δούμε την ισοδύναμη μορφή του παραπάνω μοντέλου*

$$\begin{aligned} dS_{1,t} &= S_{1,t}(\mu_1 dt + \sigma_1 dB_{1,t}) \\ dS_{2,t} &= S_{2,t}(\mu_2 dt + \rho\sigma_2 dB_{1,t} + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 dB_{2,t}) \end{aligned}$$

*Η ισοδυναμία των δύο αυτών μορφών θα γίνει σαφής στην επόμενη παράγραφο όπου θα εισάγουμε τον πολυδιάστατο τύπο του Itô.*

### 4.4.3 Ο τύπος του Itô σε περισσότερες διαστάσεις

Ο τύπος του Itô μπορεί να γενικευθεί σε περισσότερες διαστάσεις. Αν $X_t = (X_{1,t}, ..., X_{n,t})$ και

$$dX_{1,t} = u_1 dt + v_{11} dB_{1,t} + ... + v_{1d} dB_{d,t}$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ dX_{n,t} &= u_n dt + v_{n1} dB_{1,t} + \dots + v_{nd} dB_{d,t} \end{aligned}$$

και $g(t,x)$ είναι μία $C^{1,2}$ συνάρτηση[7] $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, τότε η στοχαστική διαδικασία $Y(t,\omega) = g(t, X_t)$ είναι μία διαδικασία Itô με διαφορική μορφή

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} dX_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dX_{i,t} dX_{j,t}$$

όπου χρησιμοποιούμε τους κανόνες

$$dB_{i,t} dB_{j,t} = \delta_{ij} dt, \quad dB_{i,t} dt = dt dB_{i,t} = 0 \tag{4.5}$$

Μετά από κάποιες πράξεις μπορούμε να καταλήξουμε στην μορφή

$$dY_t = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} u_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} v_{ji} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial x_j} v_{jk} dB_{k,t}$$

Η παραπάνω μορφή μπορεί να γραφεί και σε πιο συμπαγή μορφή χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό με πίνακες και διανύσματα ως εξής

$$dY_t = g_t dt + g_x dX_t + \frac{1}{2} dX^T g_{xx} dX_t$$

ή μετά τις απαραίτητες πράξεις

$$dY_t = \left( g_t + g_x u + \frac{1}{2} trace(v^T g_{xx} v) \right) dt + g_x v dB_t$$

όπου $g_t := \frac{\partial g}{\partial t}$, με $g_x$ συμβολίζουμε το διάνυσμα που αποτελείται από τις μερικές παραγώγους της $g$ ως προς τις συνιστώσες $x_j$ του διανύσματος $x$,

$$g_x = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right),$$

με $g_{xx}$ συμβολίζουμε τον πίνακα των δεύτερων παραγώγων της $g$ ως προς τις συνιστώσες του $x$,

$$[g_{xx}]_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$$

και $u$ και $v$ είναι το διάνυσμα των ταχυτήτων και ο πίνακας των συντελεστών διάχυσης αντίστοιχα.

Η απόδειξη του τύπου του Itô σε παραπάνω της μίας διάστασης γίνεται με παρόμοιο τρόπο με την απόδειξη του τύπου του Itô για την μία διάσταση και

[7] Η συνάρτηση $g$ πρέπει να είναι $C^2$ (δηλαδή να έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης) στην μεταβλητή $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $C^1$ (δηλαδή να έχει συνεχή παράγωγο πρώτης τάξης) στην μεταβλητή $t$.

αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

**Σχόλιο:** Θα συμβουλεύαμε, τουλάχιστον στην αρχή, τους αναγνώστες όταν θέλουν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο του Itø, τόσο στην μία όσο και στις περισσότερες διαστάσεις, να ξεκινάνε από την συμπαγή μορφή του αναπτύγματος Taylor και μετά να σχηματίζουνε τα γινόμενα $dX_i dX_j$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες της άλγεβρας και τους μνημονικούς κανόνες σχετικά με τα γινόμενα $dB_i dB_j$. Έτσι, ελαχιστοποιούνται τα περιθώρια σφάλματος.

## 4.5 Παραδείγματα της χρήσης του τύπου του Itô

### 4.5.1 Γενικά παραδείγματα.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα της εφαρμογής του τύπου του Itô.

Μία σημαντική εφαρμογή του τύπου του Itô είναι στον υπολογισμό στοχαστικών ολοκληρωμάτων

**Παράδειγμα 4.5.1** *Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Itô στην συνάρτηση $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$ για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^t B_s dB_s$.*
*Έστω $Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Itô στην συνάρτηση αυτή βρίσκουμε ότι*

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t dt = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t$$

*έτσι ώστε*

$$I = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

*Ο δεύτερος όρος καθιστά φανερό ότι το ολοκλήρωμα του Itô διαφέρει από τα συνήθη ολοκληρώματα!*

Ο τύπος του Itô ισχύει γενικά και στην περίπτωση που η διαδικασία Itô από την οποία ξεκινάμε δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή δηλαδή αν είναι της μορφής $dX_t = b(Z_t, t, \omega)dt + \sigma(Z_t, t, \omega)dB_t$ όπου $Z_t$ είναι και αυτή μία διαδικασία Itô. Στην περίπτωση αυτή βέβαια η $Y_t = f(X_t)$ θα είναι μία διαδικασία Itô της οποίας οι συντελεστές θα εξαρτώνται και από την $Z_t$ μέσω της εξάρτησης των συντελεστών $b, \sigma$ από αυτή. Μία ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση είναι η περίπτωση $Z_t = X_t$.Τότε λέμε ότι η $X_t$ είναι η λύση μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στο επόμενο κεφάλαιο.

**Παράδειγμα 4.5.2** *Έστω $X_t$ μία διαδικασία Itô που μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή ως $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$. Τότε η $Y_t = \ln(X_t)$ είναι μία διαδικασία Itô με διαφορική μορφή*

$$dY_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\,dt + \sigma dB_t$$

*δηλαδή είναι ανεξάρτητη του $Y_t$!*

**Παράδειγμα 4.5.3** *Ας θεωρήσουμε το δεύτερο μοντέλο για την τιμή των χρεογράφων με δύο στοχαστικούς παράγοντες για την οικονομία που διατυπώσαμε στο παράδειγμα 4.4.2. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Itô για τις συναρτήσεις* $f_1(S_1) = \ln(S_1)$ *και* $f_2(S_2) = \ln(S_2)$ *μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι οι λογάριθμοι των τιμών των χρεογράφων είναι πολυδιάστατες διαδικασίες Itô που περιγράφονται από το πρώτο μοντέλο του παραδείγματος 4.4.2. Πράγματι έχουμε ότι*

$$d(ln(S_{i,t}) = \frac{1}{S_{i,t}} dS_{i,t} - \frac{1}{2}\frac{1}{S_{i,t}^2}(dS_{i,t})^2, \; i = 1, 2 \tag{4.6}$$

*Οι τετραγωνικοί όροι μπορεί να υπολογιστούν κάνοντας χρήση των εξισώσεων του δεύτερου μοντέλου. Χρησιμοποιώντας τον μνημονικό κανόνα για την εφαρμογή του λήμματος του Itô σε παραπάνω της μίας διάστασης έχουμε ότι*

$$(dS_{1,t})^2 = S_{1,t}^2(\mu_1^2 dt^2 + \sigma_1^2(dB_{1,t})^2 + 2\sigma_1\mu_1 dt dB_{1,t}) = \sigma_1^2 S_{1,t}^2 dt$$

*και*

$$\begin{aligned} (dS_{2,t})^2 &= S_{2,t}^2 \Big(\mu_2^2 dt^2 + 2\rho\sigma_2\mu_2 dt dB_{1,t} + 2\mu_2\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} dt dB_{2,t} \\ &+ \rho\sigma_2^2\sqrt{1-\rho^2} dB_{1,t} dB_{2,t} + \rho^2\sigma^2(dB_{1,t})^2 + (1-\rho^2)\sigma_2^2(dB_{2,t})^2\Big) \\ &= S_{2,t}^2\left(\rho^2\sigma_2^2 dt + (1-\rho^2)\sigma_2^2 dt\right) = \sigma^2 S_{2,t}^2 dt \end{aligned}$$

*Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στις εξισώσεις (4.6) καταλήγουμε στο πρώτο μοντέλο που παραθέσαμε στο παράδειγμα 4.4.2.*

**Παράδειγμα 4.5.4 Η κίνηση Brown στον μοναδιαίο κύκλο** *Έστω* $B_t$ *μία κίνηση Brown και ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία* $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})^T = (\cos(B_t), \sin(B_t))^T$. *Παρατηρούμε ότι* $X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2 = 1$ *για κάθε* $t$ *συνεπώς η στοχαστική διαδικασία αυτή είναι μία κίνηση Brown επάνω στον μοναδιαίο κυκλο* $S^1$. *Χρησιμοποιώντας το πολυδιάστατο λήμμα του Itô είναι εύκολο να αποδείξουμε, μετά από λίγη άλγεβρα, ότι η στοχαστική διαδικασία* $X_t$ *είναι και αυτή μία πολυδιάστατη διαδικασία Itô η οποία έχει την διαφορική μορφή*

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= -\frac{1}{2}X_{1,t}dt - X_{2,t}dB_t \\ dX_{2,t} &= -\frac{1}{2}X_{2,t}dt + X_{1,t}dB_t \end{aligned}$$

*ή σε πιο συμπαγή μορφή με την χρήση πινάκων*

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + KX_t dB_t$$

*όπου*

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Σημειώστε ότι η διαφορική μορφή που δίνουμε για αυτή την διαδικασία Itô περιλαμβάνει στοχαστικά ολοκληρώματα της διαδικασίας αυτής επάνω στην κίνηση Brown. Αυτό μπορεί να φαίνεται παράξενο αλλά ας το δεχθούμε μέχρι να εισάγουμε την έννοια της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης στο επόμενο κεφάλαιο.*

**Παράδειγμα 4.5.5** *Έστω $B = (B_{1,t}, B_{2,t}, ..., B_{N,t})$ μία $N-$διάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0. Ορίστε την διαδικασία $R_t =\mid B \mid := (B_{1,t}^2 + ... + B_{N,t}^2)^{1/2}$, όπου $| \, . \, |$ συμβολίζει την Ευκλείδια απόσταση στο $\mathbb{R}^N$. Εφαρμόστε τον τύπο του Itô σε περισσότερες διαστάσεις για να βρείτε την διαφορική μορφή του $R_t$. Η $R_t$ ονομάζεται διαδικασία του Bessel και βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην μελέτη ορισμένων τύπων παραγώγων συμβολαίων στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.*

*Θα εφαρμόσουμε το πολυδιάστατο λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(x_1, ..., x_N) = (x_1^2 + ... + x_N^2)^{1/2}$ στην οποία θα θέσουμε $x_i = B_{i,t}$, $i = 1, ..., N$. Μετά από λίγο άλγεβρα βρίσκουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{(x_1^2 + ... + x_N^2)^{1/2}} = \frac{x_i}{R} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{x_i x_j}{(x_1^2 + ... + x_N^2)^{1/2}} = -\frac{x_i x_j}{R}, \ i \neq j \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^N x_j^2}{R^3}
\end{aligned}$$

*Λαμβάνοντας υπόψην ότι στον τύπο του Itô θεωρούμε ότι $(dB_{i,t})^2 = t, i = 1, ..., N$ και $dB_{i,t}dB_{j,t} = 0, i \neq j$ καταλήγουμε ότι*

$$dR_t = \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t} dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + ... + B_{N,t}^2}} + \frac{(N-1)}{2} \frac{1}{\sqrt{B_{1,t}^2 + ... + B_{N,t}^2}} dt \tag{4.7}$$

*όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{j=1, j\neq i}^N x_j^2 = (N-1) \sum_{i=1}^N x_i^2 = (N-1) R^2$$

Η εξίσωση (4.7) μας εξασφαλίζει ότι η στοχαστική διαδικασία $R_t$ (διαδικασία Bessel) είναι μία διαδικασία Itô. Κάνοντας όμως χρήση του θεωρήματος του Levy μπορούμε να φέρουμε την παραπάνω εξίσωση σε πιο απλή μορφή. Αυτό μπορεί να γίνει αν παρατηρήσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία

$$\bar{B}_t := \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t} dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + ... + B_{N,t}^2}}$$

είναι μία κίνηση Brown. Πράγματι κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος του Itô βλέπουμε ότι

$$E[\bar{B}_t] = E\left[\int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t} dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + ... + B_{N,t}^2}}\right] = 0$$

και ότι

$$\begin{aligned} E[\bar{B}_t^2 - t] &= E\left[\left(\int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t} dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + ... + B_{N,t}^2}}\right)^2 - t\right] \\ &= \int_0^t E\left[\frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t}^2}{B_{1,t}^2 + ... B_{N,t}^2} dt\right] - t = t - t = 0 \end{aligned}$$

από τα οποία μπορούμε, με την χρήση του θεωρήματος του Levy, να καταλήξουμε στο ότι η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown. Συνεπώς, η διαδικασία Bessel μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στην μορφή

$$dR_t = d\bar{B}_t + \frac{(N-1)}{2}\frac{1}{R_t}dt$$

όπου φυσικά και πάλι είναι στην μορφή μίας διαδικασίας Itô.

**Παράδειγμα 4.5.6 Ολοκλήρωση κατά μέρη** *Δείξτε οτι αν $X_t$, $Y_t$ είναι διαδικασίες Itô τότε*

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + dX_t\, dY_t$$

*ή ισοδύναμα σε ολοκληρωτική μορφή*

$$\int_0^t X_s\, dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s\, dX_s - \int_0^t dX_s\, dY_s$$

*Για να δειχθεί αυτό αρκεί να εφαρμόσουμε τον τύπο του Itô για την συνάρτηση $f(x,y) = xy$ και να θέσουμε $x = X_t$ και $y = Y_t$. Στην συνέχεια μπορεί να απλοποιήσουμε την έκφραση $dX_t\, dY_t$ κάνοντας χρήση των κανόνων που χρησιμοποιούμε για τον τύπο του Itô, δηλαδή τους κανόνες που περιγράψαμε στην εξίσωση (4.5).*

*Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση όπου η $X_t$ είναι μία διαδικασία Itô και η $Y_t$ είναι της μορφής $dY_t = a dt$. Τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι*

$$\int_0^t X_s\, dY_s = \int_0^t X_s\, a\, ds = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s\, dX_s$$

*Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση όπου η $Y_t$ είναι μία διαδικασία πεπερασμένης μεταβολής, με τις κατάλληλες αλλαγές. Το ολοκλήρωμα επάνω στην $Y$ θα πρέπει να εννοείται σαν το ολοκλήρωμα Stieltjes (βλ. παράγραφο 4.7).*

**Παράδειγμα 4.5.7 Μία ειδική περίπτωση του τύπου του Dynkin** *Ο τύπος του Itô δεν ισχύει μόνο για ντετερμινιστικούς χρόνους αλλά και για χρόνους στάσης! Χρησιμοποιώντας την πληροφορία αυτή δείξτε ότι αν $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ και $\tau$ είναι ένας χρόνος στάσης για τον οποίο ισχύει $E^x[\tau] < \infty$ τότε*

$$E^x[f(B_\tau)] = f(x) + E^x\left[\int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{d^2 f(X_s)}{dx^2} ds\right]$$

*όπου $B_t$ είναι μία κίνηση Brown. Ο τύπος αυτός μπορεί να γενικευθεί για οποιαδήποτε διαδικασία Itô και σε οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων.*

**Απόδειξη:** *Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô στην $f(B_t)$ και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^t f'(B_s)dB_s$ είναι μία martingale. Το σημείο που χρειάζεται λίγο προσοχή είναι στο να δείξουμε ότι*

$$E\left[\int_0^\tau \frac{df}{dx}(B_s)dB_s\right] = 0$$

*Ο λόγος που το σημείο αυτό είναι λεπτό είναι παρόμοιος με τους λόγους που αναφέραμε στην συζήτηση του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης. Έτσι, θα γραψουμε*

$$E\left[\int_0^{\tau\wedge t} \frac{df}{dx}(B_s)dB_s\right] = 0$$

*και θα πάρουμε το όριο $t \to \infty$ προσπαθώντας να αιτιολογήσουμε την εναλλαγή του ορίου με την μέση τιμή. Το βήμα αυτό αφήνεται ως άσκηση.*□

### 4.5.2 Παραδείγματα της χρήσης του τύπου του Itô στην οικονομική: Περιθώριο διακυμάνσεως ισοτιμιών

Οι σταθερές ισοτιμίες παρουσιάζουν διακυμάνσεις εντός πεπερασμένων ζωνών οι οποίες ονομάζονται περιθώρια διακυμάνσεως ισοτιμιών. Επί παραδείγματι τις μέρες που υπήρχε το gold standard η τιμή του χρυσού παρουσίαζε διακυμάνσεις μεταξύ των αποκαλούμενων χρυσών σημείων (gold points ). Στην περίπτωση του συστήματος του Bretton Woods τα όρια ήταν $\pm 1\%$ γύρω από την ισοτιμία του δολαρίου και στην περίπτωση του μηχανισμού ισοτιμιών συναλλάγματος ($ERM$) του Ευρωπαϊκού νομισματικού συστήματος (πριν την κατάρευση του 1993) τα όρια ήταν $\pm 2.25\%$ γύρω από μία κεντρική ισοτιμία. Ένα μοντέλο για τα περιθώρια των διακυμάνσεων ισοτιμιών οφείλεται στον Paul Krugman (1991). Υποθέτουμε ότι η ισοτιμία συναλλάγματος, όπως και η τιμή κάθε άλλου χρεογράφου, εξαρτάται από ορισμένα τρέχοντα θεμελιώδη και από την αναμενόμενη τιμή (μέση τιμή) των μελλοντικών τιμών της συναλλαγματικής ισοτιμίας δηλαδή

$$s = f + a\frac{E[ds]}{dt} \tag{4.8}$$

όπου $s$ είναι ο λογάριθμος της συναλλαγματικής ισοτιμίας, $f$ ο λογάριθμος των θεμελιωδών, $E\left[\frac{ds}{dt}\right]$ η αναμενόμενη υποτίμηση της συναλλαγματικής ισοτιμίας και $a$ μία σταθερά.

Το θεμελιώδες αποτελείται από δύο συνιστώσες

$$f = m + v$$

όπου $m_t$ είναι ο λογάριθμος της προσφοράς του χρήματος που ελέγχεται από την κεντρική τράπεζα και $u_t$ είναι ο λογάριθμός της ταχύτητας κυκλοφορίας του χρήματος που είναι μία στοχαστική μεταβλητή έξω από τον έλεγχο της κεντρικής τράπεζας. Ελέγχοντας την προσφορά του χρήματος η κεντρική τράπεζα ελέγχει το $f_t$ και με τον τρόπο αυτό και την συναλλαγματική ισοτιμία. Ο σκοπός της με αυτό είναι να κρατήσει το $s$ εντός μίας καθορισμένης ζώνης (καθορισμένου περιθωρίου).Η ζώνη αυτή καθορίζεται από την σχέση

$$s_{min} \leq s \leq s_{max}$$

όπου $s_{min}$ είναι το κάτω φράγμα των διακυμάνσεων των συναλλαγματικών ισοτιμιών και $s_{max}$ είναι το άνω φράγμα.

Το μοντέλο του Krugman βασίζεται επάνω σε τρείς υποθέσεις:

1. Τα περιθώρια των διακυμάνσεων συναλλαγματικών ισοτιμιών είναι απόλυτα πιστευτά. Αυτό σημαίνει ότι οι παίκτες πιστεύουν ότι τα άκρα της ζώνης θα παραμείνουν σταθερά για πάντοτε.

2. Τα περιθώρια των ισοτιμιών 'προστατεύονται' μόνο με οριακές παρεμβάσεις. Αυτό σημαίνει ότι η συναλλαγματική ισοτιμία αφήνεται να μεταβάλλεται ελεύθερα μέσα στην ζώνη των διακυμάνσεων. Όταν όμως η συναλλαγματική ισοτιμία φτάνει στο άνω όριο (και συνεπώς το τοπικό νόμισμα υποτιμάται) η κεντρική τράπεζα αγοράζει το τοπικό νόμισμα προσφέροντας ξένο συνάλλαγμα. Συνεπώς η προσφορά του χρήματος ελαττώνεται και έτσι αποφεύγεται η περαιτέρω υποτίμηση του τοπικού νομίσματος. Το αντίθετο συμβαίνει όταν φτάσουμε στο κάτω όριο.

3. Ό όρος της ταχύτητας $v_t$ είναι μία κίνηση Brown με ταχύτητα $\mu$ και διακύμανση $\sigma^2$,

$$dv = \mu dt + \sigma dB_t$$

   Ο Krugman υποθέτει ότι $\mu = 0$. Η υποθέση ότι η $v_t$ είναι μία κίνηση Brown συνεπάγεται ότι οι ελεύθερες συναλλαγματικές ισοτιμίες θα είναι επίσης κίνηση Brown [8].

Οι υποθέσεις 1,2 και 3 μας επιτρέπουν να εκφράσουμε την συναλλαγματική ισοτιμία σαν μία συνάρτηση των θεμελιωδών δηλαδή να γράψουμε

$$s = \phi(f)$$

[8] Σημειώνουμε ότι μέσα στην ζώνη δεν υπάρχει καμία παρέμβαση από τις αρχές στην αγορά συναλλαγματικών ισοτιμιών έτσι ώστε $m = 0$. Από την υπόθεση ότι η $v$ ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο, δεν θα πρέπει να υπάρχει προβλέψιμη αλλαγή την συναλλαγματική ισοτιμία έτσι ώστε $E\left[\frac{ds}{dt}\right] = 0$. Συνεπώς η εξίσωση (4.8) γίνεται $s = v$ η οποία είναι και η εξίσωση για τις συναλλαγές εντός της ζώνης.

όπου η $f$ περιορίζεται στο διάστημα $f_{min} \leq f \leq f_{max}$ που αντιστοιχεί στην ζώνη συναλλαγματικών ισοτιμιών.

Ορίσαμε λοιπόν την ισορροπία σαν μία σχέση μεταξύ των θεμελιωδών μεγεθών $m$ και $v$ και της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Αυτό μαθηματικά γράφεται

$$s = g(m, v, s_{min}, s_{max}) \tag{4.9}$$

Η παραπάνω σχέση θα πρέπει να είναι συνεπής με την σχέση (4.8). Θα μπορούμε να ορίσουμε το $s = g$ βρίσκοντας μία οικογένεια τέτοιων καμπυλών.

Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε το $m$ σταθερό και ας πάρουμε την περίπτωση που το $s$ βρίσκεται εντός της ζώνης. Τότε η μόνη πηγή αναμενόμενων αλλαγών του $s$ είναι λόγω των τυχαίων μεταβολών το $v$.

Χρησιμοποιώντας τους συνήθεις κανόνες του λογισμού του Itô μπορούμε να βρούμε το $ds$ (εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô στην (4.9) και παίρνουμε

$$\frac{E[ds]}{dt} = \frac{\sigma^2}{2} g_{vv}(m, v, s_{min}, s_{max})$$

όπου με $g_{vv}$ συμβολίζουμε την δεύτερη μερική παράγωγο της $g$ ως προς την μεταβλητή $v$. Αντικαθιστώντας αυτό στην (4.8) παίρνουμε

$$g(m, v, s_{min}, s_{max}) = m + v + \frac{\sigma^2}{2} g_{vv}(m, v, s_{min}, s_{max})$$

Μπορούμε τώρα να χειριστούμε την παραπάνω σχέση σαν μία συνήθη διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας μπορεί να μας δώσει το $g$. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$g(m, v, s_{min}, s_{max}) = m + v + A \exp(\rho v) + B \exp(-\rho v)$$

όπου $\rho = (\frac{2}{\gamma \sigma^2})^{1/2}$ και $A$, $B$ είναι σταθερές που θα καθοριστούν ως εξής: Λόγω συμμετρίας αναμένουμε η καμπύλη να περνά από το σημείο $s = 0$ όταν $v = 0$ και $m = 0$. Η συνθήκη αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο όταν $A = -B$. Με την επιλογή αυτή παίρνουμε ότι η $s$ είναι μία σιγμοειδής καμπύλη ως προς το $v$ και οι τιμές του $s$ τείνουν σε μία σταθερή τιμή για αρκετά μεγάλα $v$. Η τιμή του $A$ μπορεί να καθοριστεί από την συνθήκη η καμπύλη του $s$ να είναι εφαπτομενική στην οριακή της τιμή. Αν $\bar{s}$ είναι η τιμή του $s$ στην οποία το $v$ φτάνει την κορυφή της περιοχής που της επιτρέπεται, μαθηματικά η συνθήκη αυτή μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \bar{v} + 2\,A\,sinh(\rho \bar{v}) \\ 0 &= 1 + 2\rho\,A\,cosh(\rho \bar{v}) \end{aligned}$$

από τις οποίες μπορούμε να λύσουμε ως προς $A$ και $\bar{v}$.

Ο Krugman χρησιμοποιεί το μοντέλο αυτό για την μελέτη διαφόρων προβλημάτων που σχετίζονται με τα target zones όπως π.χ. την επίδραση του στην ευστάθεια των αγορών κ.α. Για λεπτομέρειες σχετικά με το μοντέλο παραπέμπουμε στα [11] και [20].

## 4.6 Το θεώρημα αναπαράστασης των *martingale*

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα μπορεί να γενικευθεί για να μελετήσουμε ολοκλήρωση επάνω σε οποιαδήποτε martingale και όχι μόνο κίνηση Brown. Όμως ακόμα και η απλή περίπτωση της ολοκλήρωσης επάνω στην κίνηση Brown είναι αρκετή για την μελέτη πολύ ενδιαφέροντων εφαρμογών.

Μία σημαντική ιδιότητα του στοχαστικού ολοκληρώματος ως πρός την κίνηση Brown είναι το θεώρημα αναπαράστασης των martingale (martingale representation theorem).

**Θεώρημα 4.6.1 (Θεωρημα αναπαράστασης των martingale)** *Έστω $M_t$ μία συνεχής τοπική martingale (πιθανόν πολυδιάστατη) η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, όπου $B_t$ μία κίνηση Brown (πιθανόν πολυδιάστατη). Τότε υπάρχει διαδικασία $\theta_t$ η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad t \geq 0$$

*Η διάσταση της διαδικασίας $\theta_t$ εξαρτάται από την διάσταση της κίνησης Brown $B_t$ και θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έχει νόημα το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα αν η $M_t$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^d$ και η $B_t$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^m$, τότε η $\theta$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}^{d\times m}$ και πρέπει να ανήκει στον χώρο $M^2([0,T];|mathbbR^{d\times m})$.*

**Απόδειξη:** Βλ. το παράρτημα του κεφαλαίου. □

Συνεπώς οποιαδήποτε συνεχής τοπική martingale μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown. Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιείται πολύ στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

## 4.7 Σύντομη αναφορά στο ολοκλήρωμα του *Stieltjes*

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να κάνουμε μία σύντομη αναφορά στην έννοια του ολοκληρώματος Stieltjes από την πραγματική ανάλυση και να τονίσουμε τον λόγο που η έννοια αυτή δεν επαρκεί για τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος. Αυτός ήταν ο λόγος που ο Itô αναγκάστηκε να ορίσει το στοχαστικό ολοκλήρωμα διαφορετικά.

Θα ξεκινήσουμε την σύντομη αναφορά μας στο ολοκλήρωμα του Stieltjes θεωρώντας αρχικά μη τυχαίες συναρτήσεις και θα γενικεύσουμε για την περίπτωση τυχαίων μεταβλητών και στοχαστικών διαδικασιών.

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του ολοκληρώματος Stieltjes για μία συνάρτηση βήματος.

**Ορισμός 4.7.1** *Έστω μία συνάρτηση βήματος*

$$h = h_0\mathbf{1}_0 + \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}$$

*όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[0,t]$, και $m$ οποιαδήποτε συνάρτηση στο $\mathbb{R}^+$. Το ολοκλήρωμα Stieltjes της $h$ επάνω στην $m$ ορίζεται σαν το άθροισμα*

$$\int_0^t h\,dm := \sum_{i=1}^n h_i\,[m(t_{i+1}) - m(t_i)]$$

Όπως είδαμε και σε άλλα σημεία που σχετίζονταν με το ολοκλήρωμα εώς τώρα (π.χ. όταν συζητούσαμε για την έννοια της μέσης τιμής) μία δεξιά συνεχής συνάρτηση $h$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία $h_n$ συναρτήσεων βήματος με την έννοια ότι $h_n \to h$ όπου το όριο λαμβάνεται με την συνήθη έννοια. Από την ακολουθία αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία από ολοκληρώματα Stieltjes $\int_0^t h_n\,dm$ το καθένα από τα οποία ορίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 4.7.1. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το όριο $n \to \infty$ υπάρχει και μάλιστα αν $h_n$ και $h_n^{'}$ είναι δύο διαφορετικές ακολουθίες συναρτήσεων βήματος που προσεγγίζουν την ίδια συνάρτηση $h$ τότε τα όρια $\int_0^t h_m\,dm$ και $\int_0^t h_n^{'}\,dm$ συμπίπτουν. Συνεπώς

**Ορισμός 4.7.2** *Έστω $h$ μία δεξιά συνεχής συνάρτηση και $h_n$ μία ακολουθία συναρτήσεων βήματος που προσεγγίζει την $h$. Το ολοκλήρωμα Stieltjes της $h$ επάνω σε μία συνάρτηση $m$ ορίζεται σαν*

$$\int_0^t h\,dm := \lim_{n\to\infty} h_n\,dm$$

*Η συνάρτηση $m$ ονομάζεται ολοκληρωτής (integrator).*

Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει πόσο σημαντικό ρόλο παίζει η έννοια της συνολικής μεταβολής του ολοκληρωτή στο ολοκλήρωμα του Stieltjes.

**Θεώρημα 4.7.1** *Έστω ότι η $m$ έχει τοπικά φραγμένη μεταβολή και ότι η $h$ είναι δεξιά συνεχής και κανονική. Τότε το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_0^t h\,dm$ υπάρχει και ικανοποιεί την σχέση*

$$\left|\int_0^t h\,dm\right| \leq \int_0^t \mid h \mid\mid dm \mid \leq \sup_{0\leq s\leq t} h(s) \int_0^t \mid dm \mid$$

*όπου*

$$\int_0^t \mid dm \mid := \sup\{\sum_{i=1}^n \mid m(t_{i+1}) - m(t_i) \mid\}$$

*και $\{t_i\}$ οποιαδήποτε διαμέριση του $[0,t]$. Το sup λαμβάνεται επάνω σε όλες τις διαμερίσεις.*

Το θεώρημα αυτό μας δείχνει ότι αν ο ολοκληρωτής δεν έχει πεπερασμένη μεταβολή τότε υπάρχουν προβλήματα με τον ορισμό του ολοκληρώματος του Stieltjes χρησιμοποιώντας την συνάρτηση αυτή σαν ολοκληρωτή.

Το ολοκλήρωμα Riemann είναι μία ειδική μορφή του ολοκληρώματος του Stieltjes αν επιλέξουμε για ολοκληρωτή την $m = t$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να φανεί πολύ εύκολα ότι έχει πεπερασμένη μεταβολή οπότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα το ολοκλήρωμα του Riemann είναι καλά ορισμένο. Μάλιστα, στην γενικότερη περίπτωση που η $m$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του $t$ το ολοκλήρωμα Stieltjes μία οποιαδήποτε συνάρτησης $h$ πάνω στην $m$ μπορεί να γραφεί σαν ένα ολοκλήρωμα Riemann σύμφωνα με το ακόλουθο

$$\int_0^t h(t)dm(t) = \int_0^t \left( h(t)\frac{dm}{dt} \right) dt$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι τόσο η $h$ όσο και η $m$ είναι στοχαστικές διαδικασίες δηλαδή ότι $h = h(t,\omega)$ και $m = m(t,\omega)$. Θα μπορούσαμε κατά αναλογία να ορίσουμε ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^t h(t,\omega)\, dm(t,\omega)$. Αυτό θα γίνονταν ορίζοντας τα όρια σημειακά, δηλαδή για κάθε $\omega$ αν ορίζαμε το ολοκλήρωμα $I_s(\omega) = \int_0^t h(t,\omega)\, dm(t,\omega)$ και μετά μεταβάλλοντας τα $\omega$ κατασκευάζαμε την στοχαστική διαδικασία.

Μία ειδική περίπτωση είναι η περίπτωση όπου $m(t,\omega) = B_t$ δηλαδή ο ολοκληρωτής είναι μία κίνηση Brown. Η διαφορά με την προσέγγιση του Itô είναι ότι τώρα θα έχουμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (στοχαστικών διαδικασιών)$h_n(t,\omega)$ που θα είναι διαδικασίες βήματος και που στο όριο $\to \infty$ θα τείνουν σε μία τυχαία μεταβλητή αλλά το όριο αυτό λαμβάνεται για κάθε $\omega$ (σημειακά) και όχι κατά την $L^2$ έννοια δηλαδή κάτω από την μέση τιμή του τετραγώνου της ποσότητας που μας ενδιαφέρει και που ουσιαστικά περιλαμβάνει ένα ολοκλήρωμα επάνω σε όλα τα $\omega$ χρησιμοποιώντας ως βάρος το μέτρο πιθανότητας.

Το γιατί το να πάρουμε το όριο σημειακά στην περίπτωση όπου $m = B_t$ δεν είναι επαρκές φαίνεται από το θεώρημα 4.7.1. Έχουμε δεί στο κεφάλαιο σχετικά με την κίνηση Brown ότι είναι μία συνάρτηση η οποία έχει φραγμένη τετραγωνική μεταβολή αλλά μη φραγμένη μεταβολή. Συνεπώς το ολοκλήρωμα Stieltjes δεν μπορεί να οριστεί αν ο ολοκληρωτής είναι η κίνηση Brown και χρειάζεται μία γενίκευση της έννοιας του ολοκληρώματος για να ξεπεράσουμε το εμπόδιο αυτό. Το σημαντικό βήμα στην επίλυση του προβλήματος αυτού είναι να αντιληφθούμε ότι αρκεί να λάβουμε το όριο $n \to \infty$ στην $L^2$ έννοια και όχι σημειακά (για κάθε $\omega$). Η αλλαγή αυτή στην έννοια του ορίου είναι και η ειδοποιός διαφορά του ολοκληρώματος του Itô .

## 4.8 Γενικεύσεις του ολοκληρώματος του Itô

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μερικές γενικεύσεις του στοχαστικού ολοκληρώματος.

### 4.8.1 Ολοκλήρωση επάνω σε διαδικασίες Itô

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως μπορεί να οριστούν στοχαστικά ολοκληρώματα και ως προς πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες. Το θέμα αυτό παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον αλλά δυστυχώς δεν μπορούμε να το διαπραγματευτούμε εδώ. Θα αρκεστούμε στο να ορίσουμε την ολοκλήρωση επάνω σε διαδικασίες του Itô.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι $X_t$ είναι μία διαδικασία Itô (πιθανόν $N-$διάστατη) της μορφής

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Τότε μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα του $\gamma$ ως προς τη $X_t$ ως εξής

$$\int_0^t \gamma\, dX_t = \int_0^t \gamma u ds + \int_0^t \gamma v dB_s$$

ή σε διαφορική μορφή

$$\gamma dX_t = \gamma u dt + \gamma v dB_t$$

Φυσικά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί να ορίσουμε το $\gamma$ στην κλάση των συναρτήσεων που είναι τέτοιες ώστε οι $\gamma u$ και $\gamma v$ να ικανοποιούν τις συνθήκες που χρειάζονται ώστε αυτή η νέα διαδικασία να είναι ένα ολοκλήρωμα Itô δηλαδή πρέπει να έχουμε

$$\int_0^t \mid \gamma u \mid ds < \infty \;\; \sigma.\beta. \qquad \int_0^t \mid \gamma u \mid^2 ds < \infty \;\; \sigma.\beta.$$

### 4.8.2 Το ολοκλήρωμα του Stratonovich

Στον ορισμό του ολοκληρώματος του Itô χρησιμοποιήσαμε την σύμβαση ότι

$$\int_0^t h(t, B_t) dB_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h(t_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του $[0, t]$ και το όριο λαμβάνεται στον $L^2$.

Μία γενίκευση θα είναι η ακόλουθη:

$$\int_0^t h(t, B_t) dB_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h(\bar{t}_i, B_{\bar{t}_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του $[0, t]$, $\bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ και το όριο λαμβάνεται στον $L^2$. Αν το ολοκλήρωμα ορίζονταν σύμφωνα με την κλασσική έννοια κατά Stieltjes το όριο θα ήταν ανεξάρτητο από την επιλογή του $\bar{t}_i$ όπως γνωρίζουμε από την κλασσική ανάλυση. Λόγω όμως της ιδιαιτερότητας του ολοκληρωτή στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα εξαρτάται από την επιλογή του $\bar{t}_i$. Μία επιλογή όπως είδαμε είναι η επιλογή $\bar{t}_i = t_i$ η οποία και οδηγεί στο ολοκλήρωμα του Itô. Μία άλλη επιλογή είναι η $\bar{t}_i = \frac{t_i+t_{i+1}}{2}$ [9]. Αν λοιπόν ορίσουμε

$$\int_0^t h(t, B_t) \circ dB_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}, B_{\frac{t_i+t_{i+1}}{2}}\right)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

όπου και πάλι το όριο λαμβάνεται στον $L^2$, τότε θα πάρουμε ένα νέο στοχαστικό ολοκλήρωμα το οποίο προτάθηκε από τον Ρώσσο μηχανικό Stratonovich το 1964. Το ολοκλήρωμα κατά Stratonovich μίας στοχαστικής διαδικασίας επάνω στην κίνηση Brown δεν είναι ίσο αναγκαστικά με το ολοκλήρωμα Itô της ίδιας στοχαστικής διαδικασίας επάνω στην κίνηση Brown! Τα δύο ολοκληρώματα έχουν διαφορετικές ιδιότητες αλλά με κατάλληλη αλλαγή της υπό ολοκλήρωση ποσότητας ένα ολοκλήρωμα Stratonovich μπορεί να μετατραπεί σε ένα ολοκλήρωμα Itô και αντίστροφα. Τονίζεται ότι ενώ η στοχαστική διαδικασία $\int_0^t h(t,\omega)dB_t$ είναι martingale η $\int_0^t h(t,\omega) \circ dB_t$ δεν είναι.

**Παράδειγμα 4.8.1** *Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Stratonovich της $h(t,\omega) = B_t$ επάνω στην κίνηση Brown και να δείξουμε ότι είναι ίσο με*

$$\int_0^t B_t \circ dB_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{\frac{t_i+t_{i+1}}{2}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{B_t^2}{2}$$

*Το αποτέλεσμα δεν είναι martingale.*

Το ολοκλήρωμα Stratonovich δεν χρησιμοποιείται συχνά σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές. Χρησιμοποιείται όμως αρκετά στις φυσικές επιστήμες ή στην μελέτη στοχαστικών διαδικασιών επάνω σε πολλαπλότητες.

### 4.8.3 Ολοκλήρωση επάνω σε martingales

Μία εύλογη γενίκευση του ολοκληρώματος του Itô είναι όταν ο ολοκληρωτής είναι μία γενικότερη martingale ή ακόμη και μία semimartingale αντί για την κίνηση Brown. Μία περίπτωση όπου είδαμε κάτι τέτοιο μέχρι τώρα ήταν όταν συζητήσαμε το θέμα του ολοκληρώματος επάνω σε μία γενικότερη διαδικασία Itô.

Θα ξεκινήσουμε με τον γενικό ορισμο του στοχαστικού ολοκληρώματος.

**Ορισμός 4.8.1** *Έστω $X_t$ μία στοχαστική διαδικασία η οποία είναι δεξιά συνεχής και έχει αριστερό όριο σε κάθε σημείο*[10] *και $M_t$ μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ($L^2$) martingale. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t X_s\, dM_s$ ορίζεται ως*

$$\int_0^t X_s\, dM_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\,(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

[9] Αυτή η επιλογή είναι το ανάλογο του κανόνα του μέσου σημείου (midpoint rule)ο οποίος και χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στην αριθμητική ανάλυση για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων

[10] Τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες ονομάζονται στην διεθνή βιβλιογραφία cadlag

*όπου το όριο λαμβάνεται στον* $L^2$. *Το* $\{t_i\}$, $i = 0, ..., n$ *είναι μία διαμέριση του* $[0, t]$ *για την οποία ισχύει* $| \Delta t | := \sup_n | t_{i+1} - t_i | = 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

**Σχόλιο:** Κάτω από ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι το όριο υπάρχει και υπό την έννοια της πιθανότητας και όχι μόνο κατά την $L^2$ έννοια.

Οι περισσότερες από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Itô μπορούν να γενικευθούν για το ολοκλήρωμα επάνω σε μία γενικότερη martingale. Για παράδειγμα μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 4.8.1** *Έστω ότι η* $M_t$ *είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale τέτοια ώστε*

$$E\left[\int_0^t X_s^2 d < M >_s\right] < \infty$$

*όπου* $< M >_t$ *η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της* $M$. *Ισχύει ότι*

$$E\left[\left(\int_0^t X_s dM_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t X_s^2 d < M >_s\right]$$

**Σχόλιο:** Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί γενίκευση της ισομετρίας του Itô . Πράγματι αν $M_t = B_t$ τότε $< M >_t = < B >_t = t$ και ξαναπαίρνουμε το γνωστό αποτέλεσμα.

Σε πλήρη αναλογία έχουμε και την γενίκευση του λήμματος του Itô

**Θεώρημα 4.8.2** *Έστω* $f(t, x)$ *μία* $C^{1,2}$ *συνάρτηση και* $M_t$ *μία συνεχής martingale. Τότε ισχύει*

$$\begin{aligned} f(t, M_t) &= f(0, M_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, M_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, M_s) dM_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, M_s) d < M >_s \end{aligned}$$

Ο ορισμός του στοχαστικού ολοκληρώματος και τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και όταν η $M_t$ είναι μία semi-martingale αντί για μία martingale. Στην περίπτωση αυτή το ανάλογο με ότι είπαμε προηγουμένως είναι το ολοκλήρωμα επάνω σε μία γενικότερη διαδικασία Itô. Επίσης, τα παραπάνω γενικεύονται και για πολυδιάστατες semi-martingalesμε κατάλληλες αλλαγές. Τέλος σημειώνουμε ότι αν η $M_t$ είναι martingale τότε κάτω από ορισμένες συνθήκες και το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t X(s) dM_s$ είναι και αυτό martingale.

Η γενική θεωρία της ολοκλήρωσης επάνω σε semimartingales είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα και χρήσιμη. Έχει δε σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά. Εδώ αρκεστήκαμε να θίξουμε χωρίς απόδειξη ορισμένα μόνο κεντρικά σημεία. Για μία πιο πλήρη περιγραφή της θεωρίας αυτής μπορείτε να συμβουλευτείτε π.χ. το [30].

# 4.9 Παράρτημα: Αποδείξεις θεωρημάτων

## 4.9.1 Απόδειξη της πληρότητας του $L^2$

Ο χώρος $L^2$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy στον $L^2$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο του $L^2$. Η ιδιότητα αυτή είναι μία γενικότερη ιδιότητα των χώρων $L^p$, $p > 0$. Θα δείξουμε το παρακατω θεώρημα.

**Θεώρημα 4.9.1** *Έστω $f_n$ μία ακολουθία Cauchy στον $L^p$, $p > 0$. Τότε,*

$$|| f_n - f ||_{L^p} \to 0, \;\; n \to \infty$$

*για κάποιο $f \in L^p$.*

**Απόδειξη:** Θεωρούμε μία υπάκολουθία $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ για την οποία ισχύει

$$\sum_k || f_{n_{k+1}} - f_{n_k} ||_{L^p}^{p\wedge 1} < \infty.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Minkowski σύμφωνα με την οποία

$$|| f + g ||_{L^p}^{p\wedge 1} \leq || f ||_{L^p}^{p\wedge 1} + || g ||_{L^p}^{p\wedge 1}, \;\; p > 0$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας μπορούμε να δούμε ότι

$$|| \sum_k | f_{n_{k+1}} - f_{n_k} | ||_{L^p}^{p\wedge 1} \leq \sum_k || f_{n_{k+1}} - f_{n_k} ||_{L^p}^{p\wedge 1} < \infty$$

Αυτό μας δείχνει οτι $\sum_k | f_{n_{k+1}} - f_{n_k} | < \infty$ σχεδόν παντού, οπότε και η ακολουθία $f_{n_k}$ είναι Cauchy σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς συγκλίνει σχεδόν παντού σε κάποια μετρήσιμη συνάρτηση. Ας ονομάσουμε $f$ το όριο της υπακολουθίας $f_{n_k}$, δηλάδή $f_{n_k} \to f$. Κάνοντας χρήση του λήμματος του Fatou μπορούμε να δείξουμε ότι $|| f - f_n ||_{L^p} \to 0$. Πράγματι,

$$|| f - f_n ||_{L^p} = \liminf_{n\to\infty} || f_{n_k} - f_n ||_{L^p} \leq \sup_{m \geq n} || f_m - f_n ||_{L^p} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω του ότι η ακολουθία $f_n$ είναι Cauchy στον $L^p$. Συνεπώς, $f_n \to f$ στον $L^p$.□

Η πληρότητα του χώρου $M^2([a, b])$ μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο.

## 4.9.2 Απόδειξη της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ανισότητα Burkholder-Davis-Gundy. Για διευκόλυνση των αναγνωστών ξαναδίνουμε την εκφώνηση του θεωρήματος 4.2.2

**Θεώρημα 4.2.2 Ανισότητα Burkholder-Davis-Gundy** Έστω $f \in M^2([0,T])$. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$X_t = \int_0^t f(r)dB_r$$

Τότε για κάθε $p > 0$ υπάρχουν σταθερές $c_p$ και $C_p$ που εξαρτώνται μόνο από το $p$ τέτοιες ώστε

$$c_pE\left[\left|\int_0^t \mid f(r)\mid^2 dr\right|^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s f(r)dB_r\right|^p\right] \leq C_pE\left[\left|\int_0^t \mid f(r)\mid^2 dr\right|^{\frac{p}{2}}\right]$$

για κάθε $t \geq 0$.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη είναι τεχνική και έτσι σκιαγραφούμε τα βασικότερα της σημεία και αφήνουμε στον αναγνώστη τις λεπτομέρειες εφόσον ενδιαφέρεται. Για την πλήρη απόδειξη παραπέμπουμε στο [24].

Θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις ξεχωριστά, την περίπτωση $p = 2$ και την περίπτωση $p \neq 2$.

Στην περίπτωση $p = 2$ δεδομένου ότι η $I_t$ είναι μία martingale μπορούμε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα κάνοντας χρήση της ανισότητας του Doob για την martingale $I_t$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $p \geq 2$. Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία $\mid I_t \mid^p$ και ας εφαρμόσουμε τον τύπο του Itô σε αυτή. Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}
E[\mid I_t\mid^p &\leq \frac{p(p-1)}{2}E\left[\int_0^t \mid I_s\mid^{p-2}\mid g(s)\mid^2\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}E[\int_0^t \mid I_s\mid^{p-2}\mid g(s)\mid^2 ds] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}E[\mid I^*(t)\mid^{p-2}\int_0^t \mid g(s)\mid^2 ds] \\
&= \frac{p(p-1)}{2}E[\mid I^*(t)\mid^{p-2} A(t)] \\
&\quad \text{(χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder)} \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\{E[\mid I^*(t)\mid^p]\}^{\frac{p-2}{p}}\{E[\mid A(t)\mid^{\frac{p}{2}}]\}^{\frac{2}{p}} \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος βλέπουμε ότι η $I_t$ είναι μία martingale συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα martingale του Doob για να καταλήξουμε ότι

$$E[\mid I^*(t)\mid^p] \leq CE[\mid I_t\mid^p]$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (4.10) καταλήγουμε στο

$$E[\mid I^*(t)\mid^p] \leq C^{'}E[\mid A(t)\mid^{\frac{p}{2}}]$$

που είναι και το δεξιό μέλος της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy.

Γαι την απόδειξη του αριστερού μέλους της ανισότητας θα ορίσουμε την διαδικασία Itô

$$y(t) = \int_0^t \mid A(s) \mid^{\frac{p-2}{4}} g(s) dB_s$$

Χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Itô μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} E[\mid y(t) \mid^2] &= E[\int_0^t \mid A(s) \mid^{\frac{p-2}{2}} \mid g(s) \mid^2 ds] = E[\int_0^t \mid A(s) \mid^{\frac{p-2}{2}} dA(s)] \\ &= \frac{2}{p} E[\mid A(t) \mid^{\frac{p}{2}}] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας τον τύπο για ολοκλήρωση κατά μέρη μπορούμε να καταλήξουμε στο

$$\begin{aligned} I_t \mid A(t) \mid^{\frac{p-2}{4}} &= \int_0^t \mid A(s) \mid^{\frac{p-2}{4}} dI_s + \int_0^t I_s d[\mid A(s) \mid^{\frac{p-2}{4}}] \\ &= y(t) + \int_0^t I_s d[\mid A(s) \mid^{\frac{p-2}{4}}] \end{aligned}$$

από όπου καταλήγουμε εύκολα κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας και απλών ανισοτήτων για τα ολοκληρώματα ότι

$$\mid y(t) \mid \leq \mid x(t) \mid \mid A(t) \mid^{\frac{p-2}{4}} + \int_0^t \mid I_s \mid d[\mid A(s) \mid^{\frac{p-2}{4}}] \leq 2I^*(t) \mid A(t) \mid^{\frac{p-2}{4}}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (4.11) παίρνουμε

$$\frac{2}{p} E[\mid A(t) \mid^{\frac{p}{2}} \leq 4E[\mid I_t^* \mid^2 \mid A(t) \mid^{\frac{p-2}{2}}$$

(χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder)

$$\leq 4\{E[\mid I^*(t) \mid^p]\}^{\frac{2}{p}} \{E[\mid A(t) \mid^{\frac{p}{2}}]\}^{\frac{p-2}{p}}$$

από όπου καταλήγουμε στη σχέση

$$c_p E[\mid A(t) \mid^{\frac{p}{2}}] \leq E[\mid I_t^* \mid^p]$$

που είναι και το δεξιό μέλος της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy.

Στην περίπτωση $0 < p < 2$ θα ορίσουμε την martingale

$$M_t = \int_0^t [\epsilon + A(s) \mid^{\frac{p-2}{4}} g(s) dB_s$$

με την οποία θα εργαστούμε ανάλογα με τα βήματα της παραπάνω περίπτωσης και στο τέλος θα πάρουμε το όριο $\epsilon \to 0$. Αυτό θα μας δώσει το δεξιό μέλος της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy στην περίπτωση αυτή. Για το αριστερό μέλος θα γράψουμε το $| A(t) |^{\frac{p}{2}}$ με την μορφή

$$| A(t) |^{\frac{p}{2}} = \{| A(t) |^{\frac{p}{2}} [\epsilon + I_t^*]^{-\frac{p(2-p)}{p}}\}[\epsilon + I_t^*]^{\frac{p(2-p)}{2}}$$

και θα εργαστούμε με την ποσότητα αυτή όπως και στην παραπάνω περίπτωση κάνοντας χρήση της ανισότητας του Hölder. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη. □.

### 4.9.3 Απόδειξη της εκθετικής ανισότητας

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την εκθετική ανισότητα για το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για διευκόλυνση των αναγνωστών παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος 4.2.3.

**Θεώρημα 4.2.3** Έστω $g \in L^2$ και έστω $T, a, b$ θετικοί αριθμοί. Τότε ισχύει

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T}\left[\int_0^t g(s)dB_s - \frac{a}{2}\int_0^t | g(s) |^2 \, ds\right] > b\right) \leq e^{-ab}$$

**Απόδειξη:** Ας ορίσουμε την ακολουθία χρόνων στάσης

$$\tau_n = \inf\left\{t \geq 0 : \left|\int_0^t g(s)dB_s\right| + \int_0^t | g(s) |^2 \, ds \geq n\right\}$$

Ας ορίσουμε επίσης την στοχαστική διαδικασία

$$x_n(t) = a\int_0^t g(s)\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)dB_s - \frac{a^2}{2}\int_0^t | g(s) |^2 \, ds\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)ds$$

η οποία είναι φραγμένη. Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο του Itô στην στοχαστική διαδικασία $\exp(x_n(t))$. Μετά από λίγο άλγεβρα (που αφήνεται σαν άσκηση) καταλήγουμε ότι

$$\exp(x_n(t)) = 1 + a\int_0^t \exp(x_n(s))g(s)\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)ds$$

από το οποίο και μπορούμε να δούμε ότι η $\exp(x_n(t))$ είναι μία martingale η οποία είναι μη αρνητική και έχει μέση τιμή ίση με την μονάδα. Κάνοντας χρήση λοιπόν των ανισοτήτων martingale για την $\exp(x_n(t))$ μπορούμε να δούμε ότι

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T}\exp(x_n(t)) \geq e^{ab}\right) \leq e^{-ab}E[\exp(x_n(T)] = e^{-ab}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης παίρνουμε από το παραπάνω ότι

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} x_n(t) \geq ab\right) \leq e^{-ab}$$

απ' όπου παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\tau_n \to \infty$ μονότονα καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. □

### 4.9.4 Απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των martingale

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το θεώρημα αναπαράστασης των martingale. Πριν προχωρήσουμε με την απόδειξη θα κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση.

Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t = exp\left[\int_0^t f(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_0^t \mid f(t) \mid^2 dt\right]$$

όπου $f \in L^2([0,T])$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Itô μπορούμε να δείξουμε ότι $dM_t = M_t dB_t$ ή ισοδύναμα σε ολοκληρωτική μορφή ότι $M_t = M_0 + \int_0^t M_s dB_s$ οπότε η $M_t$ είναι μία martingale . Για την ειδική κλάση των martingale αυτών λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι μπορούν να γραφούν σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα κάποιας στοχαστικής διαδικασίας (τον εαυτό τους αλλά ας το παραβλέψουμε αυτό προς το παρόν). Το ερώτημα είναι αν αυτό μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για οποιαδήποτε martingale η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Η απάντηση είναι θετική και μάλιστα στην γενική περίπτωση η υπό ολοκλήρωση ποσότητα δεν θα είναι απαραίτητα η ίδια η martingale την οποία θέλουμε να αναπαραστήσουμε με το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για την γενική απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι μία οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μία ακολουθία απο εκθετικά διαδικασιών Itô κάποιας ειδικής μορφής. Αυτό είναι και η ουσία του παρακάτω λήμματος.

**Λήμμα 4.9.1** *Ο γραμμικός διανυσματικός χώρος (linear span) που παράγεται από τυχαίες μεταβλητές της μορφής* $\exp\left\{\int_0^T h(t)dB_t - \int_0^T \mid h(t) \mid^2 dt\right\}$ *όπου* $h \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{1\times m})$ *ντετερμινιστική συνάρτηση είναι πυκνός*[11] *στον* $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. *Με τον συμβολισμό* $h \in L^2([0,T],], \mathbb{R}^{1\times m})$ *εννοούμε ότι η* $h : [0,T] \to \mathbb{R}^{1\times m}$ *είναι μία συνάρτηση μετρήσιμη κατά Borel τέτοια ώστε* $\int_0^T \mid h(t) \mid^2 dt < \infty$, *σ.β.. Ο χώρος* $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ *αποτελείται από τις τυχαίες μεταβλητές* $X$ *οι οποίες είναι* $\mathcal{F}_t$ *μετρήσιμες και για τις οποίες ισχύει* $E[\mid X \mid^2] < \infty$.

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη του λήμματος αυτού, θα χρειαστούμε πρώτα να δείξουμε ότι το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $\{\phi(B_{t_1}, ..., B_{t_n})\}$ όπου $t_i \in [0,T]$ και $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{R})$, $n = 1, 2, ...$ είναι πυκνό στο $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. Με $C_0^\infty(\mathbb{R}^{m\times n}; \mathbb{R})$ συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων οι οποίες είναι απείρως παραγωγίσιμες και με συμπαγές στήριγμα (compact support) από το $\mathbb{R}^{m\times n}$ στο $\mathbb{R}$. Αφού αποδειχθεί αυτό για την απόδειξη του λήμματος αρκεί να δείξουμε ότι αν κάποια τυχαία μεταβλητή $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ είναι ορθογώνια σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές της μορφής $f = \exp\left\{\int_0^T h(t)dB_t - \int_0^T \mid h(t) \mid^2 dt\right\}$ με ντετερμινιστικό $h$, υπό την έννοια ότι $E[fg] = 0$, τότε $g = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $m = 1$.

[11] Με αυτό εννοούμε ότι κάθε στοιχείο $f$ του $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία της μορφής $f_n = \sum_n a_n \exp\left\{\int_0^T h_n(t)dB_t - \int_0^T \mid h_n(t) \mid^2 dt\right\}$ όπου $h_n \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{1\times m})$ ντετερμινιστική συνάρτηση.

Ας δείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό: Ας πάρουμε μία ακολουθία $t_i$ τέτοια ώστε $t_i \in [0,T]$. Ας πάρουμε την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $B_{t_1},...,B_{t_n}$ την οποία ας συμβολίσουμε $\mathcal{G}_n = \sigma(B_{t_1},...,B_{t_n})$. Μπορούμε να δούμε ότι $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$ δηλαδή η $\mathcal{G}_n$ αποτελεί μία διήθηση και ότι αν $\mathcal{F}_t$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown (επαυξημένη με τα σύνολα μέτρου 0 ως προς το μέτρο $P$) τότε $\mathcal{F}_T = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n)$. Για το τελευταίο αρκεί να σκεφτείτε ότι τα $t_i \in [0,T]$ συνεπώς για πολύ μεγάλες τιμές του $i$ η ακολουθία $\{t_i\}$ αναγκαστικά θα καλύπτει το διάστημα $[0,T]$. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$ μπορούμε να ορίσουμε την ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale $X_n := E[g \mid \mathcal{G}_n]$. Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε χρήση του θεωρήματος σύγκλισης των martingale και να δείξουμε ότι $X_n := E[g \mid \mathcal{G}_n] \to E[g \mid \mathcal{F}_T]$ καθώς $n \to \infty$. Η τυχαία μεταβλητή $X_n$ είναι $\mathcal{G}_n-$μετρήσιμη, συνεπώς κάνοντας χρήση του λήμματος των Doob-Dynkin (βλ. θεώρημα 1.2.1) μπορεί να γραφεί για κάθε $n$ ως $X_n = g_n(B_{t_1},...,B_{t_n})$ για κάποια συνάρτηση Borel $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Επειδή, κάθε τέτοια συνάρτηση $g_n$ μπορεί να προσεγγιστεί στον $L^2_{\mathcal{F}_T}$ από συναρτήσεις $\phi_n(B_{t_1},...,B_{t_n})$ όπου $\phi_n \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού του λήμματος ας θεωρήσουμε ότι η $g$ είναι ορθογώνια σε κάθε τυχαία μεταβλητή $f$ της μορφής

$$f = \exp\left\{\int_0^T h(t)dB_t - \int_0^T \mid h(t) \mid^2 dt\right\}$$

δηλαδή $E[fg]=0$. Κάνοντας την επιλογή $h(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$ όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ οποιοιδήποτε ντετερμινιστικοί αριθμοί, μπορούμε να δούμε ότι η ορθογωνιότητα δίνει ισοδύναμα ότι

$$E\left[\exp\left\{\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n}\right\} g\right] = \int \exp\left\{\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n}\right\} gdP = 0$$

Από την ισότητα αυτή μπορούμε να αποδείξουμε ότι $g=0$. Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε ορισμένες τεχνικές από την μιγαδική ανάλυση τις οποίες θα σκαγραφήσουμε εδώ χωρίς απόδειξη. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$G(\lambda) := E\left[\exp\left\{\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n}\right\} g\right]$$

η οποία είναι πραγματική και αναλυτική στο $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Συμφωνα με την θεωρία της αναλυτικής επέκτασης η $G$ θα έχει μία αναλυτική επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο $\lambda \in \mathbb{C}^n$ την οποία θα συμβολίζουμε $G^*$. Για την αναλυτική επέκταση $G^*$ θα ισχύει $G^* = 0$ στο $\mathbb{C}^n$ εφόσον η $G=0$ στο $\mathbb{R}^n$ και είναι και αναλυτική. Συνεπώς

$$G^*(z) := E\left[\exp\left\{z_1 B_{t_1} + ... + z_n B_{t_n}\right\} g\right] = 0$$

για κάθε $z = (z_1,...,z_n) \in \mathbb{C}^n$ και κάθε $t_1,...,t_n \in [0,T]$. Αν επιλέξουμε $z = (i\lambda_1,...,i\lambda_n)$, $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι $G(i\lambda_1,...,i\lambda_n) = 0$ .

Έστω τώρα $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Τότε θα δείξουμε ότι $E[\phi(B_{t_1},...,B_{t_n})g] = 0$. Πράγματι, εφόσον $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ μπορούμε να δώσουμε μία ολοκληρωτική έκφραση για την $\phi(B_{t_1},...,B_{t_n})$ κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Fourier $\hat{\phi}$ της

$\phi$ δηλαδή ότι

$$\phi(B_{t_1},...,B_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\lambda_1 B_{t_1} + ... + i\lambda_n B_{t_n})\hat{\phi}(\lambda_1,...,\lambda_n)d\lambda_1...d\lambda_n$$

Συνεπώς

$$E[\phi(B_{t_1},...,B_{t_n})g] = \int_\Omega \phi(B_{t_1},...,B_{t_n})gdP$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_\Omega \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\lambda_1 B_{t_1} + ... + i\lambda_n B_{t_n})\hat{\phi}(\lambda_1,...,\lambda_n)d\lambda_1...d\lambda_n \right\} gdP =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\lambda_1,...,\lambda_n) \left\{ \int_\Omega \exp(i\lambda_1 B_{t_1} + ... + i\lambda_n B_{t_n})gdP\, d\lambda_1...\lambda_n = \right.$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\lambda_1,...,\lambda_n)G(i\lambda_1,...,i\lambda_n)d\lambda_1...d\lambda_n = 0$$

εφόσον $G(i\lambda_1,...,i\lambda_n) = 0$ για κάθε $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Έχουμε λοιπόν ότι $E[\phi(B_{t_1},...,B_{t_n})g] = 0$ για οποιαδήποτε $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Όμως δείξαμε στην αρχή ότι οι συναρτήσεις της μορφής $\phi(B_{t_1},...,B_{t_n})$ για $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνές στο $L^2_{\mathcal{F}_T}$. Εφόσον η $g$ είναι ορθογώνια σε ένα πυκνό υποσύνολο του $L^2_{\mathcal{F}_T}([0,T])$ έχουμε ότι $g = 0$.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι αν κάποια τυχαία μεταβλητή $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$ είναι ορθογώνια σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές της μορφής

$$f = \exp\left\{ \int_0^T h(t)dB_t - \int_0^T \mid h(t) \mid^2 dt \right\}$$

με ντετερμινιστικό $h$, υπό την έννοια ότι $E[fg] = 0$ τότε $g = 0$. Αυτό είναι επαρκές για να διαπιστώσουμε το ότι οι τυχαίες μεταβλητές $f$ είναι πυκνές στο $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$. Για την γενικότερη περίπτωση όπου $m \neq 1$ παραπέμπουμε στο [24].
$\square$

**Λήμμα 4.9.2** *Για κάθε τυχαία μεταβλητή $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ υπάρχει μία στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0,T],\mathbb{R}^{1\times m})$ τέτοια ώστε*

$$\xi = E[\xi] + \int_0^T f(s)dB_s$$

*όπου $B_t = (B_{1,t},...,B_{m,t})$ είναι μία $m-$διάστατη κίνηση Brown. Η στοχαστική διαδικασία $f$ είναι μοναδική υπό την έννοια ότι αν υπάρχει ακόμα μία στοχαστική διαδικασία $g$ για την οποία ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα τότε έχουμε ότι*

$$E\left[\int_0^T \mid f(s) - g(s) \mid^2 ds\right] = 0$$

**Απόδειξη:** Ας υποθέσουμε ότι η $\xi$ έχει την ειδική μορφή

$$\xi = \exp\left\{\int_0^T h(t)dB_t - \int_0^T \mid h(t) \mid dt\right\}.$$

Ορίζοντας την στοχαστική διαδικασία

$$x(t) = \exp\left\{\int_0^t h(s)dB_s - \int_0^t \mid h(s) \mid ds\right\}$$

και κάνοντας χρήση του λήμματος του Itô μπορούμε να δούμε ότι $dx(t) = h(t)x(t)dB_t$. Ολοκληρώνοντας από 0 εώς $T$ παίρνουμε ότι

$$x_T = \xi = 1 + \int_0^T h(t)x(t)dB_t = E[\xi] + \int_0^T h(t)x(t)dB_t$$

Συνεπώς για τυχαίες μεταβλητές της ειδικής μορφής που θεωρήσαμε πιο πάνω ο ισχυρισμός του λήμματος ισχύει με την επιλογή $f(t) = h(t)x(t)$. Λόγω της γραμμικότητας του στοχαστικού ολοκληρώματος ο ισχυρισμός του λήμματος ισχύει και αν η τυχαία μεταβλητή $\xi$ είναι ένας γραμμικός συνδιασμός εκθετικών τυχαίων μεταβλητών της παραπάνω μορφής. Δειξαμε όμως στο λήμμα 4.9.1 ότι το σύνολο αυτών των τυχαίων μεταβλητών είναι πυκνό στο $L_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. Άρα ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε τυχαία μεταβλητή $\xi \in L_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$.

Η μοναδικότητα του $f$ προκύπτει από απλή χρήση της ισομετρίας του Itô και αφήνεται σαν άσκηση.□

**Σχόλιο:** Ο προσδιορισμός της στοχαστικής διαδικασίας $f$ δεν είναι πάντοτε εύκολη υπόθεση. Μία γενική απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται με την χρήση του λογισμού κατά Malliavin αλλά κάτι τέτοιο είναι εκτός των πλαισίων του παρόντος.

Μπορούμε τώρα προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των martingale. Για διευκόλυνση των αναγνωστών διατυπώνουμε εκ νέου το θεώρημα.

**Θεώρημα 4.6.1 Θεωρημα αναπαράστασης των martingale** Έστω $M_t$ μία συνεχής τοπική martingale (πιθανόν πολυδιάστατη) η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \le t)$, όπου $B_t$ μία κίνηση Brown (πιθανόν πολυδιάστατη). Τότε υπάρχει διαδικασία $\theta_t$ η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad t \ge 0$$

Η διάσταση της διαδικασίας $\theta_t$ εξαρτάται από την διάσταση της κίνησης Brown $B_t$ και θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έχει νόημα το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα αν η $M_t$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^d$ και η $B_t$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^m$, τότε η $\theta$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}^{d\times m}$ και πρέπει να ανήκει στον χώρο $M^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$.

**Απόδειξη:** Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε την $M_t$ μονοδιάστατη, δηλαδή ότι $d = 1$. Ας εφαρμόσουμε το λήμμα 4.9.2 στην τυχαία μεταβλητή $\xi = M(T)$. Υπάρχει λοιπόν στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0,T], \mathbb{R}^{1\times m})$ τέτοια ώστε

$$M_T = E[M_T] + \int_0^T f(s)dB_s = M_0 + \int_0^T f(s)dB_s$$

(θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $M_0$ είναι ντετερμινιστικό). Κάνοντας χρήση της ιδιότητας martingale για την $M_t$ έχουμε ότι

$$M_t = E[M_T \mid \mathcal{F}_t] = E[M_0 + \int_0^T f(s)dB_s \mid \mathcal{F}_t] = M_0 + \int_0^t f(s)dB_s$$

(όπου επίσης κάναμε χρήση και των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος). Συνεπώς αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

## 4.10 Βασικά σημεία του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίσαμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος το οποίο είναι μία στοχαστική διαδικασία που μπορούμε να πάρουμε ολοκληρώνοντας μία τυχαία συνάρτηση επάνω στην κίνηση Brown. Δώσαμε τις βασικές ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô και το χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό ενός νέου είδους στοχαστικών διαδικασιών, των διαδικασιών Itô. Δείξαμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός μίας διαδικασίας Itô μέσω μίας μη γραμμικής συνάρτησης είναι επίσης μία διαδικασία Itô η ακριβής μορφή της οποίας δίνεται από τον τύπο του Itô. Οι διαδικασίες του Itô και του τύπου του Itô έχουν πολλές εφαρμογές στα οικονομικά και συγκεκριμένα στην θεωρία των παραγώγων συμβολαίων.

Τα βασικά σημεία που θα πρέπει να θυμόμαστε είναι

- Τον ορισμό του ολοκληρώματος του Itô επάνω στην κίνηση Brown και τις ιδιότητες του. Να θυμάστε ότι το ολοκλήρωμα του Itô επάνω στην κίνηση Brown είναι μία martingale. Το ολοκλήρωμα του Itô μπορεί να γενικευθεί και σε περιπτώσεις που η ολοκλήρωση γίνεται επάνω σε πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες.

- Το ορισμό των διαδικασιών Itô. Μία διαδικασία Itô περιλαμβάνει μία ταχύτητα και μία διακύμανση (διάχυση).

- Τον τύπο του Itô που μας δίνει το πως μετασχηματίζεται μία διαδικασία Itô κάτω από έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό.

  ◊ Ο τύπος του Itô μπορεί να θεωρηθεί η βάση για οποιαδήποτε μελέτη στην στοχαστική ανάλυση ή την χρηματοοικονομική.

  ◊ Ισχύει για συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στην στοχαστική διαδικασία και μία στον χρόνο. Υπάρχουν όμως και γενικεύσεις του κάτω από πιο ασθενείς περιορισμούς.

$\diamondsuit$ Ισχύει τόσο για ντετερμινιστικούς χρόνους όσο και για τυχαίους χρόνους.

- Το ολοκλήρωμα του Itô μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση οποιασδήποτε τετραγωνικά ολοκληρώσιμης τοπικής martingale (Θεώρημα αναπαράστασης των martingale).

# Κεφάλαιο 5

# Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μία εισαγωγή στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η θεωρία αυτή βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, αλλά ίσως μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές της είναι στην κατασκευή μοντέλων για τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

## 5.1 Βασικές έννοιες

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

**Ορισμός 5.1.1** *Μία στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση της μορφής*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{5.1}$$

*ή ισοδύναμα σε ολοκληρωτική μορφή*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{5.2}$$

*όπου $B_t$ είναι μία $m$-διάστατη κίνηση Brown $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ και $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $X_t \in \mathbb{R}^n$.*

Λέμε ότι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει λύση αν υπάρχει μία διαδικασία Itô $X_t$ η οποία την ικανοποιεί. Τέτοιες λύσεις ονομάζονται **τροχιακές λύσεις** (**pathwise solutions**). Μία τέτοια λύση είναι μία semi-martingale. Μία πολύ συναφής έννοια με την τροχιακή λύση είναι και η ισχυρή λύση (strong solution). Στο βιβλίο αυτό θα ακολουθήσουμε την ορολογία ισχυρή λύση αντί για την ορολογία τροχιακή λύση. Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών πολλές φορές ονομάζονται και **διαδικασίες διάχυσης**.

**Σχόλιο:** Στον παραπάνω ορισμό δώσαμε την γενικότερη μορφή μίας διανυσματικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Στον ορισμό χρησιμοποιήσαμε την συμπαγή μορφή της εξίσωσης αυτής που μπορεί να γραφεί και σε μορφή συνιστωσών ως

$$\begin{pmatrix} dX_{1,t} \\ \vdots \\ dX_{n,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t, X_t) \\ \vdots \\ b_n(t, X_t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t, X_t) & \cdots & \sigma_{1m}(t, X_t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}(t, X_t) & \cdots & \sigma_{nm}(t, X_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{m,t} \end{pmatrix}$$

Στον παραπάνω τύπο $m$ είναι ο αριθμός των κινήσεων Brown που συνεισφέρουν στην εξίσωση και $n$ η διάσταση της στοχαστικής διαδικασίας $X_t = (X_{1,t}, ..., X_{n,t}) \in \mathbb{R}^n$. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $n = 1$ παίρνουμε μία βαθμωτή στοχαστική διαφορική εξίσωση για την στοχαστική διαδικασία $X_t \in \mathbb{R}$, η οποία εν γένει θα έχει την μορφή

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}(t, X_t)dB_{k,t}$$

όπου τώρα οι $b$, $\sigma_{ik}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις. Τέλος, η πιο απλή είναι η περίπτωση όπου $n = 1$, $m = 1$ όπου έχουμε μία βαθμωτή στοχαστική διαφορική εξίσωση η οποία οδηγείται από μία κίνηση Brown.

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της μοναδικότητας για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

**Ορισμός 5.1.2** *Η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.1) λέμε πως είναι ισχυρά μοναδική αν για δύο οποιεσδήποτε στοχαστικές διαδικασίες $X_t$ και $X_t^{'}$ οι οποίες ικανοποιούν την (5.1) ισχύει*

$$P(X_0 = X_0^{'}) = 1 \Longrightarrow P(X_t = X_t^{'},\ \forall t \geq 0) = 1$$

Κάτω από ορισμένες συνθήκες είναι δυνατό να δείξουμε ότι οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις έχουν μοναδικές ισχυρές λύσεις. Τέτοιες συνθήκες είναι κατά κύριο λόγο, συνθήκες τύπου Lipschitz στους συντελεστές της εξίσωσης. Παραθέτουμε μία τυπική μορφή των συνθηκών αυτών όπως θα τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στο βιβλίο αυτό.

**ΒΑΣΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ ΓΙΑ ΤΑ $b$ ΚΑΙ $\sigma$**

- **Συνέχεια Lipschitz**

$$\mid b(t,x) - b(t,y) \mid + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid \leq K \mid x - y \mid, \quad \forall t, x, y$$

- **Συνθήκη γραμμικής αύξησης**

$$\mid b(t,x) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) \mid^2 \leq (1 + \mid x \mid^2), \quad \forall t, x, y$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 5.1.1** *Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση (5.1) με συντελεστές $\sigma$ και $b$ οι οποίες είναι συναρτήσεις*[1] *που είναι φραγμένες και που ικανοποιούν την βασική υπόθεση. Τότε η στοχαστική διαφορικη εξίσωση έχει ισχυρή λύση. Η λύση αυτή είναι μοναδική.*

Η απόδειξη του θεωρήματος, ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του αντιστοίχου θεωρήματος για ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις με τις κατάλληλες τροποποιήσεις που είναι απαραίτητες για την στοχαστική περίπτωση. Βασίζεται στην χρήση ενός θεωρήματος σταθερού σημείου σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο χώροBanach . Μιά και οι έννοιες αυτές είναι λίγο προχωρημενες η απόδειξη είναι προαιρετική για τους αναγνώστες με πιο θεωρητικά μαθηματικά ενδιαφέροντα. Για απλότητα παρουσιάζουμε την απόδειξη στην περίπτωση όπου $n = 1$, $m = 1$ αλλά η γενίκευση είναι απλή για οποιεσδήποτε τιμές των $m$ και $n$. Η απόδειξη είναι κλασσική και παραλλαγές της εμφανίζονται σε διάφορα συγγράμματα (βλ. π.χ. [4]).

**Απόδειξη:** (*) Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου για ένα τελεστή συστολής σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο χώρο Banach. Η λύση της εξίσωσης θα γίνει σύμφωνα με το επαναληπτικό σχήμα

$$X_t^{(i+1)} = x + \int_0^t b(t, X_t^{(i)})dt + \int_0^t \sigma(t, X_t^{(i)})dB_t$$

Αυτό είναι ουσιαστικά το στοχαστικό ανάλογο του επαναληπτικού σχήματος του Picard το οποίο χρησιμοποιείται στην επίλυση ντετερμινιστικών διαφορικών εξισώσεων. Αν υπάρχει στοχαστική διαδικασία για την οποία $X_t^{(i+1)} = X_t^{(i)}$ για κάθε $i$ μεγαλύτερο από κάποιο $i^*$, τότε η διαδικασία αυτή είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Αν ορίσουμε τον συναρτησιακό χώρο $M^2$ που αποτελείται από τις στοχαστικές διαδικασίες $X_t$ που είναι τέτοιες ώστε $E[\int_0^T \mid X_t \mid^2 dt] < \infty$. Ο χώρος αυτός εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\ .\ \|_\lambda$ που ορίζεται σαν

$$\| X_t \|_\lambda^2 = E\left[\int_0^T e^{-\lambda t} \mid X_t \mid^2 dt\right]$$

είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος με νόρμα, δηλαδή ένας χώρος Banach . Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τον τελεστή $\mathcal{T} : M^2 \to M^2$ με βάση την σχέση

$$\mathcal{T}X_t = x + \int_0^t b(t, X_t)dt + \int_0^t \sigma(t, X_t)dB_t$$

Ένα σημείο $\chi = X_t$ του χώρου $M^2$ τέτοιο ώστε $\mathcal{T}\chi = \chi$ ή ισοδύναμα $X_t = \mathcal{T}X_t$, ονομάζεται σταθερό σημείο του τελεστή $\mathcal{T}$, και στο παρών πλαίσιο θα είναι μία

[1] θεωρούμε ότι $n$ και $m$ μπορεί να πάρουν οποιεσδήποτε ακέραιες τιμές

στοχαστική διαδικασία που είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Για να αποδείξουμε λοιπόν την επιλυσιμότητα της εξίσωσης αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου σύμφωνα με το οποίο αν ο τελεστής $\mathcal{T}$ είναι ένας τελεστής συστολής, θα έχει κάποιο σταθερό σημείο (βλ. παράρτημα του κεφαλαίου). Υπενθυμίζουμε πως ένας τελεστής ονομάζεται τελεστής συστολής αν για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2$ που ανήκουν στον εν λόγω συναρτησιακό χώρο (στην προκειμένη περίπτωση τον $M^2$) ισχύει ότι

$$\| \mathcal{T}\chi_1 - \mathcal{T}\chi_2 \| \leq \nu \| \chi_1 - \chi_2 \|$$

όπου $\nu < 1$. Στην προκειμένη περίπτωση για νόρμα του χώρου θα χρησιμοποιήσουμε την νόρμα $\| \, . \, \|_\lambda$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε πως ο τελεστής αυτός είναι ένας τελεστής συστολής. Ας πάρουμε λοιπόν διαφορετικα σημεία $\chi_1, \chi_2$ του χώρου $M^2$ που αντιστοιχούν στις στοχαστικές διαδικασίες $X_{1,t}$ και $X_{2,t}$. Από τον ορισμό του τελεστή $\mathcal{T}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{T}X_{1,t} - \mathcal{T}X_{2,t} &= \int_0^T (b(t,X_{1,t}) - b(t,X_{2,t}))dt + \int_0^T (\sigma(t,X_{1,t}) - \sigma(t,X_{2,t}))dB_t \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

θα υπολογίσουμε χωριστά τον καθένα από τους όρους αυτούς.

- Ο όρος $I_1$: Ο όρος αυτός είναι ουσιαστικά ο ίδιος με την ντερμινιστική περίπτωση:

$$\begin{aligned} \| I_1 \|_\lambda^2 &\leq E\left[ \int_0^T e^{-\lambda t} \left| \int_0^t (b(s,X_{1,s}) - b(s,X_{2,s}))ds \right|^2 dt \right] \\ &\leq E\left[ \int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |b(s,X_{1,s}) - b(s,X_{2,s})|^2 \, dsdt \right] \\ &\leq C^2 E\left[ \int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t | X_{1,s} - X_{2,s} |^2 \, dsdt \right] \\ &= C^2 E\left[ \int_0^T \left( \int_s^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} dt \right) e^{-\lambda s} | X_{1,s} - X_{2,s} |^2 \, ds \right] \\ &\leq \frac{C^2}{\lambda} E\left[ \int_0^T e^{-\lambda s} | X_{1,s} - X_{2,s} |^2 \, ds \right] = \frac{C^2}{\lambda} \| X_1 - X_2 \|_\lambda^2 \end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήσαμε (α) την ιδιότητα Lipschitz για την συνάρτηση $b$ σύμφωνα με την οποία $| b(x_1,t) - b(x_2,t) | \leq C \mid x_1 - x_2 \mid$, (β) το ότι το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\lambda t}\int_0^t f(s)dsdt &= \int_0^T e^{-\lambda t}\int_0^T f(s)H(t-s)dsdt \\ &= \int_0^T\int_0^T e^{-\lambda t}e^{\lambda s}e^{-\lambda s}f(s)H(t-s)dsdt \\ &= \int_0^T \underbrace{\left[\int_0^T e^{-\lambda t}e^{\lambda s}H(t-s)dt\right]}\, e^{-\lambda s}f(s)ds \\ &= \int_0^T \left[\int_s^T e^{-\lambda t}e^{\lambda s}ds\right] e^{-\lambda s}f(s)ds\end{aligned}$$

όπου $f(s)$ είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση του $s$ και στην συγκεκριμένη περίπτωση το $\mid X_{1,s}-X_{2,s}\mid$ και $H(s)$ η συνάρτηση του Heaviside δηλαδή μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$H(s)=\begin{cases}0, & \text{αν}\quad s<0\\ 1, & \text{αν}\quad s\geq 0\end{cases}$$

και (γ) ότι

$$\int_0^T e^{-\lambda t}e^{\lambda s}dt=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda(T-t)})\leq\frac{1}{\lambda}$$

- Ο όρος $I_2$: Για τον όρο αυτό θα επαναλάβουμε τα παραπάνω βήματα αλλά επιπλέον πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ισομετρία του Itô για το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mid\mid I_2\mid\mid_\lambda^2 &= E\left[\int_0^T e^{-\lambda t}\left|\int_0^t(\sigma(s,X_{1,s})-\sigma(s,X_{2,s}))\mid dB_s\right|^2 dt\right] \\ &= E\left[\int_0^T e^{-\lambda t}\int_0^t \mid\sigma(s,X_{1,s})-\sigma(s,X_{2,s})\mid^2 dsdt\right] \\ &\quad (\text{ ισομετρία του Itô}) \\ &\leq C^2E\left[\int_0^T e^{-\lambda t}\int_0^t \mid X_{1,s}-X_{2,s}\mid^2 dsdt\right] \\ &\leq \frac{C^2}{\lambda}E\left[\int_0^T e^{-\lambda s}\mid X_{1,s}-X_{2,s}\mid^2 ds\right]=\frac{C^2}{\lambda}\mid\mid X_1-X_2\mid\mid_\lambda^2\end{aligned}$$

Επιλέγοντας λοιπόν το $\lambda$ κατά τρόπο ώστε $2\frac{C^2}{\lambda} < 1$ ο τελεστής $\mathcal{T}$ θα είναι μία συστολή στον χώρο $M^2$ και συνεπώς θα έχει ένα και μοναδικό σταθερό σημείο, που θα είναι και η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. $\square$

Πολλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις μπορεί να επιλυθούν με την χρήση του τύπου του Itô.

**Παράδειγμα 5.1.1 Η γεωμετρική κίνηση Brown** *θεωρείστε το γραμμικό μοντέλο αύξησης στην μορφή*

$$\frac{dS_t}{dt} = a_t S_t$$

*και ας υποθέσουμε ότι ο συντελεστής αύξησης είναι μία τυχαία μεταβλητή της μορφής*

$$a_t = \mu + \sigma \dot{B}_t.$$

*Ας θυμηθούμε ότι η παράγωγος της κίνησης Brown ορίζεται μόνο κάτω από ένα ολοκλήρωμα. Κατά συνέπεια είναι μαθηματικά ορθότερο να γράψουμε την εξίσωση στην μορφή*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

*Αν ο στοχαστικός όρος έλειπε από την εξίσωση, η εξισωση θα ήταν μία εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, και η λύση θα ήταν μία εκθετική συνάρτηση. Έχοντας γνώση αυτού του πράγματος, ας γράψουμε σε αναλογία με την ντετερμινιστική περίπτωση*

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dB_t \Longrightarrow \\
\int_0^t \frac{dS_t}{S_t} &= \int_0^t \mu dt + \sigma dB_t = \mu t + \sigma B_t
\end{aligned} \tag{5.3}$$

*Αν στο στάδιο αυτό μπείτε στον πειρασμό να αντικαταστήσετε το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής με το $ln(S_t) - ln(S_0)$* **μην** *το κάνετε! Εφόσον η $S_t$ είναι μία διάχυση αυτό δεν είναι αληθινό. Για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα αυτό, ας υπολογίσουμε την χρονική παράγωγο της στοχαστικής διαδικασίας $Z_t = ln(S_t)$. Με την χρήση του τύπου του Itô παίρνουμε*

$$\begin{aligned}
dZ_t &= \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(dS_t)^2 \\
&= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt
\end{aligned}$$

*το οποίο μας δίνει ότι*

$$\int_0^t \frac{dS_t}{S_t} = Z_t + \frac{1}{2}\sigma^2 t = ln(S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

*και αντικαθιστώντας αυτό στην εξίσωση (5.3) βρίσκουμε ότι*

$$S_t = S_0 exp\left[\left(\mu - \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2}\right) t + \underbrace{\sigma B_t}\right]$$

*όπου οι υπογραμμισμένοι όροι οφείλονται στην στοχαστικότητα. Η στοχαστική διαδικασία $S_t$ ονομάζεται γεωμετρική κίνησηBrown και χρησιμοποιείται στην χρηματοοικονομική σαν ένα μοντέλο για τις τιμές των μετοχών. Το μοντέλο αυτό, που θα δούμε αρκετά συχνά στην διάρκεια του βιβλίου αυτού, βασίζεται στην παρατήρηση ότι πολλές φορές, η σχετική απόδοση μίας μετοχής δηλαδή η ποσότητα $\frac{dS_t}{S_t}$ είναι ίση με μία σταθερή τιμή $\mu$ η οποία ονομάζεται* **ταχύτητα** *της μετοχής και από μία διακύμανση γύρω από την τιμή αυτή η οποία είναι της μορφής $\sigma dB_t$ όπου $B_t$ είναι μία τυπική κίνηση Brown και $\sigma$ είναι το πλάτος των διάκυμάνσεων αυτών. Η παράμετρος $\sigma$ ονομάζεται συνήθως η* **πτητικότητα** *της μετοχής.*

**Παράδειγμα 5.1.2 Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck και τα επιτόκια** *Ας θεωρήσουμε την εξής στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$dX_t = -aX_t dt + dB_t$$

*με αρχική συνθήκη $X_0 = x$. Η στοχαστική διαδικασία που είναι η λύση της στοχαστικής αυτής διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck και βρίσκει αρκετές εφαρμογές στην φυσική και τα χρηματοοικονομικά.*

*Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Ας εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(t,x) = exp(\sigma t)x$ με την επιλογή $x = X_t$ και $\sigma \in \mathbb{R}$ το οποίο θα καθορίσουμε στην πορεία. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô παίρνουμε*

$$df(t, X_t) = (\sigma - a)exp(\sigma t)X_t dt + exp(\sigma t)dB_t$$

*Επιλέγοντας $\sigma = a$ βλέπουμε ότι*

$$df(t, X_t) = exp(\sigma t)dB_t$$

*η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί αμέσως και να δώσει*

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t exp(at)dB_t \Longrightarrow$$

$$exp(at)X_t - x = \int_0^t exp(at)dB_t$$

*από την οποία και συμπεραίνουμε ότι*

$$X_t = exp(-at)x + exp(-at)\int_0^t exp(at)dB_t$$

*Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διασπορά της διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck. Έχουμε λοιπόν*

$$E[X_t] = xexp(-at)$$

*και*

$$E[(X_t - E[X_t])^2] = exp(-2at)E\left[\left(\int_0^t exp(at)dB_t\right)^2\right]$$

$$= exp(-2at)\int_0^t exp(2at)dt = \frac{1}{2a}(1 - exp(-2at))$$

*Η στοχαστική αυτή διαφορική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα μοντέλο για τα επιτόκια. Τα επιτόκια μας δίνουν το πως η αξία του χρήματος σήμερα θα σχετίζεται με την αξία του χρήματος αύριο. Στην πράξη, τα επιτόκια δεν είναι σταθερά και μάλιστα μπορούμε να πούμε ότι υπόκεινται σε τυχαιότητα. Αν πάρουμε λοιπον το επιτόκιο $r$ σαν συνάρτηση του χρόνου θα έχουμε μία στοχαστική διαδικασία $r_t$. Οι τιμές των επιτοκίων κυμαίνονται γύρω από μία σταθερή τιμή. Ένα μοντέλο που έχει προταθεί για τις τιμές των επιτοκίων είναι το μοντέλο του Vasicek το οποίο είναι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής*

$$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sigma dB_t$$

*Η εξίσωση αυτή είναι μία γενίκευση της στοχαστικής διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck και η λύση της μπορεί να βρεθεί αναλυτικά με την ίδια μέθοδο όπως αυτή που χρησιμοποιήσαμε για την λύση της εξίσωσης Ornstein-Uhlenbeck.*

**Παράδειγμα 5.1.3 Η γέφυρα Brown** *Μία άλλη διαφορική εξίσωση που συναντάται συχνά στην θεωρία πιθανοτήτων είναι η στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt - dB_t$$

*με αρχική συνθήκη $X_0 = 0$. Η λύση της στοχαστικής αυτής διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η γέφυρα Brown (Brownian bridge). Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή θα πρέπει να εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(t,x) = g(t)x$ όπου $g(t)$ είναι μία $C^1$ συνάρτηση που θα καθορίσουμε αργότερα και θα θεωρήσουμε $x = X_t$. Με την εφαρμογή του λήμματος του Itô έχουμε*

$$df(t,X_t) = \left(\frac{dg}{dt} - \frac{g}{1-t}\right)X_t dt + g(t)dB_t$$

*οπότε επιλέγοντας*

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g}{1-t} \Longrightarrow g(t) = \frac{1}{1-t}$$

*παίρνουμε ότι*

$$df(t, X_t) = \frac{1}{1-t} dB_t$$

*η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί αμέσως δίνοντας*

$$\frac{1}{1-t} X_t - 0 = \int_0^t \frac{dB_t}{1-t}$$

*ή*

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_t}{1-t}$$

*Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διασπορά της γέφυρας Brown. Πράγματι έχουμε*

$$E[X_t] = (1-t) E\left[\int_0^t \frac{dB_t}{1-t}\right] = 0$$

*και*

$$E[X_t^2] = (1-t)^2 E\left[\left(\int_0^t \frac{dB_t}{1-t}\right)^2\right] = (1-t)^2 \int_0^t (1-s)^2 ds = t - t^2$$

*Η γέφυρα Brown έχει χρησιμοποιηθεί στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά για την μοντελοποίηση της διαδικασίας τιμών ορισμένων ομολόγων (zero-coupon bonds)(βλ. π.χ. [28]).*

**Παράδειγμα 5.1.4** *Οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη. Για παράδειγμα η στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$dX_t = \mid X_t \mid^\alpha dB_t$$

*έχει μοναδική λύση όταν $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ενώ μπορεί να έχει απειρία λύσεων όταν $< \alpha < \frac{1}{2}$.*

**Παράδειγμα 5.1.5** *Μία άλλη περίπτωση, διανυσματικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης η οποία δεν έχει καμία λύση είναι η ακόλουθη*

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t$$

*όπου $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$, $B_t = (B_{1,t}, B_{2,t})$ και*

$$\sigma(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} & -\frac{X_2}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} \\ \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} & \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} \end{pmatrix}$$

## 5.2 Ισχυρές και ασθενείς λύσεις

Οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων που αναφέραμε μέχρι τώρα βασίζονταν στην εξής φιλοσοφία: Έχοντας καθορίσει τους συντελεστές της εξίσωσης $f, g$ και έχοντας επίσης μία συγκεκριμένη κίνηση Brown $B_t$ και μία διήθηση $\mathcal{F}_t$ υπόψη ο σκοπός μας ήταν να καθορίσουμε μία στοχαστική διαδικασία (και συγκεκριμένα μία διαδικασία Itô ) $X_t$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dB_s$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με τον τρόπο αυτό ονομάζονται **ισχυρές λύσεις** (στρονγ σολυτιονς) της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Για μία ισχυρή λύση λοιπόν τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα $(f, g, B_t, \mathcal{F}_t)$ και το ζητούμενο είναι η διαδικασία Itô $X_t$.

Μπορούμε όμως να φανταστούμε και το ακόλουθο πρόβλημα: Τα δεδομένα είναι μόνο οι συναρτήσεις $(f, g)$ και τα ζητούμενα είναι η κατασκευή μίας διήθησης $\mathcal{F}_t$, μίας κίνησης Brown $\bar{B}_t$ και μίας διαδικασίας Itô $X_t$ τέτοιων ώστε να ισχύει η εξίσωση

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)d\bar{B}_s$$

Το ζητούμενο λοιπόν είναι τώρα οι $(X_t, \bar{B}_t, \mathcal{F}_t)$. Η τριπλέτα αυτή ονομάζεται **ασθενής λύση** (weak solution) της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Μία ισχυρή λύση μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι και ασθενής της λύση αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Η έννοια της μοναδικότητας μπορεί αν γενικευθεί και για μη ισχυρές λύσεις.

**Ορισμός 5.2.1** *Οι ασθενείς λύσεις της (5.1) έχουν την ιδιότητα της ασθενούς μοναδικότητας αν για οποιεσδήποτε δύο ασθενείς λύσεις $(\Omega, \mathcal{F}_t, P, B_t, X_t)$ και $(\Omega', \mathcal{F}'_t, P', B'_t, X'_t)$ οι στοχαστικές διαδικασίες $X_t$ και $X'_t$ έχουν την ίδια κατανομή.*

**Παράδειγμα 5.2.1** *Ας δούμε ένα παράδειγμα ασθενούς λύσης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$dX_t = sign(X_t)dB_t \tag{5.4}$$

*Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση του Tanaka. Έστω $X_t$ μία οποιαδήποτε κίνηση Brown $\bar{B}_t$ και $\mathcal{F}_t$ μία διήθηση (ως προς την οποία η $\hat{B}_t$ είναι κίνηση Brown). Ας ορίσουμε την $\tilde{B}_t$ ως το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô*

$$\tilde{B}_t := \int_0^t sign(\bar{B}_t)d\bar{B}_t \tag{5.5}$$

*Εφόσον έχουμε ορίσει $X_t := \bar{B}_t$ γράφοντας την (5.5) σε διαφορική μορφή παίρνουμε*

$$d\tilde{B}_t = sign(X_t)dX_t \Longrightarrow dX_t = sign(X_t)d\tilde{B}_t$$

*συνεπώς η $X_t = \bar{B}_t$ θα είναι μία ασθενής λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.4) αν η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown(φυσικά ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t$). Αυτό μπορεί να γίνει με εφαρμογή του θεωρήματος του Levy και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô(βλ. παράδειγμα 4.2.3).*

*Η εξίσωση του Tanaka δεν έχει ισχυρή λύση επειδή η συνάρτηση $sign(x)$ δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Lipschitz.*

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με ισχυρές λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

## 5.3 Πρώτη εφαρμογή στη χρηματοοικονομική

Στο τμήμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που είδαμε πιο πάνω για να διατυπώσουμε ένα μοντέλο για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τους Black και Scholes το 1973, οι οποίοι τιμήθηκαν για την συμβολή τους στην οικονομική επιστήμη με το βραβείο Nobel το 1997. Το μοντέλο αυτό αν και σχετικά απλό χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα στην πράξη.

Ας ξεκινήσουμε την μελέτη μας με την έννοια του παραγώγου συμβολαίου. Μιά και θα ασχοληθούμε εκτενώς με την μελέτη παραγώγων συμβολαίων αργότερα θα αναφέρουμε εδώ εισαγωγικά κάποια πράγματα για ένα συγκεκριμένο είδος παραγώγων συμβολαίων, τα δικαιώματα (options). Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι θα ασχοληθούμε με ένα δικαίωμα ανάκλησης (call option). Ένα δικαίωμα ανάκλησης, είναι ένα συμβόλαιο το οποίο δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει (εφόσον το επιθυμεί) έναν τίτλο σε κάποια προκαθορισμένη τιμή, μέχρι κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Το δικάιωμα ανάκλησης, πρέπει να αγοραστεί από τον κάτοχο του σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή και μπορεί να πουληθεί οποτεδήποτε (πρίν την λήξη του). Επι παραδείγματι, μπορεί κανείς να αγοράσει για 1000 δρχ. ένα δικαίωμα ανάκλησης που του επιτρέπει να αγοράσει τίτλους της Ελληνικής Διαστημικής Βιομηχανίας Α.Ε. προς 24000 το κομμάτι, την 30η Φεβρουαρίου 2002. Αν την ημερομηνία της λήξης του συμβολαίου οι τίτλοι της εταιρείας αυτής πωλούνται προς π.χ. 27000 το κομμάτι τότε ο κάτοχος του συμβολαίου ανάκλησης έχει κέρδος (27000-24000)-1000=2000 δρχ (εφόσον έχει πληρώσει και 1000 δρχ. για την κατοχή του δικαιώματος). Αν η τιμή των τίτλων την ημερομηνία λήξης των συμβολάιων, έχει πέσει παρακάτω απο τις 24000 δρχ. π.χ. οι τίτλοι της εταιρέιας αυτής πωλούνται προς 21000 τότε το δικαίωμα ανάκλησης δεν έχει καμία αξία, εφόσον κανείς δεν θα ενδιαφερθεί να αγοράσει τις μετοχές προς 24000 αφού μπορεί στην ελεύθερη αγορά να τις αγοράσει φθηνότερα. Ο κάτοχος του δικαιώματος ανάκλησης λοιπόν έχει χάσει απο πάνω και τις 1000 δρχ τις οποίες έδωσε για την αγορά του δικαιώματος ανάκλησης. Τα δικαιώματα έχουν διπλή χρήση. Μπορούν είτε να χρησιμοποιηθούν για τη παραγωγή κέρδους (όπως στην παραπάνω περίπτωση) είτε για την εξασφάλιση ενός χαρτοφυλακίου από περιουσιακά στοιχεία (διαχείριση κινδύνου). Θα επανέλθουμε στα δικαιώματα και τις πιθανές τους χρήσεις αργότερα.

Ένα δικαίωμα μπορεί να μεταβιβαστεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από την λήξη του. Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι: ποιά είναι η δίκαια τιμή ενός δικαιώματος μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή πρίν από την λήξη του.

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής έχει στην διάθεση του έναν αριθμό τίτλων μετοχών, έναν αριθμό από δικαιώματα και κάποιο ποσό επενδυμένο σε κάποια επένδυση χωρίς ρίσκο (π.χ. τραπεζικός λογαριασμός ή ομόλογο). Μία τέτοια συλλογή περιουσιακών στοιχείων ονομάζεται χαρτοφυλάκιο. Αν $N_1$ είναι ο αριθμός των τίτλων των μετοχών που έχει στην διάθεση του, $N_2$ είναι ο αριθμός των δικαιωμάτων, και $Q$ είναι το ποσό που είναι τοποθετημένο σε ομόλογα, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού είναι

$$V(t) = N_1(t)S(t) + N_2(t)W(t) + Q(t)$$

όπου $S(t)$ είναι η αξία του κάθε τίτλου μετοχών και $W(t)$ είναι η αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή $t$.

Είναι γνωστό σε όλους ότι οι τιμές των μετοχών παρουσιάζουν διακυμάνσεις. Ένα πιθανό μοντέλο για τις διακυμάνσεις αυτές μπορεί να είναι το ακόλουθο

$$\frac{dS_t}{S_t} = adt + \sigma dB_t.$$

Το μοντέλο αυτό προτάθηκε για πρώτη φορά στις αρχές του 20ου αιώνα, από τον Γάλλο μαθηματικό Bachelier (ο οποιος μάλιστα ήταν και φοιτητής του H. Poincaré). Το μοντέλο αυτό μας παρέχει την σχετική μεταβολή της τιμής μίας μετοχής, η οποιά θεωρείται πως αποτελείται από μία σταθερή ταχύτητα και από μία διακύμανση η οποία είναι της μορφής μίας κίνησης Brown. Στο απλό αυτό μοντέλο θα θεωρήσουμε ότι οι παράμετροι $a$ και $\sigma$ είναι σταθερές, αλλά το μοντέλο όπως θα δούμε παρακάτω μπορεί να γενικευθεί και για μη σταθερές παραμέτρους. Η παράμετρος $\sigma$ καλείται πτητικότητα (volatility ).

Είναι λογικό να αναμένουμε ότι η τιμή ενός δικαιώματος κάποια χρονική στιγμή $t$ εξαρτάται από την τιμή της μετοχής $S$ την χρονική στιγμή αυτή. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$W(t) = F(t, S)$$

όπου για τεχνικούς λόγους η συνάρτηση $F$ θεωρείται να είναι $C^{1,2}$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Itô μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή στην αξία του δικαιώματος σαν αποτέλεσμα της μεταβολής στην αξία της μετοχής

$$\begin{aligned} dW_t &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(dS)^2 \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S}aS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial F}{\partial S}\sigma S dB_t \\ &:= a_W W_t dt + \sigma_W W_t dB_t \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την αλλαγή της αξίας του χαρτοφυλακίου στον χρόνο. Για απλούστευση θα θεωρήσουμε ότι η μεταβολή της αξίας του ομολόγου στον χρόνο ακολουθεί τον νόμο $dQ_t = rQdt$ όπου $r$ είναι το επιτόκιο το οποίο μπορεί να είναι και (ντετερμινιστική) συνάρτηση του χρόνου. Ας κάνουμε επίσης και την περαιτέρω παραδοχή ότι τα $N_1$ και $N_2$ μεταβάλλονται σε χρονικές κλίμακες που είναι πολύ πιο αργές από την χρονική κλίμακα στην οποία μεταβάλλονται οι αξίες των μετοχών και των δικαιωμάτων $S$ και $W$ αντίστοιχα. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε πως $dN_{1t} \simeq 0$ και $dN_{2t} \simeq 0$. (self financing ? ) Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $V$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
dV_t &= N_1 dS_t + N_2 dW_t + dQ_t \\
&= N_1(adt + \sigma dB_t)S \\
&+ N_2((\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S}aS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial F}{\partial S}\sigma S dB_t) \\
&+ rQ_t dt
\end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με το $V_t$ παίρνουμε

$$\frac{dV_t}{V_t} = (adt + \sigma dB_t)W_{1t} + (a_W dt + \sigma_W dB_t)W_{2t} + rdtW_{3t}$$

όπου

$$W_{1t} = \frac{N_1 S_t}{P_t}, \;\; W_{2t} = \frac{N_2 W_t}{P_t}, \;\; W_{3t} = \frac{Q_t}{P_t} = 1 - W_1 - W_2.$$

Τώρα μπορούμε να θέσουμε το εξής πρόβλημα: Πως μπορούμε να επιλέξουμε τις αναλογίες των $W_{1t}$ και $W_{2t}$ κατά τρόπο ώστε το χαρτοφυλάκιο μας να μην εμπεριέχει κίνδυνο· Ο τρόπος ορισμού του κινδύνου δεν ειναι μονοσήμαντα ορισμένος και το θέμα αυτό αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο της χρηματοοικονομικής. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα σαν μέτρο του κινδύνου την διασπορά (διακύμανση) του $dP_t/P_t$. Με τον όρο χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο θα εννοούμε εδώ ένα χαρτοφυλάκιο για το οποίο η διακύμανση του $dP_t/P_t$ θα μηδενίζεται δηλαδή η επιλογή του χαρτοφυλακίου μας θα είναι τέτοια ώστε η τοις εκατό μεταβολή της αξίας του δεν θα έχει διακυμάνσεις στον χρόνο. Υπολογίζοντας την διακύμανση του $dP_t/P_t$ παίρνουμε

$$Var\left(\frac{dP_t}{P_t}\right) = (\bar{W_1}\sigma + \bar{W_2}\sigma_W)^2 dt = 0$$

(όπου θέσαμε τον όρο αυτό ίσο με το 0, εφόσον ζητάμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο δεν εμπεριέχει κίνδυνο).

Η αναμενόμενη (μέση τιμή) της απόδοσης ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου που δεν περιέχει κίνδυνο, θα πρέπει να είναι ίση με την απόδοση του περιουσιακού στοιχείου το οποίο δεν έχει κίνδυνο, δηλαδή του ομολόγου (ή της τραπεζικής κατάθεσης). Η απαίτηση αυτή σχετίζεται με το ότι αν αυτό δεν ήταν αληθινό (π.χ. ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο είχε μεγαλύτερη απόδοση από το ομόλογο) τότε κάποιος θα μπορούσε να δανειστεί κάποιο ποσό από την τράπεζα, με επιτόκιο $r$ να το τοποθετήσει στο εν λόγω χαρτοφυλάκιο, και από τα κέρδη του να πληρώσει το δάνειο στην τράπεζα και να έχει έτσι σταθερό κέρδος χωρίς ρίσκο και χωρίς να πληρώσει τίποτα από το προσωπικό του κεφάλαιο! Μία τέτοια ευκαιρία ονομάζεται arbitrage και αν και είναι το όνειρο του κάθε ενός, δεν είναι γενικά αποδεκτή από την θεωρία γιατί θεωρείται ότι δημιουργεί αστάθειες στην αγορά. Όταν ζητούμε λοιπόν να βρούμε την 'δίκαιη' τιμή ενός παραγώγου συμβολαίου συνήθως δεν δεχόμαστε την ύπαρξη arbitrage .

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι το ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο αποτελείται από την επιλογή $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$ σύμφωνα με την παραπάνω συζήτηση θα πρέπει να ισχύει

$$E\left(\frac{dP_t}{P_t}\right) = \{a\bar{W}_1 + a_W\bar{W}_2 + r(1-\bar{W}_1-\bar{W}_2)\}dt = rdt$$

Από τις δύο αυτές συνθήκες μπορούμε τώρα να πάρουμε συνθήκες που συνδέουν τις $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$ το επιτόκιο $r$ και τα $a$ και $a_W$ που περιέχουν πληροφορία σχετικα με το πως συνδέεται η μεταβολή της τιμής του δικαιώματος με την αλλαγή της τιμής της μετοχής. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{W}_1}{\bar{W}_2} &= -\frac{\sigma_W}{\sigma} \\
r &= a\bar{W}_1 + a_W\bar{W}_2 + r(1-\bar{W}_1-\bar{W}_2)
\end{aligned}$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι ένα ομογενές σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και μπορούν να έχουν μη μηδενική λύση αν ισχύει η συνθήκη συμβατότητας

$$\frac{a-r}{\sigma} = \frac{a_W - r}{\sigma_W}.$$

Από το ορισμό του $a$ και του $\sigma$ είναι καθαρό ότι η συνθήκη συμβατότητας μας δίνει μία γραμμική μερική διαφορική εξίσωση οι λύσεις της οποίας παρέχουν την τιμή του παραγώγου συμβολαίου $F(S,t)$. Στην ειδική περίπτωση που η πτητικότητα και η ταχύτητα της αποδόσεως της μετοχής είναι σταθερές παίρνουμε την γνωστή εξίσωση Black-Scholes

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - rF = 0$$

η λύση της οποίας μπορεί να δώσει την βέλτιστη τιμή που μπορεί κανείς να πληρώσει για το συμβολαιο αυτό με τις παραπάνω παραδοχές.

Μία μερική διαφορική εξίσωση για να λυθεί πρέπει να συμπληρωθεί και από μία αρχική συνθήκη. Στην περίπτωση ενός δικαιώματος ανάκλησης η 'αρχική' συνθήκη θα είναι ότι γνωρίζουμε την αξία του παραγώγου συμβολαίου κατά την λήξη του συμβολαίου, η οποία δεν είναι τίποτε άλλο από την απόδοση του. Για παράδειγμα, αν το δικαίωμα μας επιτρέπει να αγοράσουμε μία μετοχή στην τιμή $K$, η αξία του δικαιώματος θα είναι $S_T - K$ αν $S_T > K$ (αγοράζουμε την προκαθόρισμένη τιμή $K$ και έχουμε κέρδος $S_T - K$) και 0 αν $S_T < K$ (αν μπορούμε να αγοράσουμε την μετοχή στην ελεύθερη αγορά για $S_T$ για πιο λόγο να ενδιαφερθούμε για ένα δικαίωμα το οποίο θα μας επιτρέψει να την αγοράσουμε ακριβότερα·). Άρα η εξίσωση Black-Scholes θα πρέπει να συμπληρωθεί με την αρχική συνθήκη

$$F(S,T) = max(S_T - K, 0)$$

Παρόλο που η εξίσωση αυτή φαίνεται αρκετά περίπλοκη, υπάρχει ένας απλός μετασχηματισμός μεταβλητών που μπορεί να την μετατρέψει στην εξίσωση διάχυσης, η οποία μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι η τιμή ενός δικαιώματος ανάκλησης, όπως αποτιμάται από το μοντέλο Black-Scholes είναι

$$\begin{aligned} F(S,t) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 &= \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} exp - \frac{1}{2}s^2 ds. \end{aligned}$$

Η παραπάνω απλή ανάλυση δείχνει την βασική ιδέα του πως μπορεί να αποτιμηθούν ορισμένα παράγωγα συμβόλαια με την προϋπόθεση της απουσίας arbitrage στην αγορά. Το μοντέλο αυτό είναι εξαιρετικά δημοφιλές και έχει αμέτρητες παραλλαγές και γενικεύσεις. Θα επανέλθουμε σε αυτό αργότερα με πιο αυστηρά εργαλεία της στοχαστικής ανάλυσης αλλά στο συγκεκριμένο σημείο το αναφέραμε σαν ένα παράδειγμα της χρήσης των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων στην χρηματοοικονομική.

## 5.4 Δύο σημαντικές ιδιότητες

Θα δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες, που διευκολύνουν ιδιαίτερα τους υπολογισμούς, την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov.

### 5.4.1 Η ιδιότητα Markov

Είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ότι η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία που έχει την ιδιότητα Markov. Μπορούμε να δούμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô επάνω στην κίνηση Brown και οι διαδικασίες Itô, κάτω από ορισμένες συνθήκες ικανοποιούν την ιδιότητα Markov. Κατ' επέκταση θα δείξουμε εδώ ότι οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ιδιότητα Markov.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 5.4.1 Η ιδιότητα Markov** *Αν $X_t$ είναι η λύση της αυτόνομης*[2] *στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.1), και $f$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση*

[2] Δηλαδή της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αν οι συντελεστές $b$ και $\sigma$ δεν περιέχουν ρητά τον χρόνο, $b = b(X_t)$, $\sigma = \sigma(X_t)$.

*τότε για οποιοδήποτε $t$ και $s$ όπου $t, s \geq 0$*

$$E_x[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = E_{X_s}[f(X_t)]$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας $X$ η οποία ξεκινάει στο σημείο $x$ την χρονική στιγμή 0 και 'τρέχει' για χρονικό διάστημα $t+s$, δηλαδή ουσιαστικά είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X_{t+s}$ αν $X_0 = x$. Το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας $X$ η οποία ξεκίνησε την χρονική στιγμή 0 στο σημείο $X_s$ (δηλαδή στο σημείο που έφτασε η αρχική διαδικασία την χρονική στιγμή $s$) και τρέχει για χρονικό διάστημα $t$.

Η διαισθητική ερμηνεία της ιδιότητας Markov είναι ότι η μελοντική συμπεριφορά της διαδικασίας, δεδομένου ότι έγινε μέχρι την χρονική στιγμή $t$, μπορεί να καθοριστεί απλά και μόνο από σαν να ξεκινούσαμε μία νέα διαδικασία διάχυσης στην θέση $X_t$. Με άλλα λόγια, η διαδικασία διάχυσης δεν έχει μνήμη του παρελθόντος της. Αυτό είναι σε πλήρη αναλογία με την ιδιότητα Markov για την κίνηση Brown. Η ιδιότητα αυτή συνεχίζει να ισχύει ακόμα και αν ο χρόνος $t$ αντικατασταθεί με ένα τυχαίο χρόνο π.χ. έναν χρόνο στάσης. Με άλλα λόγια, οι λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ισχυρή ιδιότητα Markov. Αυτό όμως συμβαίνει κάτω από ορισμένες σχετικά αυστηρές συνθήκες.

Αυτό που είναι ενδιαφέρον είναι ότι η ιδιότητα Markov μπορεί να γενικευθεί και για λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες έχουν συντελεστές που εξαρτώνται εκπεφρασμένα από τον χρόνο (μη αυτόνομες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις).

Θα ξεκινήσουμε με ένα ισοδύναμο ορισμό μίας διαδικασίας Markov.

**Ορισμός 5.4.1** *Μία $d-$διάστατη στοχαστική διαδικασία $X_t$ η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t$ ονομάζεται διαδικασία Markov αν για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και για κάθε $0 \leq s \leq t$ (πεπερασμένα) ισχύει*

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \mid X_s)$$

**Σχόλιο:** Με $P(. \mid X_s)$ εννοούμε την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή $X_s$. Με $P(. \mid \mathcal{F}_s)$ εννοούμε την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s$ ως προς την οποία είναι μετρήσιμες οι τυχαίες μεταβλητές $X_r$ για $0 \leq r \leq s$. Μία πιθανή επιλογή για την $\mathcal{F}_s$ μπορεί να είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την στοχαστική διαδικασία $X_t$ δηλαδή $\mathcal{F}_s = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s)$.

Αυτή η ιδιότητα είναι μία διαφορετική έκφραση της ιδιότητας της στοχαστικής διαδικασίας $X_t$ ότι το μέλλον και το παρελθόν της διαδικασίας είναι ανεξάρτητα όταν είναι γνωστό το παρόν της διαδικασίας. Με άλλα λογια αυτό μπορεί να εκφραστεί με το ότι η διαδικασία 'ξεχνάει' το παρελθόν της. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να δούμε ότι είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα

$$E[\phi(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[\phi(X_t) \mid X_s]$$

για κάθε φραγμένη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ η οποία είναι Borel μετρήσιμη.

Η υπό συνθήκη μέση τιμή $E[\phi(X_t) \mid X_s]$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας $X_t$ που 'ξεκινάνε' στο σημείο $X_s$ την χρονική στιγμή $s$ και μπορούμε να την συμβολίσουμε με $E_{s,X_s}[\phi(X_t)]$. Η μέση τιμή αυτή μπορεί να εκφραστεί και με την βοήθεια της **πιθανότητας μετάβασης** $p(s,x;t,A) := P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ της διαδικασίας Markov $X_t$. Συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση

$$v(s,x) := E_{s,x}[\phi(X_t)] := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)p(s,x;t,y)dy$$

Η μέση τιμή $E_{s,X_s}[\phi(X_t)]$ είναι η συνάρτηση $v(s,x)$ υπολογισμένη στο $x = X_s$. Η πιθανότητα μετάβασης $p(x,s;\cdot,t)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $0 \leq s \leq t$ (πεπερασμένα). Η πιθανότητα μετάβασης $p(s,x;t,A)$ μπορεί να ερμηνευθεί σαν η πιθανότητα να βρεθεί η διαδικασία $X_t$, η οποία ξεκινάει την χρονική στιγμή $s$ στο σημείο $x$, στο σύνολο $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ την χρονική στιγμή $t$. Χρήσιμη ποσότητα είναι και η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης $p(s,x;t,y)$ η οποία μπορεί να οριστεί από την σχέση

$$p(s,x;t,A) = \int_A p(s,x;t,y)dy$$

Για την πιθανότητα μετάβασης ισχύει η εξίσωση Chapman-Kolmogorov σύμφωνα με την οποία

$$p(s,x;t,A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(r,y;t,A)p(s,x;r,y)dy, \quad \forall s \leq r \leq t$$

Η εξίσωση αυτή λέει ότι η μετάβαση από το $x$ την χρονική στιγμή $s$ στο $A$ την χρονική στιγμή $t$ μπορεί να γραφεί σαν η μετάβαση από το $(x,s)$ στο ενδιάμεσο σημείο $y$ την χρονική στιγμή $r$ και κατόπιν σαν η μετάβαση από το $(y,r)$ στο $A$ την χρονική στιγμή $t$. Πρέπει δε να λάβουμε υπόψη όλα τα πιθανά ενδιάμεσα σημεία $y$. Αυτό γίνεται με την ολοκλήρωση επάνω σε όλα τα $y \in \mathbb{R}^d$.

Στην περίπτωση που η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης μεταξύ των $(s,x)$ και $(t,y)$ εξαρτάται μόνο από την χρονική διάρκεια $t-s$ και όχι από τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που ξεκινήσαμε λέμε ότι η διαδικασία Markov είναι **χρονικά ομογενής**. Για χρονικά ομογενείς διαδικασίες Markov ισχύει $p(s,x;t,y) = p(0,x;t-s,y) := p(t-s,x;y)$. Η συνάρτηση $p(t,x;y)$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα (ή καλύτερα στην πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης) της στοχαστικής διαδικασίας από το σημείο $x$ στο σημείο $y$ σε χρονικό διάστημα $t-s$. Δεν παίζει κανένα ρόλο το πότε ξεκινήσαμε την διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται σημαντικά.

Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει ότι ένας τρόπος να παράγουμε διαδικασίες Markov είναι μέσω των λύσεων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

**Θεώρημα 5.4.2 (Η ιδιότητα Markov )** *Έστω $X_t$ η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t$$

*όπου οι συντελεστές πληρούν τις συνθήκες Lipschitz και την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Τότε η $X_t$ είναι μία διαδικασία Markov με πιθανότητα μετάβασης που ορίζεται από την σχέση*

$$p(s,x;t,A) = P(X_t^{(s,x)} \in A)$$

*όπου $X_t^{(s,x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$X_t^{(s,x)} = x + \int_s^t f(r, X_r^{(s,x)})dr + \int_s^t g(r, X_r^{(s,x)})dB_r$$

*για $t \geq s$. Η $X_t^{(s,x)}$ ουσιαστικά είναι η λύση της αρχικής στοχαστικής εξίσωσης με αρχική τιμή $x$ την χρονική στιγμή $s$ ή αλλιώς για $X_s = x$.*

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου □

Αν η στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι **αυτόνομη**, δηλαδή αν $b(t, X_t) = b(X_t)$ και $\sigma(t, X_t) = \sigma(X_t)$, τότε η διαδικασία Markov $X_t$ θα είναι και **χρονικά ομογενής**.

**Σχόλιο:** Για να ισχύει η ιδιότητα Markov για την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αρκεί να έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Συνεπώς, η ιδιότητα Markov μπορεί να ισχύει και μόνο αν ισχύουν τοπικές ιδιότητες Lipschitz.

### 5.4.2 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορούμε να δείξουμε ότι η ιδιότητα Markov για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων ισχύει και για χρόνους στάσης, δηλαδή λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ισχυρή ιδιότητα Markov. Συγκεκριμένα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 5.4.3 ( Η ισχυρή ιδιότητα Markov)** *Έστω $X_t$ η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

*Ας θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις γραμμικές συνθήκες αύξησης δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

$$| b(t,x) - b(t,y) |^2 \vee | \sigma(t,x) - \sigma(t,y) |^2 \leq \bar{K} | x - y |^2$$
$$| b(t,x) |^2 \vee | \sigma(t,x) |^2 \leq K(1 + | x |^2)$$

*για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$. Τότε, η στοχαστική διαδικασία $X_t$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov.*

**Απόδειξη:** Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου □.

### 5.4.3 Εφαρμογές της ιδιότητας Markov

Θα δώσουμε τώρα ορισμένες εφαρμογές και παραδείγματα σχετικά με την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

**Παράδειγμα 5.4.1** *Η κίνηση Brown με ταχύτητα $v$ είναι μία διαδικασία Markov με πυκνότητα μετάβασης*

$$p(t_0, x; t_1, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} exp\left\{-\frac{(y - (x + v(t_1 - t_0)))^2}{2(t_1 - t_0)}\right\}$$

*Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό αρκεί να δούμε ότι η κίνηση Brown με ταχύτητα $v$ είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dX_t = vdt + dB_t$$

*Οι συντελεστές της εξίσωσης $b(t,x) = v$ και $\sigma(t,x) = 1$ πληρούν τις συνθήκες του θεωρήματος 5.4.2 συνεπώς η λύση της $X_t$ είναι μία διαδικασία Itô η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα Markov. Η πιθανότητα μετάβασης θα δίνεται από την σχέση $p(t_0, x; t_1, A) = P(X_{t_1}^{(t_0,x)} \in A)$ όπου $X^{(t_0,x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$X_t^{(t_0,x)} = x + \int_{t_0}^{t_1} vds + \int_{t_0}^{t_1} dB_s = x + (t_1 - t_0)v + (B_{t_1} - B_{t_0})$$

*Συνεπώς*

$$p(t_0, x; t_1, A) = P(x + (t_1 - t_0)v + (B_{t_1} - B_{t_0}) \in A)$$

*Επιλέγοντας σαν $A$ το διάστημα $[y, y + dy]$ μπορούμε να δούμε ότι*

$$\begin{aligned} p(t_0, x; t_1, y)dy &= P(B_{t_1} - B_{t_0} \in [y - x - (t_1 - t_0)v, y - x - (t_1 - t_0)v + dy]) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1 - t_0}} \exp\left\{-\frac{(y - (x + v(t_1 - t_0)))^2}{2(t_1 - t_0)}\right\} dy \end{aligned}$$

*γιατί όπως γνωρίζουμε η κατανομή της διαφοράς $B_{t_1} - B_{t_0}$ είναι η κατανομή $N(0, t_1 - t_0)$. Έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο.*

**Παράδειγμα 5.4.2** *Η γεωμετρική κίνηση Brown $X_t = exp(a\,t + b\,B_t)$, όπου $B_t$ είναι μία κίνηση Brown και $a, b$ σταθερές, είναι μία διαδικασία Markov με πυκνότητα μετάβασης*

$$p(t_0, x; t_1, y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(t_1 - t_0)}\left[ln\frac{y}{x} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0)\right]^2\right\}$$

*Ο παραπάνω ισχυρισμός μπορεί να δειχθεί ως εξής. Γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική κίνηση Brown είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

*όπου οι σταθερές $r, \sigma$ σχετίζονται με τις σταθερές $a, b$ με τις σχέσεις*

$$a = r - \frac{\sigma^2}{2}, \quad b = \sigma$$

*Η στοχαστική διαφορική εξίσωση αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες των θεωρημάτων 5.4.2 και 5.4.3, συνεπώς η λύση της είναι μία στοχαστική διαδικασία η οποία ικανοποιεί τόσο την ιδιότητα Markov όσο και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Η πιθανότητα μετάβασης θα δίνεται από την σχέση $p(t_0, x; t_1, A) = P(X_{t_1}^{(t_0,x)} \in A)$ όπου $X^{(t_0,x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$X_t^{(t_0,x)} = x + \int_{t_0}^{t_1} r X_s^{(t_0,x)} ds + \int_{t_0}^{t_1} \sigma X_s^{(t_0,x)} dB_s$$

*Μπορούμε να δούμε κάνοντας χρήση του λήμματος του Itô, ότι η στοχαστική διαδικασία $X_t^{(t_0,x)}$ θα δίνεται από την σχέση*

$$X_t^{(t_0,x)} = x \exp(a(t_1 - t_0) + b(B_{t_1} - B_{t_0}))$$

*Συνεπώς*

$$p(t_0, x; t_1, A) = P(x \exp(a(t_1 - t_0) + b(B_{t_1} - B_{t_0})) \in A)$$

*Παίρνοντας $A = [y, y + dy]$, λαμβάνοντας υπόψη ότι $B_{t_1} - B_{t_0} \sim N(0, t_1 - t_0)$, και μετά από αρκετή και επίπονη άλγεβρα καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.*

**Παράδειγμα 5.4.3** *Έστω $X_t$ η διαδικασία Itô που είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dB_t$$

*Ορίζουμε την συνάρτηση $v(t, x) := E_{t,x}[h(X(T))]$ όπου $h(x)$ είναι μία δεδομένη συνάρτηση και $0 \le t \le T$. Με $E_{t,x}[h(X_T)]$ συμβολίζουμε την μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης $h$ υπολογισμένη στα $X_T$ όπου $X_T$ είναι οι τιμές της διαδικασίας $X_s$ την χρονική στιγμή $T$, δεδομένου ότι η $X_t$ 'ξεκινάει' την χρονική στιγμή $t$ στο σημείο $x$. Δείξτε ότι αν $X_0 = \xi$, η στοχαστική διαδικασία $v(t, X_t)$ είναι martingale δηλαδή ισχύει $E[v(t, X_t) \mid \mathcal{F}_s] = v(s, X_s)$.*

*Η $X_t$ ικανοποιεί την ιδιότητα Markov. Συνεπώς*

$$E[h(X_T) \mid \mathcal{F}_s] = E_{t,X_t}[h(X_T)] = v(t, X_t)$$

*Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής μπορούμε να γράψουμε*

$$\begin{aligned} E[v(t, X_t) \mid \mathcal{F}_s] &= E[E[h(X_T) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] \\ = E[h(X_T) \mid \mathcal{F}_s] &= E_{s,X_s}[h(X_T)] = v(s, X_s) \end{aligned}$$

*Στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε ξανά την ιδιότητα Markov για την στοχαστική διαδικασία $X_t$.*

## 5.5 Αλλαγή μέτρου

Θα ασχοληθούμε τώρα με ένα θεώρημα το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στο να μελετήσουμε το πως συνδέονται οι λύσεις δύο στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες έχουν διαφορετικές ταχύτητες. Το θεώρημα αυτό που οφείλεται στον Girsanov και που σχετίζεται επίσης και με κάποια προγενέστερα αποτελέσματα των Cameron και Martin ονομάζεται και θεώρημα αλλαγής μέτρου, και μας επιτρέπει να παράγουμε λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων από γνωστές λύσεις άλλων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετά τεχνική και απαιτεί κάποια στοιχεία θεωρίας μέτρου.

Πριν παρουσιάσουμε το θεώρημα αυτό θα πρέπει να θυμήσουμε τον ορισμό του ισοδύναμου μέτρου.

**Ορισμός 5.5.1 Ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας** *Δύο μέτρα πιθανότητας $Q$ και $P$ ονομάζονται* **ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας** *αν για κάθε γεγονός $A$, $P(A) = 0$ αν και μόνο αν $Q(A) = 0$.*

Στη περίπτωση αυτή υπάρχει πάντοτε μία τυχαία μεταβλητή $\xi$ η οποία ονομάζεται η παράγωγος κατά Radon-Nikodym του $Q$ ως προς το $P$ με την ακόλουθη ιδιότητα:
Αν η $Z$ είναι τέτοια ώστε [3] $E_Q[| Z |] < \infty$ τότε $E_Q[Z] = E_P[\xi Z]$. Ένας αρκετά συνηθισμένος συμβολισμός είναι $\xi = \frac{dQ}{dP}$.

Η ισχύς του παραπάνω ισχύρισμού εξασφαλίζεται από το θεώρημα Radon-Nikodym το οποίο και παραθέτουμε:

**Θεώρημα 5.5.1 (Το θεώρημα Radon-Nikodym)** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας διαχωρίσιμος χώρος πιθανοτήτων και έστω $P$ και $Q$ πεπερασμένα μέτρα που ορίζονται στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(*i*) *Για κάθε $A \in \mathcal{F}$ ισχύει $P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0$*

(*ii*) *Υπάρχει $k \in L^1$, $k \geq 0$ τέτοιο ώστε $Q(A) = \int_A k dP$*

*Η πυκνότητα $k$ ονομάζεται και παράγωγος Radon-Nikodym και συμβολίζεται $k = \frac{dQ}{dP}$.*

Για την απόδειξη και περαιτέρω στοιχεία για το θεμελιώδες αυτό θεώρημα της πραγματικής ανάλυσης παραπέμπουμε π.χ. στον Rudin [34].

**Σχόλια:**(1) Ένας χώρος πιθανοτήτων ονομάζεται **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει μία ακολουθία η οποία είναι πυκνή στον $L^1(P)$

[3] Ελπίζουμε πως μέχρι τώρα θα έχει γίνει ξεκάθαρο στους αναγνώστες ότι αν έχουμε μία τυχαία μεταβλητή $\xi$, μπορούμε να ορίσουμε την μέση τιμή της ως προς **οποιοδήποτε** μέτρο πιθανότητας. Η απάντηση που θα πάρουμε θα εξαρτάται βεβαίως από την επιλογή του μέτρου πιθανότητας. Εφόσον ο ορισμός της martingale χρησιμοποιεί την έννοια της μέσης τιμής και της υπό συνθήκη μέσης τιμής μπορούμε να δούμε από τα παραπάνω ότι μία διαδικασία μπορεί να είναι martingale ως προς κάποιο μέτρο αλλά όχι martingale ως προς κάποιο άλλο μέτρο! Με τον ίδιο τρόπο, μία διαδικασία μπορεί να είναι κίνηση Brown ως προς κάποιο μέτρο αλλά όχι ως προς κάποιο άλλο.

(2)Το θεώρημα Radon-Nikodym δεν περιορίζεται μόνο σε χώρους πιθανοτήτων αλλά ισχύει και για γενικότερους χώρους μέτρου.

Είμαστε λοιπόν σε θέση να παρουσιάσουμε το το θεώρημα του Girsanov:

**Θεώρημα 5.5.2** **(Girsanov )** *Ας θεωρήσουμε* $u_t = (u_{1,t}, ..., u_{n,t})$ *ένα διάνυσμα από (τετραγωνικά ολοκληρώσιμες) στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν την συνθήκη του Novikov*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u_s \cdot u_s ds\right)\right] < \infty.$$

*Έστω* $B_t$ *μία τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο* $P$. *Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία*

$$M_t^u = \exp\left[-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s \cdot u_s ds\right], \quad t \in [0,T].$$

*Η στοχαστική αυτή διαδικασία είναι μία martingale κάτω από το μέτρο Π. Θεωρείστε τώρα το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας* $Q^u$ *που ορίζεται από το*

$$\frac{dQ^u}{dP} = M_t^u$$

*Τότε η στοχαστική διαδικασία* $\bar{B}^u$ *που ορίζεται από την σχέση*

$$\bar{B}_t^u = B_t + \int_0^t u_s ds, \quad 0 \le t \le T$$

*είναι μία τυπική κίνηση Brown και μία martingale κάτω από το μέτρο* $Q^u$. *Επιπλέον, η* $\bar{B}^u$ *έχει την ιδιότητα αναπαράστασης martingale, δηλαδή για κάθε τοπική* $Q^u$*-martingale* $L_t$ *υπάρχει κάποια* $\phi$ *η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και τέτοια ωστε*

$$L_t = L_0 + \int_0^t \phi_s d\bar{B}_s^u, \quad t \le T$$

**Σχόλιο:** Στα επόμενα δεν θα χρησιμοποιήσουμε το πρόθεμα $u$ στο μέτρο $Q^u$ και στις στοχαστικές διαδικασίες $M_t^u$ και $\bar{B}_t^u$.

Σαν βοηθητικό στο θεώρημα αυτό έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 5.5.3** *Έστω* $X$ *η διαδικασία Itô*

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

*στο* $\mathbb{R}^n$. *Έστω* $\nu_t$ *ένα διάνυσμα ολοκληρώσιμων στοχαστικών διαδικασιών και ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα από στοχαστικές διαδικασίες* $u_t$ *οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και τέτοιες ώστε*

$$u_t \sigma_t = \mu_t - \nu_t$$

*Τότε αν η $M^u$ είναι martingale κάτω από το μέτρο $P$ (για το οποία αρκεί να ισχύει η συνθήκη του Novikov ) η $X$ είναι επίσης διαδικασία Itô με*

$$X_t = x + \int_0^t \nu_t ds + \int_0^t \sigma_s d\bar{B}_s^u$$

*όπου $\bar{B}_s^u$ είναι η τυπική κίνηση Brown ως προς το μέτρο $Q^u$ που ορίζεται ως*

$$\bar{B}_t^u = B_t + \int_0^t u_s ds$$

**Απόδειξη:** Η απόδειξη αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος 5.5.2.□

Το θεώρημα του Girsanov μπορεί να το δεί κανείς διαισθητικά ως εξής: Ας υποθέσουμε πως από τις κρατάμε τις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας $\bar{B}_t$ ως έχουν, δηλαδή κρατάμε μία συλλογή από συναρτήσεις της μορφής $\bar{B}_t(\omega)$ και αλλάζουμε την συχνότητα εμφάνισης των διαφορετικών $\omega$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να αλλάζουμε το μέτρο $P$ με το ισοδύναμο μέτρο $Q$. Κάτω από μία νέα, κατάλληλα επιλεγμένη, συχνότητα εμφάνισης των $\omega$ μπορεί η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ να είναι μία κίνηση Brown. Αυτό είναι σε αναλογία με τα παραδείγματα που είχαμε δεί στο κεφάλαιο σχετικά με τις διαδικασίες martingale (βλ. παραδείγματα 2.1.1- 2.1.3 και τα σχόλια που το ακολουθούν).

Το θεώρημα του Girsanov μας επιτρέπει να αλλάζουμε την ταχύτητα σε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και κατά κάποιο τρόπο συνδέει τις λύσεις διαφορετικών στοχαστικών εξισώσεων μεταξύ τους. Όπως θα δούμε και πιο κάτω μέσω της αναπαράστασης Feynman-Kac μπορεί και να συνδέει λύσεις διαφορετικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους μεταξύ τους.

Το θεώρημα του Girsanov είναι ένα θεμελιώδες και σημαντικό αποτέλεσμα για την στοχαστική ανάλυση.

**Παράδειγμα 5.5.1** *Μία κίνηση Brown με ταχύτητα. Στα πλαίσια του θεωρήματος του Girsanov θα μελετήσουμε την στοχαστική διαδικασία*

$$\bar{B}_t = \int_0^t u_s ds + B_t$$

*όπου $B_t$ είναι μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown και $u$ είναι μία μονοδιάστατη διαδικασία (τέτοια ώστε η $u_s$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη). Η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown με ταχύτητα $u_s$ (όχι απαραίτητα ντετερμινιστική). Ακολουθώντας το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία*

$$Z_t = \exp\left( -\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds \right)$$

*και το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας $Q$ που ορίζεται έτσι ώστε*

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, \ \forall A \in \mathcal{F}, \ t < T$$

*Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $\bar{P}$. Αποδείξτε ότι*
*(1) η στοχαστική διαδικασία $Z_t$ είναι μία martingale κάτω απο το μέτρο πιθανότητας $P$ (κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία $B_t$ είναι μία κίνηση Brown). και*
*(2) η στοχαστική διαδικασία $Z_t^{-1}$ είναι μία martingale κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\bar{P}$ (κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown).*

**Απόδειξη:** *(1) Θα γράψουμε την $Z_t$ σαν $Z_t = exp(Y_t)$, όπου*

$$Y_t = -\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds$$

*και θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Itô για να υπολογίσουμε το διαφορικό της $Z_t$:*

$$dZ_t = \exp(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\exp(Y_t)(dY_t)^2$$

*όπου*

$$\begin{aligned} dY_t &= -u_t dB_t - \frac{1}{2}u_t^2 dt \\ (dY_t)^2 &= -u_t^2 (dB_t)^2 = -u_t^2 dt \end{aligned}$$

*(χρησιμοποιήσαμε τους κανόνες του λογισμού του Itô). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην παραπάνω έχουμε ότι*

$$dZ_t = \exp(Y_t)u_t dB_t = -Z_t u_t dB_t \Longrightarrow Z_t = Z_0 - \int_0^t Z_s u_s dB_s$$

*Το τελευταίο είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην στοχαστική διαδικασία $B_t$ η οποία είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $P$. Από τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να δούμε πως η $Z_t$ είναι μία martingale κάτω από το μέτρο $P$.*

*Ας τονίσουμε εδώ ότι η $Z_t$* **δεν** *είναι martingale κάτω από το μέτρο $\bar{P}$! Αυτό γιατί η $B_t$* **δεν** *είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο αυτό!*

*(2) Μια και θα εργαστούμε κάτω από το μέτρο $\bar{P}$ θα εκφράσουμε όλα τα διαφορικά συναρτήσει της στοχαστικής διαδικασίας $\bar{B}_t$ η οποία γνωρίζουμε ως είναι και μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο αυτό. Από τον ορισμό της $\bar{B}_t$ έχουμε*

$$d\bar{B}_t = u_t dt + dB_t$$

*οπότε και*

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds\right) = \exp\left(-\int_0^t u_s d\bar{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds\right)$$

*Συνεπώς* $Z_t^{-1} = \exp(-Y_t)$ *όπου τώρα* $Y_t = -u_t d\bar{B}_t + \frac{1}{2}u_t^2 dt$. *Θα εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στο* $Z_t^{-1}$ *και θα πάρουμε*

$$d(Z_t^{-1}) = \exp(-Y_t)\left(dY_t + \frac{1}{2}(dY_t)^2\right)$$

*Εφόσον εργαζόμαστε κάτω από το μέτρο* $\bar{P}$ *(κάτω από το οποίο η διαδικασία* $\bar{B}_t$ *είναι μία κίνηση Brown ) οι κανόνες του λογισμού του Itô τώρα θα είναι* $d\bar{B}_t d\bar{B}_t = dt$ *και θα έχουμε*

$$dY_t = u_t^2 d\bar{B}_t d\bar{B}_t = u_t^2 dt$$

*οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι*

$$d(Z_t^{-1}) = \exp(-Y_t) u_t d\bar{B}_t \Longrightarrow Z_t^{-1} = Z_0^{-1} + \int_0^t Z_s^{-1} u_s d\bar{B}_s$$

*Εφόσον κάτω από το μέτρο* $\bar{P}$ *η στοχαστική διαδικασία* $\bar{B}_t$ *είναι μία κίνηση Brown από τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος βλέπουμε ότι η* $Z_t^{-1}$ *(που μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην* $\bar{B}_t$*) θα είναι μία martingale κάτω από το μέτρο αυτό. Βέβαια η* $Z_t^{-1}$ **δεν** *είναι μία martingale κάτω από το μέτρο* $P$*!*

**Παράδειγμα 5.5.2 Υπολογισμός μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο**

*Στο παράδειγμα αυτό θα δώσουμε ένα τρόπο υπολογισμού των μέσων τιμών κάτω από την αλλαγή μέτρου. Ας θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή* $f$ *είναι* $\mathcal{F}_t$*-μετρήσιμη. Τότε*

$$E_Q[f] = \int f dQ = \int f \frac{dQ}{dP} dP = E_P\left[f \frac{dQ}{dP}\right] = E_P[f Z_T] \tag{5.6}$$

*Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον νόμο της ολικής πιθανότητας παίρνοντας μέσες τιμές υπό συνθήκη ως προς την* $\mathcal{F}_t$. *Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι γιατί ξέρουμε ότι η* $f$ *είναι* $\mathcal{F}_t$*-μετρήσιμη και η* $Z_t$ *είναι μία martingale ως προς το μέτρο* $P$. *Έχουμε λοιπόν*

$$E_P[f Z_T] = E_P[E_P[f Z_T \mid \mathcal{F}_t]] = E_P[f E_P[Z_T \mid \mathcal{F}_t]] = E_P[Z_t f]$$

Ο υπολογισμός των υπό συνθήκη μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο δεν είναι όμως τόσο απλή υπόθεση! Αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα το οποίο μας δίνει ένα τύπο με βάση τον οποίο μπορούμε να υπολογίζουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή ως πρός κάποια $\sigma$-άλγεβρα στο καινούργιο μέτρο. Ο τύπος αυτός είναι εξαιρετικά χρήσιμος στην αμελέτη της αποτίμησης παραγώγων συμβολαίων.

**Παράδειγμα 5.5.3 Υπολογισμός των υπό συνθήκη μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο**
*Ας θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $g$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη και ότι $s < t$. Τότε*

$$E_Q[g \mid \mathcal{F}_s] = Z_s^{-1} E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s] \tag{5.7}$$

*Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της υπό συνθήκης μέσης τιμής. Θα πρέπει να δείξουμε λοιπόν ότι για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{F}_s$ θα ισχύει*

$$\int_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s] dQ = \int_A g dQ \tag{5.8}$$

*Πράγματι*

$$\int_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s] dQ = E_Q[\mathbf{1}_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s]]$$

*Εφαρμόζουμε τώρα το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.2 για την τυχαία μεταβλητή $f = Z_s^{-1} E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s]$ η οποία είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη. Έχουμε λοιπόν ότι*

$$E_Q[\mathbf{1}_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s]] = E_Q[f] = E_P[Z_s f] = E_P[\mathbf{1}_A E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s]]$$

*Εφόσον $A \in \mathcal{F}_s$ η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{1}_A$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη και συνεπώς μπορούμε να την περάσουμε μέσα στην υπό συνθήκη πιθανότητα ως πρός την σ-άλγεβρα αυτή*

$$\begin{aligned} E_P[\mathbf{1}_A E_P[g Z_t \mid \mathcal{F}_s]] &= E_P[E_P[\mathbf{1}_A g Z_t \mid \mathcal{F}_s]] \\ &= E_P[\mathbf{1}_A g Z_t] = E_Q[\mathbf{1}_A g] = \int_A g dQ \end{aligned}$$

*όπου στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε ξανά το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.2 για την τυχαία μεταβλητή $\mathbf{1}_A g$ η οποία είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη (εφόσον $s < t$ έχουμε ότι $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ και αφού η $\mathbf{1}_A$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη θα είναι και $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη). Συνεπώς αποδείξαμε την σχέση (5.8) και άρα ο αρχικός μας ισχυρισμός ισχύει.*

Με βάση τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω παραδειγμάτων μπορούμε να υπολογίζουμε τις μέσες τιμές και τις υπό συνθήκη μέσες τιμές ποσοτήτων κάτω από διαφορετικά μέτρα. Αυτό μας δίνει ένα τρόπο να υπολογίζουμε συναρτησοειδή των τροχιών περίπλοκων στοχαστικών διαδικασιών επάνω στις τροχιές πιο απλών στοχαστικών διαδικασιών κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μέτρου. Σαν ένα απλό παράδειγμα δίνουμε τον υπολογισμό των χρόνων εξόδου της κίνησης Brown με ταχύτητα από ένα χωρίο.

**Παράδειγμα 5.5.4** *Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Girsanov για να υπολογίσετε την κατανομή των χρόνων εξόδου για μία κίνηση Brown με ταχύτητα $u$*

*δηλαδή της στοχαστικής διαδικασίας* $\bar{B}_t = B_t + u\,t$ *όπου* $B_t$ *ίναι η τυπική κίνηση Brown.*

*Έστω* $\bar{T}_a = inf\{t : \bar{B}_t = a\}$. *Θα υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα* $P(\bar{T}_a \leq t)$. *Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία*

$$Z_t = \exp\left(-uB_t - \frac{1}{2}u^2 t\right)$$

*και το ισοδύναμο μέτρο* $Q$, *τέτοιο ώστε*

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, \ \forall A \in \mathcal{F}, \ t < T$$

*κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία* $\bar{B}_t$ *είναι μία κίνηση Brown . Έχουμε λοιπόν*

$$P(\bar{T}_a \leq t) = E_P[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}}] = E_Q[Z_T^{-1}\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}}]$$

*όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή* $\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}}$ *είναι* $\mathcal{F}_t$-*μετρήσιμη (το* $\bar{T}_a$ *είναι ένας χρόνος στάσης) και το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.2. Κάτω από το μέτρο αυτό όμως η στοχαστική διαδικασία* $\bar{B}_t$ *είναι μία κίνηση Brown . Μπορούμε να υπολογίσουμε λοιπόν την μέση τιμή αφού βέβαια πρώτα γράψουμε την* $Z_t$ *συναρτήσει της* $\bar{B}_t$. *Έχουμε*

$$Z_t = \exp\left(-u\bar{B}_t + \frac{1}{2}u^2 t\right)$$

*Συνεπώς,*

$$\begin{aligned}
P(\bar{T}_a \leq t) &= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} \exp\left(+u\bar{B}_T - \frac{1}{2}u^2 T\right)\right] \\
&= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} E_Q\left[\exp\left(u\bar{B}_T - \frac{1}{2}u^2 T\right) \mid \mathcal{F}_{\bar{T}_a \wedge t}\right]\right] \\
&\quad (\eta\ Z_T \text{ είναι μία } Q\text{-martingale}) \\
&= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} \exp\left(u\bar{B}_{\bar{T}_a \wedge t} - \frac{1}{2}u^2(\bar{T}_a \wedge t)\right)\right] \\
&\quad (\text{περιοριζόμαστε στο } T_a \leq t \text{ και ισχύει } \bar{B}_{T_a} = a) \\
&= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} \exp\left(u\,a - \frac{1}{2}u^2 \bar{T}_a\right)\right] \\
&= \int_0^t Q(\bar{T}_a \in ds) \exp\left(u\,a - \frac{1}{2}u^2 \bar{T}_a\right) \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

*όπου με* $Q(\bar{T}_a \in ds)$ *συμβολίζουμε, ως συνήθως, την πιθανότητα κάτω από το μέτρο* $Q$ *ο χρόνος εξόδου της* $\bar{B}_t$ *απο το χωρίο* $x \leq a$ *να βρίσκεται στο διάστημα*

*$(s, s+ds)$. Αυτή η πιθανότητα φυσικά μπορεί να γραφεί και ως $Q(\bar{T}_a \in ds) = f_{\bar{T}_a}(s)ds$ όπου $f_{\bar{T}_a}(s)$ η πυκνότητα πιθανότητας του χρόνου εξόδου $\bar{T}_a$ (κάτω από το μέτρο $Q$). Κάτω από το μέτρο $Q$ όμως γνωρίζουμε ότι η $\bar{B}_t$ είναι τυπική κίνηση Brown, συνεπώς*

$$Q(\bar{T}_a \in dt) = P(T_a \in dt) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) dt \tag{5.10}$$

*για $0 < t \leq T$. Αντικαθιστώντας την 5.9 στην 5.10 λαμβάνουμε*

$$\begin{aligned} P(\bar{T}_a \leq t) &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) \exp\left(u\,a - \frac{1}{2}u^2\,s\right) ds \\ &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left[-\frac{(a-u\,s)^2}{2s}\right] ds \end{aligned}$$

*από όπου καταλήγουμε για την πυκνότητα πιθανότητας ότι ισχύει*

$$P(\bar{T}_a \in dt) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{(a-u\,t)^2}{2s}\right] dt$$

*Θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε στο αποτέλεσμα αυτό και διαφορετικά, κάνοντας τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου εξόδου. Υπολογισμοί σαν τον παραπάνω είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην αποτίμηση των λεγομένων εξωτικών παραγώγων συμβολαίων.*

Με την χρήση του θεωρήματος του Girsanov μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε και άλλες ενδιαφέρουσες ποσότητες για την κίνηση Brown με ταχύτητα, όπως π.χ. την κατανομή του μεγίστου της.

**Παράδειγμα 5.5.5** *Υπολογίστε την απο κοινού κατανομή του μεγίστου και της ίδιας της κίνησης Brown με ταχύτητα $u$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Girsanov.*

*Έστω $\bar{B}_t = u\,t + B_t$ η κίνηση Brown με ταχύτητα $\theta$ και $\bar{M}_t$ το μέγιστο της μέχρι τον χρόνο $t$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov , αν ορίσουμε το μέτρο $Q$ έτσι ώστε*

$$\frac{dQ}{dP} = Z_T = \exp\left(-uB_T - \frac{1}{2}u^2 T\right) = \exp\left(-u\bar{B}_T + \frac{1}{2}u^2 T\right)$$

*ή ισοδύναμα*

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad t < T$$

*η $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $Q$. Συνεπώς κάτω από το μέτρο αυτό θα ισχύει η αρχή της ανάκλασης για την $\bar{B}_t$. Σύμφωνα με αυτή μπορούμε* *να αποδείξουμε ότι*

$$Q(\bar{M}_t > \bar{m}, \bar{B}_t < \bar{b}) = Q(\bar{B}_t > 2\bar{m} - \bar{b}) = \int\limits_{2\bar{m}-\bar{b}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy \quad (5.11)$$

*όπου ισχύει ο περιορισμός* $\bar{m} > 0, \bar{b} < \bar{m}$. *Ο περιορισμός αυτός είναι προφανής αφού εφόσον η* $\bar{B}_t$ *είναι μία κίνηση Brown (κάτω από το* $Q$*) η οποία αρχίζει στο* $0$, *το μέγιστο της μέχρι την χρονική στιγμή* $t$ *θα είναι απαραίτητα μεγαλύτερο από το* $0$, *ενώ η τιμή της* $\bar{B}_t$ *θα είναι πάντοτε μικρότερη από το μέγιστο της* ($\bar{b} < \bar{m}$). *Από την σχέση (5.11) μπορούμε να υπολογίσουμε την κοινή κατανομή των μεγίστων της κίνησης Brown με ταχύτητα και της κίνησης Brown με ταχύτητα, κάτω από το μέτρο* $Q$:

$$\begin{aligned} Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) &= -\frac{\partial^2}{\partial \bar{m} \partial \bar{b}} \left( Q(\bar{M}_t > \bar{m}, \bar{B}_t < \bar{b}) \right) d\bar{m} d\bar{b} \\ &= \frac{2(2\bar{m} - \bar{b})}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2\bar{m} - \bar{b})^2}{2t}\right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

*Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να εκφράσουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο* $Q$ *μίας οποιασδήποτε συνάρτησης* $f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)$:

$$\begin{aligned} E_Q[f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] &= \int\limits_{\bar{m}=0}^{\infty} \int\limits_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} f(\bar{m}, \bar{b}) Q(\bar{M}_t > \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b} \\ &= \int\limits_{\bar{m}=0}^{\infty} \int\limits_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} f(\bar{m}, \bar{b}) \frac{2(2\bar{m} - \bar{b})}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2\bar{m} - \bar{b})^2}{2t}\right) d\bar{m} d\bar{b} \end{aligned}$$

*Αν θέλαμε την ίδια μέση τιμή κάτω από το μέτρο* $P$ *η μέση τιμή αυτή θα μπορούσε να εκφραστεί με την βοήθεια της κοινής κατανομής της* $\bar{B}_t$ *και των μεγίστων της κάτω όμως τώρα από το μέτρο* $P$:

$$E_P[f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] = \int\limits_{\bar{m}=0}^{\infty} \int\limits_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} f(\bar{m}, \bar{b}) P(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b} \quad (5.13)$$

*όπου* $P(\bar{M}_t > \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b}$ *είναι η ζητούμενη κοινή κατανομή. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Girsanov για να υπολογίσουμε την μέση τιμή που εμφανίζεται στην σχέση (5.13). Σύμφωνα με αυτό*

$$\begin{aligned} &E_P[f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] = E_Q[Z_t^{-1} f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] \\ &= E_Q\left[\exp\left(u\bar{B}_t - \frac{1}{2}u^2 t\right) f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)\right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$= \int\limits_{\bar{m}=0}^{\infty} \int\limits_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2 t\right) f(\bar{m}, \bar{b}) Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b}$$

*Συγκρίνοντας τις (5.13) και (5.14) καταλήγουμε ότι*

$$P(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) = \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2 t\right) Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b})$$

*όπου η $Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b})$ δίνεται από την (5.12).*

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίσουμε, με διαφορετικό τρόπο από ότι στο παράδειγμα 5.5.4, τους χρονους εξόδου της κίνησης Brown με ταχύτητα $u$.

**Παράδειγμα 5.5.6** *Αν $\bar{T}_a = \inf\{t : \bar{B}_t \geq a\}$ βρείτε την πιθανότητα $P(\bar{T}_a \leq t)$ κάνοντας χρήση της από κοινού κατανομής του μεγίστου και της ίδιας της κίνησης Brown με ταχύτητα $u$.*

*Έχουμε ότι*

$$P(\bar{T}_a \leq t) = P(\bar{M}_t \geq a) = E_P(\mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}})$$

*θα εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.5 επιλέγοντας*

$$f(\bar{M}_t, \bar{B}_t) = \mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}}.$$

*Έχουμε λοιπόν*

$$E_P(\mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}}) = \int\limits_{\bar{m}=0}^{\infty} \int\limits_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2 t\right) \mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}} Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b}$$

$$= \int\limits_{\bar{m}=a}^{\infty} \int\limits_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2 t\right) \frac{2(2\bar{m} - \bar{b})}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2\bar{m} - \bar{b})^2}{2t}\right) d\bar{b} d\bar{m} \tag{5.15}$$

Ας δούμε τώρα μία εφαρμογή του θεωρήματος του Girsanov σε ένα κλασσικό μοντέλο της χρηματοοικονομικής, την γεωμετρική κίνηση Brown. Όπως έχουμε δεί μέχρι τώρα η γεωμετρική κίνηση Brown χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών στις χρηματαγορές. Η γεωμετρική κίνηση Brown είναι μία διαδικασία Itô με κάποια ταχύτητα. Είναι δυνατό να βρούμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από αυτό η διαδικασία αυτή να παίρνει πιο απλή μορφή; Η απάντηση του ερωτήματος αυτού που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την χρηματοοικονομική (βλ. πχ. την παράγραφο 2.7.1 ή την παράγραφο 2.7.2) δίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

**Παράδειγμα 5.5.7** *Το θεώρημα του Girsanov και η γεωμετρική κίνηση Brown. Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα του Girsanov σε ένα απλό μοντέλο για την τιμή των μετοχών, την γεωμετρική κίνηση Brown που είδαμε λίγο παραπάνω. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, αν $S_t$ είναι η τιμή ενός χρεωγράφου, τότε οι μεταβολές της δίνονται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

*όπου* $B_t$ *είναι μία κίνηση Brown (κάτω από το μέτρο* $P$*). Είναι φανερό ότι για* $\mu \neq 0$ *η στοχαστική διαδικασία* $S_t$ *δεν μπορεί να είναι μία martingale . Θέτουμε τα εξής ερωτήματα:*

1. *Είναι δυνατό, να βρούμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας* $Q^{'}$ *τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία* $S_t$ *να μην έχει ταχύτητα και να είναι μία martingale;*

2. *Είναι δυνατό να βρούμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας* $Q$ *τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία* $S_t$ *να έχει ταχύτητα* $rS_t$ *όπου* $r$ *είναι καθορισμένη συνάρτηση του χρόνου (πιθανόν και σταθερά)· Το* $r$ *πολλές φορές σε εφαρμογές στην χρηματοοικονομική επιλέγεται ίσο με το επιτόκιο.*

3. *Υπολογίστε τις μέσες τιμές* $E_P[S_t]$, $E_{Q'}[S_t]$ *και* $E_Q[S_t]$.

**Απάντηση:**

1. *Θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η ταχύτητα της* $S_t$ *να μηδενίζεται. Ας θεωρήσουμε για ευκολία ότι το* $\mu$ *είναι σταθερό. Ας ξεκινήσουμε με την στοχαστική διαφορική εξίσωση που ακολουθεί η τιμή της μετοχής*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{5.16}$$

*όπου* $B_t$ *είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο* $P$. *θα αναδιατάξουμε την εξίσωση αυτή. Έχουμε λοιπόν*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t = \sigma S_t \left( \frac{\mu}{\sigma} dt + dB_t \right) \tag{5.17}$$

*Ας ονομάσουμε* $u^{'} = \frac{\mu}{\sigma}$ *ας και ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία* $\bar{B}_t^{'} = u^{'} t + B_t$. *Μπορούμε σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov να δούμε ότι η* $\bar{B}_t^{'}$ *είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο* $Q^{'}$ *το οποίο ορίζεται από την σχέση*

$$Q^{'}(A) = \int\limits_A Z_T^{'} dP, \ \ \forall A \in \mathcal{F}, \ \ t < T$$

*όπου*

$$Z_t^{'} = \exp\left( -u^{'} B_t - \frac{1}{2} u^{'2} t \right) = \exp\left( -u^{'} \bar{B}_t^{'} + \frac{1}{2} u^{'2} t \right)$$

*Έχουμε λοιπόν από την (5.17) ότι*

$$dS_t = \sigma S_t d\bar{B}_t^{'} \tag{5.18}$$

*όπου* $\bar{B}_t^{'}$ *είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο* $Q^{'}$. *Κάτω από το μέτρο αυτό η* $S_t$ *δίνεται από ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση*

Brown συνεπώς η $S_t$ είναι μία $Q^{'}$ martingale . Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται πολύ απλά για την περίπτωση που $\mu$ είναι συνάρτηση του χρόνου και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη. Στην περίπτωση αυτή μόνο λίγο προσοχή στους περιορισμούς για την ισχύ του θεωρήματος του Girsanov και συγκεκριμένα στην συνθήκη του Novikov.

2. Θα προσπαθήσουμε τώρα να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η ταχύτητα της $S_t$ να είναι καθορισμένη και ίση με $rS_t$. Θα θεωρήσουμε ξανά ότι $\mu, r, \sigma$ σταθερές. Έχουμε λοιπόν

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t = rS_t dt + \sigma S_t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t \right) \tag{5.19}$$

Ας ονομάσουμε $u = \frac{\mu - r}{\sigma}$ ας και ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t = ut + B_t$. Μπορούμε σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov να δούμε ότι η $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $Q$ το οποίο ορίζεται από την σχέση

$$Q(A) = \int_A Z_T \, dP \;\forall A \in \mathcal{F} \; t < T$$

όπου

$$Z_t = \exp\left(-uB_t - \frac{1}{2}u^2 t\right) = \exp\left(-u\bar{B}_t + \frac{1}{2}u^2 t\right)$$

Έχουμε λοιπόν από την (5.19) ότι

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\bar{B}_t \tag{5.20}$$

όπου $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $Q$. Κάτω από το μέτρο αυτό η $S_t$ δίνεται από ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown και τον όρο $rS_t dt$ συνεπώς η $S_t$ έχει κάτω από το μέτρο αυτό την ζητούμενη ταχύτητα. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται πολύ απλά για την περίπτωση που $\mu$ είναι συνάρτηση του χρόνου και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

3. Θα υπολογίσουμε τώρα τις μέσες τιμές της $S_t$ κάτω από τα διαφορετικά μέτρα $P$, $Q^{'}$ και $Q$. Από την σχέση (5.16) έχουμε ότι

$$S_t = S_0 \exp\left( (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \right),$$

όπου $B_t$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $P$. Συνεπώς

$$E_P[S_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) S_0 \exp\left( (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma y \right) dy = S_0 \exp(\mu t)$$

*Από την σχέση (5.18) έχουμε ότι*

$$S_t = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \bar{B}_t^{'}\right),$$

*όπου $\bar{B}_t^{'}$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $Q^{'}$. Συνεπώς*

$$E_{Q'}[S_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma y\right) dy = S_0$$

*Από την σχέση (5.20) έχουμε ότι*

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \bar{B}_t\right),$$

*όπου $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $Q$. Συνεπώς*

$$E_Q[S_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma y\right) = S_0 \exp(rt)$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Girsanov μπορούμε να υπολογίσουμε ασθενείς λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

**Παράδειγμα 5.5.8** *Ας υποθέσουμε ότι $Y_t$ είναι μία γνωστή ασθενής ή ισχυρή λύση της εξίσωσης*

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t \tag{5.21}$$

$$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{5.22}$$

*και $B_t$ μία $m$-διάστατη κίνηση Brown. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Girsanov χρησιμοποιώντας την $X_t$ βρείτε μία ασθενή λύση της εξίσωσης*

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{5.23}$$

*Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $u_0 : \mathbb{R}^{n \to \mathbb{R}^m}$ τέτοιο ώστε να επιλύει την εξίσωση*

$$\sigma(y)u_0(y) = b(y) - a(y), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

*και η στοχαστική διαδικασία $u_0(Y_t)$ να ικανοποιεί την συνθήκη του Novikov. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία*

$$\bar{B}_t = \int_0^t u_0(Y_s)ds + B_t$$

*η οποία είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $Q$ που ορίζεται σύμφωνα με την σχέση*

$$\frac{dQ}{dP} = M_t$$

*και για την οποία ισχύει*

$$dY_t = a(Y_t)dt + \sigma(Y_t)d\bar{B}_t \tag{5.24}$$

*Εφόσον λοιπόν η $(\bar{B}_t, Q)$ είναι μία κίνηση Brown τέτοια ώστε η $Y_t$ να ικανοποιεί την (5.24) από τον ορισμό των ασθενών λύσεων μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $(Y_t, \bar{B}_t)$ είναι μία ασθενής λύση της εξισώσεως (5.23).*

## 5.6 Σχέση με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Θα ασχοληθούμε τώρα με την στενή σχέση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με τις ελλειπτικές και παραβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

### 5.6.1 Ο γεννήτορας μίας διαδικασίας διάχυσης

Με κάθε διαδικασία διάχυσης μπορούμε να συνδέσουμε έναν διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης με μερικές παραγώγους. Ο τελεστής αυτός ονομάζεται ο γεννήτορας της διάχυσης $X_t$.

**Ορισμός 5.6.1** *Έστω $X_t$ μία χρονικά ομογενής διάχυση Itô στο $\mathbb{R}^n$. Ο* **απειροστός γεννήτορας** *$A$ της $X_t$ ορίζεται από το*

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{E_x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ο παραπάνω τύπος μας λέει με λόγια ότι για τον υπολογισμό της δράσης του γεννήτορα τελεστή της $X_t$ σε μία συνάρτηση $f(x)$ θα πρέπει να ξεκινήσουμε μία διαδικασία Itô στο σημείο $x$ και να την αφήσουμε να 'τρέξει' για χρόνο $t$. Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης $f$ στο σημείο που έφτασε η διαδικασία διάχυσης δηλαδή υπολογίζουμε την ποσότητα $f(X_t)$. Επαναλαμβάνουμε για πολλές πραγματοποιήσεις της διαδικασίας αυτής (ξεκινώντας πάντοτε από το αρχικό σημείο $x$) και παίρνουμε την μέση τιμή. Μετά αφαιρούμε την $f(x)$ και παίρνουμε το όριο $t \to 0$. Η συνάρτηση που προκύπτει είναι η δράση του τελεστή $A$ στην συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή είναι η $Af(x)$.

Ο ορισμός αυτός μπορεί να γενικευθεί και για μη χρονικά ομογενείς διαχύσεις (διαδικασίες Itô). Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και το χρονικό σημείο στο οποίο έχουμε ξεκινήσει. Συνεπώς, στον απειροστό γεννήτορα θα πρέπει να αντικαταστήσουμε σαν αρχική συνθήκη το ζεύγος $(x_0, t_0)$, δηλαδή να θεωρήσουμε ότι η διάχυση (διαδικασία Itô ) 'ξεκινάει' την χρονική στιγμή $t_0$ στο χωρικό σημείο $x_0$. Σε αναλογία με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε στην παρουσίαση της ιδιότητας Markov θα συμβολίσουμε την διαδικασία αυτή ως $X_t^{(t_0,x_0)}$. Ο τελεστής $A$ στην περίπτωση αυτή επιδρά τόσο στις χωρικές όσο και στις χρονικές συντεταγμένες συνεπώς θα οριστεί ως

$$Af(t_0, x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{E_x[f(X_t^{(t_0,x_0)})] - f(t_0, x_0)}{t}, \quad t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Γνωρίζουμε ότι μία διαδικασία Itô μπορεί να παρασταθεί σαν ένα ολοκλήρωμα κατά Riemann και σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα. Στην αναπαράσταση αυτή χρησιμοποιούνται κάποιοι συντελεστές. Θα ήταν χρήσιμο αν μπορούσαμε να εκφράσουμε τον γεννήτορα τελεστή της διάχυσης συναρτήσει των συντελεστών αυτών.

Έχουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα:

**Θεώρημα 5.6.1** *Έστω $X_t \in \mathbb{R}^n$ μία χρονικά ομογενής διάχυση Itô που δίνεται σαν λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

*όπου η κίνηση Brown θεωρείται ότι είναι $m-$διάστατη, και τα $b$ και $\sigma$ είναι κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα και πίνακες, αντίστοιχα. Τότε*

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

*όπου με $\sigma^T$ συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακας.*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στην χρήση του λήμματος του Itô. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(x)$ και θέτοντας $x = X_t$ μπορούμε να δούμε, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô ότι

$$E_x[f(X_t)] - x = E\left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\right) ds\right]$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann. Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος Riemann, της συνέχειας της διαδικασίας $X_s$ και των ιδιοτήτων της $f$ έπεται το ζητούμενο.□

**Σχόλιο** Η συνθήκη της χρονικής ομοιογένειας των συντελεστών μπορεί να παραλειφθεί. Αν οι συντελεστές περιέχουν εκπεφρασμένα τον χρόνο, τότε ο γεννήτορας τελεστής θα έχει τυπικά την ίδια μορφή μόνο που οι συντελεστές του θα περιέχουν χρονική εξάρτηση. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρειάζεται λίγο προσοχή σχετικά με το ορισμό του πεδίου ορισμού του τελεστή αυτού. Η τυπική μορφή του τελεστή θα είναι

$$Af(t,x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma(t,x)\sigma^T(t,x))_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Το πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που μας δίνει το παραπάνω θεώρημα είναι ότι με κάθε διάχυση (κάθε διαδικασία Itô) μπορεί να συσχετιστεί ένας διαφορικός τελεστής με μερικές παραγώγους[4]

Ο τελεστής αυτός έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα:

**Θεώρημα 5.6.2** *Η στοχαστική διαδικασία*

$$Z_t = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)ds$$

*είναι μία martingale.*

**Απόδειξη:** Η απόδειξη βασίζεται στην χρήση του λήμματος του Itô και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.□

**Σχόλιο:** Η γενίκευση σε χρονικά μη ομογενείς διαδικασίες Itô είναι προφανής. Προσοχή χρειάζεται στις συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές της διαδικασίας.

Θα δώσουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα για την κατασκευή του γεννήτορα τελεστή.

**Παράδειγμα 5.6.1** *Ο γεννήτορας τελεστής της κίνησης Brown $B_t$ είναι ο*

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

*ο οποίος δρά επάνω σε συναρτήσεις $f = f(x)$. Επανερχόμενοι στον ορισμό του γεννήτορα τελεστή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ξεκινάμε την κίνηση Brown στο σημείο $x$ και η $f$ είναι συνάρτηση της αρχικής θέσης.*

**Παράδειγμα 5.6.2** *Ο γεννήτορας τελεστής της πολυδιάστατης κίνησης Brown $B_t = (B_{1,t}, ..., B_{d,t})$ είναι ο*

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2}\Delta$$

*δηλαδή σχετίζεται με τον τελεστή Laplace. Ο τελεστής αυτός δρά επάνω σε συναρτήσεις της μορφής $f = f(x_1, ..., x_d)$. Αν επανέλθουμε στον ορισμό του γεννήτορα τελεστή, μπορούμε να φανταστούμε ότι ξεκινάμε την πολυδιάστατη κίνηση Brown στο σημείο $x = (x_1, ..., x_d)$ και η $f$ είναι μία συνάρτηση των αρχικών συνθηκών. Σχετικά με τον τελεστή Laplace και τις εφαρμογές του παραπέμπουμε π.χ. στο [23].*

**Παράδειγμα 5.6.3** *Έστω $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$ η λύση του συστήματος*

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= dt, \\ dX_{2,t} &= dB_t, \end{aligned}$$

[4]Ο τελεστής αυτός είναι ελλειπτικού ή πιθανόν παραβολικού τύπου (βλ. [9], [36]) και την παράγραφο 5.6.4 του παρόντος.

*με αρχικές συνθήκες*

$$X_{1,0} = t_0 \quad X_{2,0} = x_0.$$

*Είναι φανερό ότι η $X$ είναι το γράφημα της κίνησης Brown. Ο γεννήτορας τελεστής για την στοχαστική διαδικασία $X_t$ είναι ο τελεστής*

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

*Ο τελεστής αυτός δρά επάνω σε συναρτήσεις $f = f(x,t)$. Επανερχόμενοι στον ορισμό του γεννήτορα τελεστή βλέπουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $X_t$ χρειάζεται δύο αρχικές συνθήκες για να οριστεί. Την χρονική στιγμή $t$ από την οποία ξεκινάμε το γράφημα και την θέση $x$. Η $f$ θεωρείται συνάρτηση των δύο αυτών αρχικών συνθηκών.*

**Παράδειγμα 5.6.4 Η διαδικασία Bessel** *Ορίσαμε στο παράδειγμα 4.5.5 την διαδικασία Itô $R_t = \| B_t \|$, όπου $B_t = (B_{1,t}, ..., B_{d,t})$ η $d-$διάστατη κίνηση Brown και $\| \, . \, \|$ η Ευκλείδια νόρμα στον $\mathbb{R}^d$. Η διαδικασία $R_t$ Bessel και δίνει την ακτίνα της πολυδιάστατης κίνησης Brown. Όπως δείξαμε στο παράδειγμα 4.5.5 η $R_t$ μπορεί να γραφεί στην μορφή*

$$dR_t = \frac{d-1}{2R_t}dt + d\bar{B}_t \tag{5.25}$$

*όπου $\bar{B}$ είναι μία $d-$διάστατη κίνηση Brown. Συνεπώς από την εξίσωση (;;) καταλήγουμε ότι ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας Bessel είναι ο*

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}$$

*που δρά επάνω σε συναρτήσεις της μορφής $f = f(r)$. Με $r$ συμβολίζουμε την αρχική ακτίνα της πολυδιάστατης κίνησης Brown, δηλαδή αν έχουμε ξεκινήσει την κίνηση Brown στο σημείο $x = (x_1, ..., x_d)$, $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_d^2}$. Ο τελεστής $A$ είναι γνωστός ως τελεστής του Bessel. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν θεωρήσουμε τον τελεστή του Laplace σε $d-$διαστάσεις και θεωρήσουμε ότι επιδρά σε συναρτήσεις $f(x_1, ..., x_d)$ τέτοιας μορφής ώστε $f(x_1, ..., x_d) = f(r)$ τότε μετά από κάποια άλγεβρα μπορούμε να δείξουμε ότι*

$$\frac{1}{2}\Delta f = \frac{1}{2}Af$$

**Παράδειγμα 5.6.5** *Σαν τελευταίο παράδειγμα ας θεωρήσουμε την κίνηση Brown στον μοναδιαίο κύκλο $S^1$ που μελετήσαμε στο παράδειγμα 4.5.4. Ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας Itô $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$ που είναι η κίνηση Brown στον μοναδιαίο κύκλο είναι ο*

$$A = \frac{1}{2}\left( x_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2x_1 x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

*Ο τελεστής αυτός θεωρείται ότι επιδρά επάνω σε συναρτήσεις $f = f(x_1, x_2)$ όπου $x_1, x_2$ είναι η αρχική θέση της κίνησης Brown στον μοναδιαίο κύκλο.*

### 5.6.2 Ο τύπος των Feynman-Kac

Ας θεωρήσουμε τον τελεστή

$$A := \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Στο τμήμα αυτό θα δείξουμε ότι η λύση στο πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Au + cu \\ &u(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n), \\ &u(0,x) = f(x) \end{aligned} \tag{5.26}$$

για $c$ συνεχή και φραγμένη και $f \in C_0^2$, μπορεί να γραφεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της διαδικασίας Itô $X_t$ η οποία έχει για γεννήτορα τελεστή τον τελεστή $A$. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 5.6.3** *Η λύση στο πρόβλημα Cauchy (5.26) μπορεί να γραφεί ως*

$$u(t,x) = E_x \left[ f(X_t) exp \left( \int_0^t c(X_s) ds \right) \right]. \tag{5.27}$$

$$\tag{5.28}$$

Πρωτού προχωρήσουμε σε ένα σχέδιο της απόδειξης του θεωρήματος αυτού ας δούμε με λόγια τι μας λέει: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την λύση της εξίσωσης (5.26) στο σημείο $x$ την χρονική στιγμή $t$. Τότε παίρνουμε μία σειρά από διαχύσεις $X_t(\omega_i)$, οι οποίες έχουν γεννήτορα τελεστή $A$, και που όλες ξεκινάνε την χρονική στιγμή 0 στο σημείο $x$. Αφήνουμε τις διαχύσεις να τρέξουν για χρόνο $t$ και για κάθε μία από τις τροχίες υπολογίζουμε την ποσότητα $f(X_t(\omega_i))exp(\int_0^t c(X_s(\omega_i))ds)$. Μετά παίρνουμε την μέση τιμή επάνω σε όλες τις τροχιές (όλα τα $\omega_i$) και η μέση τιμή αυτή είναι η λύση της εξίσωσης. Η αναπαράσταση αυτή μας παρέχει ένα ωραίο τρόπο εύρεσης της λύσης παραβολικών προβλημάτων.

**Απόδειξη:** Θα δώσουμε ένα σχέδιο απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος στην περίπτωση που $c = 0$. Θα δώσουμε κάποιες νύξεις για τις αλλαγές που χρειάζονται στην απόδειξη αν $c \neq 0$.
(α) Ας υποθέσουμε ότι η $u$ λύνει το πρόβλημα Cauchy (5.26) για $c = 0$. Τότε θα αποδείξουμε ότι η $u$ μπορεί να αναπαρασταθεί από την μέση τιμή που δίνεται στην εξίσωση (5.27) με $c = 0$ δηλαδή $u(t,x) = E_x[f(X_t)]$.

Θα θεωρήσουμε κάποιο $t_0$ σταθερό και θα ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία $M_t = u(t_0 - t, X_t)$. Ας εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην $M_t$. Έχουμε

$$dM_t = \left( -\frac{\partial u}{\partial t} + Au \right) dt + \nabla u \cdot \sigma dB_t \tag{5.29}$$

Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από την χρονική παράγωγο του $u$ που εμφανίστηκε όταν χρησιμοποιήσαμε το λήμμα του Itô προέρχεται από το ότι παίρνουμε την $u(t_0 - t, X_t)$ και όχι την $u(t, X_t)$. Εφόσον η $u$ ικανοποιεί την εξίσωση (5.26) για $c = 0$ η (5.29) μας δίνει ότι

$$dM_t = \nabla u \cdot \sigma dB_t$$

συνεπώς η $M_t$ μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown και άρα είναι μία martingale. Από τις ιδιότητες των martingale έχουμε όμως ότι

$$E_x[M_{t_0}] = E_x[M_0] \tag{5.30}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα χωριστά το αριστερό και το δεξιό μέρος της ισότητας αυτής

- Αριστερό μέλος: $E_x[M_{t_0}] = E_x[u(0, X_{t_0}] = E_x[f(X_{t_0})]$
  εφόσον γνωρίζουμε ότι $u(0,x) = f(x)$ για κάθε $x$.
- Δεξιό μέλος: $E_x[M_0] = E_x[u(t_0, X_0)] = u(t_0, x)$
  εφόσον η διάχυση $X_t$ ξεκινάει στο σημείο $x$ ($X_0 = x$).

Έτσι λοιπόν καταλήγουμε από την (5.30) ότι $E_x[f(X_{t_0})] = u(t_0, x)$ και αφού το $t_0$ είναι αυθαίρετο το αποτέλεσμα που θέλαμε να αποδείξουμε ισχύει.
(β) Ας ορίσουμε σαν $v(t,x) \equiv E_x[f(X_t)]$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $v$ είναι λύση του προβλήματος Cauchy (5.26) για $c = 0$. Για να το αποδείξουμε αυτό θα κάνουμε χρήση της ιδιότητας Markov της διαδικασίας διάχυσης $X_t$.

Ισχυριζόμαστε ότι για το $v(t,x)$ όπως έχει οριστεί πιο πάνω, η στοχαστική διαδικασία $M_t = v(T-t, X_t)$ (όπου $T$ σταθερό και $t < T$) είναι ένα martingale. Αρχικά θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό.

Ας θεωρήσουμε ότι ξεκινάμε την διαδικασία διάχυσης οπουδήποτε. Έχουμε:

$$E[f(X_T) \mid \mathcal{F}_t] = E_{X_t}[f(X_{T-t}] = v(T-t, X_t) = M_t \tag{5.31}$$

Το παραπάνω ισχύει λόγω της ιδιότητας Markov : Η υπό συνθήκη μέση τιμή μιάς ποσότητας που εξαρτάται απο την θέση μιάς διάχυσης την χρονική στιγμή $T$ ως προς την $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ έχοντας ξεκινήσει την χρονική στιγμή 0 οπουδήποτε, είναι ίση με την μέση τιμή της ίδιας ποσότητας επάνω σε μία διάχυση που ξεκίνησε την χρονική στιγμή 0, στην θέση $X_t$ και θα 'τρέξει' για χρονικό διάστημα $T - t$. Τονίζουμε ότι ο τρόπος που γράψαμε την ιδιότητα Markov εδώ ισχύει για χρονικά ομογενείς διαχύσεις.

Από την (5.31) θα πρέπει να φαίνεται αμέσως ότι η $M_t$ είναι μία martingale . Πράγματι

$$E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = E[f(X_T) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] = E[f(X_T) \mid \mathcal{F}_s] = M_s$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα το λήμμα του Itô στην στοχαστική διαδικασία $M_t$. Έχουμε ότι

$$dM_t = d(v(T-t, X_t) = \left( -\frac{\partial v}{\partial t} + Av \right) dt + \nabla v \sigma \cdot dB_t$$

Εφόσον όμως η $M_t$ είναι μία martingale θα πρέπει το κομμάτι που είναι ανάλογο του $dt$ να μηδενίζεται άρα η $v$ ικανοποιεί την εξίσωση (5.26). Το ότι ικανοποιείται η αρχική συνθήκη μπορεί να φανεί αμέσως από τον ορισμό της $v$. □

**Σημείωση:** Στην παραπάνω απόδειξη θεωρούμε ότι ισχύουν ορισμένες απαραίτητες συνθήκες κάποιες από τις οποίες θα πρέπει να ελεγθούν. Η πιο βασική είναι ότι η συνάρτηση $v(t,x)$ που ορίζεται από την μέση τιμή $E_x(f(X_t)]$ είναι μία συνάρτηση που ανήκει στο $C^{1,2}$ (μία συνεχής παράγωγος στο $t$, και δύο συνεχείς παράγωγοι στο $x$). Το σημείο αυτό είναι αρκετά τεχνικό και παραλείπεται. Για μία αντιμετώπιση του θέματος αυτού παραπέμπουμε στο [28]. Επίσης, εσκεμμένα παραλείψαμε την αναφορά των συνθηκών που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές του προβλήματος για να ικανοποιείται η αναπαράσταση Feynman-Kac. Οι συνθήκες αυτές αναφέρονται λεπτομερώς στην παράγραφο 5.6.4. Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να γενικευθούν και όταν τα στοιχεία του προβλήματος ικανοποιούν πιο ασθενείς συνθήκες όπως πχ. αν η $c$ δεν είναι φραγμένη. Επίσης μπορεί να γενικευθούν πολύ άνετα και στην περίπτωση που οι συντελεστές της εξίσωσης εξαρτώνται εκπεφρασμένα από τον χρόνο (μη χρονικά ομογενής διάδικασία Itô). Για την γενίκευση αυτή βλ. παράγραφο 5.6.4.

**Παράδειγμα 5.6.6** *Εκφράστε την λύση της εξίσωσης*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) &= f(x) \end{aligned} \tag{5.32}$$

*σαν την μέση τιμή επάνω σε μία κατάλληλα επιλεγμένη διαδικασία διάχυσης.*

*Η διαδικασία διάχυσης που παράγει ο γεννήτορας $A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ δεν είναι άλλη από την κίνηση Brown $X_t = B_t$. Από την αναπαράσταση Feynman-Kac έχουμε λοιπόν*

$$u(t,x) = E_x[f(X_t)] = E_x[f(B_t)] = E_0[f(x+B_t)]$$

*όπου η τρίτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο $x$ και η τέταρτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο 0. Εφόσον ξέρουμε την κατανομή της κίνησης Brown μπορούμε να γράψουμε εκπεφρασμένα την λύση σαν*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+z)\exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right)dz$$

*Όσοι από εσάς έχουν κάποια επαφή με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις θα αναγνωρίσουν το δεύτερο από τα ολοκληρώματα αυτά ως την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης της εξίσωσης θερμότητας χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη λύση (συνάρτηση Green).*

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την λύση του προβλήματος Cauchy ανάστροφα στο χρόνο, δηλαδή γνωρίζοντας την λύση σε κάθε $x$ την χρονική στιγμή $T$, και αναζητώντας την για $t < T$. Τέτοιες εφαρμογές εμφανίζονται πολύ συχνά την χρηματοοικονομική και συγκεκριμένα σε προβλήματα αποτίμησης παραγώγων συμβολαίων, των οποίων η αξία είναι γνωστή την στιγμή της λήξης τους και χρειάζεται να βρούμε την αξία τους κάποια στιγμή πριν την λήξη.

Θα παρουσιάσουμε μία πιθανοθεωρητική αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος Cauchy

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t} &= Au + cu \\ u(T,x) &= f(x),\ 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{5.33}$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 5.6.4** *(Feynman-Kac II ) Η λύση του προβλήματος (5.33) μπορεί να γραφεί σαν*

$$u(t,x) = E_{t,x}\left[f(X_T)\exp\left(\int_t^T c(X_s)ds\right)\right]$$

*όπου με το σύμβολο $E_{t,x}[.]$ εννοούμε την μέση τιμή επάνω σε διαχύσεις $X_t$ που έχουν γεννήτορα $A$ και ξεκινάνε την χρονικη στιγμή $t$ στο σημείο $x$.*

**Απόδειξη:** Όπως και προηγουμένως θα δώσουμε την απόδειξη για $c = 0$ και αφήνουμε την γενική περίπτωση ως άσκηση.
(α) Έστω ότι η συνάρτηση $u$ είναι λύση του προβλήματος Cauchy (5.33) με $c = 0$. Τότε η $u(t,x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $u(t,x) = E_{t,x}[f(X_T)]$.

Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία $M_t = u(t, X_t)$ και ας εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην διαδικασία $M_t$:

$$dM_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au\right)dt + \nabla u\sigma \cdot dB_t$$

Λόγω όμως της υποθέσεως ότι η $u$ λύνει την (5.33) η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$dM_t = \nabla u\sigma \cdot dB_t$$

και από τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος βλέπουμε ότι η $M_t$ είναι μία martingale. Λόγω της ιδιότητας martingale ισχύει

$$E_{t,x}M_T = E_{t,x}M_t$$

Το αριστερό μελος της εξίσωσης αυτής είναι ίσο με $E_{t,x}[f(X_T)]$ (λόγω του ότι $u(T,x) = f(x)$ για κάθε $x$) ενώ το δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι ίσο με $u(t,x)$ (γιατί η μέση τιμή παίρνεται επάνω σε διαχύσεις που ξεκινάνε την χρονική στιγμή $t$ στο σημείο $x$ οπότε $X_t = x$). Συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα που θέλουμε.
(β) Ας ορίσουμε τώρα $v(t,x) = E_{t,x}[f(X_T)]$. θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $v(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος Cauchy (5.33) με $c = 0$.

Για να αποδείξουμε αυτό θα καταφύγουμε στην ιδιότητα Markov για την διάχυση $X_t$. Ισχυριζόμαστε πρώτα ότι η στοχαστική διαδικασία $M_t = v(t, X_t)$ είναι μία martingale.

Πράγματι, από την ιδιότητα Markov έχουμε

$$E[f(X_T) \mid \mathcal{F}_t] = E_{t,X_t}[f(X_T)] = v(t, X_t) = M_t$$

από οπου φαίνεται ότι η $M_t$ είναι μία martingale. Στην παραπάνω εφαρμογή της ιδιότητας Markov η πρώτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία διάχυση που ξεκινάει την χρονική στιγμή 0 σε οποιαδήποτε θέση, ενώ η δεύτερη μέση τιμή είναι επάνω σε μία διάχυση που ξεκινάει την χρονική στιγμή $t$ στην θέση $X_t$. Δεν χρειάζεται εδώ να πάρουμε $X_{T-t}$ σαν όρισμα της $f$ γιατί ξεκινάμε την χρονική στιγμή $t$ και όχι την χρονική στιγμή 0 (όπως στην απόδειξη της άλλης παραλλαγής του θεωρήματος Feynman-Kac ). Ως εκ τούτου η αποδειξη αυτή ισχύει και για διαχύσεις που μπορεί να μην είναι χρονικά ομογενείς.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το λήμμα του Itô στην διαδικασία $M_t$

$$dM_t = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + Av\right) dt + \nabla v\sigma \cdot dB_t$$

Εφόσον η διαδικασία $M_t$ είναι martingale το ολοκλήρωμα ως προς $dt$ θα πρέπει να είναι ίσο με 0 άρα η $v$ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (5.33). Η τελική συνθήκη $v(T, x) = f(x)$ για κάθε $x$ αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι ισχύει. □

Θα δούμε τώρα την εφαρμογή της αναπαράστασης Feynman-Kac σε μία διαφορική εξίσωση η οποία συναντάται πολύ συχνά στην χρηματοοικονομική.

**Παράδειγμα 5.6.7 Η εξίσωση Black-Scholes**
*Γράψτε την λύση της εξίσωσης*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial v}{\partial s^2} + rs\frac{\partial v}{\partial s} - rv = 0$$

*με την συνθήκη $v(T, s) = f(s)$ σαν μία μέση τιμή επάνω σε μία κατάλληλα επιλεγμένη διαδικασία διάχυσης. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση Black-Scholes και δίνει την τιμή ενός παραγώγου συμβολαίου σαν συνάρτηση του χρόνου πριν την λήξη του και της τιμής του βασικού τίτλου.*

*Ο τελεστής $A = rs\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ είναι ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας διάχυσης $S_t$ που είναι λύση της στοχαστικής διαφορικης εξίσωσης*

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$$

*όπου $B_t$ η μονοδιάστατη κίνηση Brown . Αναγνωρίζουμε την $S_t$ σαν την γεωμετρική κίνηση Brown . Σύμφωνα με την αναπαράσταση Feynman-Kac λοιπόν η λύση της εξίσωσης Black-Scholes θα δίνεται από την μέση τιμή*

$$v(t, s) = E_{t,s}[\exp^{-r(T-t)} f(S_T)] \equiv E[\exp^{-r(T-t)} f(S_T) \mid S_t = s]$$

*όπου η μέση τιμή λαμβάνεται επάνω στις τροχιές της γεωμετρικής κίνησης Brown που ξεκινάνε την χρονική στιγμή $t$ στην θέση $s$.*

**Παράδειγμα 5.6.8 Η αναπαράσταση Feynman-Kac και αλλαγή μέτρου** *Θα δούμε τώρα την σχέση της αναπαράστασης Feynman-Kac με το θεώρημα του Girsanov το οποίο μας επιτρέπει να αλλάξουμε την ταχύτητα κάποιας διάχυσης με την κατάλληλη αλλαγή του μέτρου πιθανότητας κάτω από το οποίο 'βλέπουμε' την διαδικασία.*

*Ας θεωρήσουμε την διαδικασία διάχυσης*

$$dX_t = a_1(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{5.34}$$

*και $P$ το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο η $B_t$ είναι μία κίνηση Brown . Η διάχυση αυτή έχει γεννήτορα τελεστή τον*

$$A_1 = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

*(σε μία διάσταση, με προφανή γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις). Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας $Q$ κάτω από το οποίο η διάχυση $X_t$ θα έχει την μορφή*

$$dX_t = a_2(X_t)dt + \sigma(X_t)d\bar{B}_t \tag{5.35}$$

*όπου $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $Q$. Η διάχυση αυτή έχει γεννήτορα τελεστή τον*

$$A_1 = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

*(σε μία διάσταση, με προφανή γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις).*
*Η λύση του προβλήματος*

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = A_1 v_1 + c v_1,\ v_1(0,x) = f(x)$$

*θα δίνεται από την αναπαράσταση Feynman-Kac*

$$v_1(t,x) = E_{P,x}[f(X_t)\exp(\int_0^t c(X_s)ds)]$$

*όπου με $E_{P,x}$ συμβολίζουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο $P$ και για μία διάχυση που είναι λύση της (5.34) και ξεκινάει την χρονική στιγμή 0 στην θέση $x$.*
*Η λύση του προβλήματος*

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = A_2 v_2 + c v_2,\ v_2(0,x) = f(x)$$

*θα δίνεται από την αναπαράσταση Feynman-Kac*

$$v_2(t,x) = E_{Q,x}[f(X_t)\exp(\int_0^t c(X_s)ds)]$$

*όπου με $E_{Q,x}$ συμβολίζουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο $Q$ και για μία διάχυση που είναι λύση της (5.35) και ξεκινάει την χρονική στιγμή 0 στην θέση $x$.*

### 5.6.3 Προβλήματα συνοριακών συνθηκών: Το πρόβλημα Dirichlet

Το πρόβλημα Cauchy δεν είναι το μοναδικό που μπορεί να αντιμετωπιστεί με πιθανοθεωρητικές μεθόδους. Ορισμένα προβλήματα συνοριακών συνθηκών μπορούν να αντιμετωπιστούν επίσης με πιθανοθεωρητικές μεθόδους. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι το πρόβλημα Dirichlet σε κάποιο χωρίο $\Omega$. Η επίλυση του προβλήματος αυτού σχετίζεται με τον χρόνο πρώτης εξόδου της αντίστοιχης διαδικασίας διάχυσης από το χωρίο $\Omega$.

Αρχικά, ας θεωρήσουμε το χρονικά ανεξάρτητο (ελλειπτικό) πρόβλημα

$$\begin{aligned} Au + cu &= f \quad x \in \Omega \\ u &= \phi \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Ας συμβολίσουμε με $\tau$ το χρόνο πρωτης εξόδου της διάχυσης με γεννήτορα τελεστή $A$ από το χωρίο $\Omega$,

$$\tau = inf\{t : t \in \partial\Omega\}$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 5.6.5** *Η λύση του προβλήματος Dirichlet μπορεί να αναπαρασταθεί ως*

$$u(x) = E_x \left[ \phi(X_\tau) exp\left( \int_0^\tau c(X_s) ds \right) \right] - E_x \left[ \int_0^\tau f(X_t) exp\left( \int_0^t c(X_s) ds \right) dt \right].$$

*Για την μοναδικότητα της λύσης και την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών χρειαζόμαστε την συμπληρωματική συνθήκη ότι όλα τα σημεία στο σύνορο του $\Omega$ είναι* **κανονικά** *ή με άλλα λόγια, αν $x \in \partial\Omega$ τότε $P_x(\tau = 0) = 1$.*

**Απόδειξη:** Θα δώσουμε μόνο την βασική ιδέα της απόδειξης.
Ας δούμε αρχικά γιατί η λύση του προβλήματος αυτού θα πρέπει να έχει την μορφή που δώσαμε: Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô στην συνάρτηση $u(x)exp(c_t)$ όπου $c_t = \int_0^t c(X_s)ds$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(X_t)exp(c_t) - u(x) &= \int_0^t (\nabla u(X_s)exp(c_t), \sigma(X_s)dB_s) \\ &+ \int_0^t (Au + cu)(X_s)exp(c_s)ds. \end{aligned}$$

Ο τύπος αυτός παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε το $t$ με την τυχαία μεταβλητή $\tau_T = T \wedge \tau$. Για $s < \tau_T$ η στοχαστική διαδικασία $X_s$ βρίσκεται εντός του χωρίου $\Omega$ και συνεπώς αν η $u(x)$ είναι η λύση της ελλειπτικής εξίσωσης βλέπουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^t f(X_s)exp(c_s)ds$$

Τώρα παίρνουμε το όριο $T \to \infty$. Παίρνοντας την μέση τιμή και των δύο όρων και υπενθυμίζουμε ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι 0 αρκεί να είναι φραγμένο. Η ιδιότητα του ότι είναι φραγμένο μπορεί να εξασφαλιστεί στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις

($i$) $c \leq 0$ και $E[\tau] < \infty$, (αν $c$ αρνητικό και φραγμένο από το 0 τότε μπορούμε να αφήσουμε αυτή την υπόθεση.

($ii$) Αν υποθέσουμε ότι η $c$ μπορεί να πάρει θετικές τιμές και $c < a$ τότε χρειαζόμαστε την συνθήκη $sup_{x\in\Omega} E[exp(a\tau)] < \infty$.

Κάτω από οποιαδήποτε απο τις δύο αυτές συνθήκες, μπορούμε να πάρουμε την μέση τιμή καθώς $T \to \infty$ και βλέπουμε ότι αν η $u$ είναι λύση της ελλειπτικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι της μορφής που δόθηκε στην εκφώνηση του θεωρήματος.

Δεύτερον ας προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση που δώσαμε παραπάνω ικανοποιεί την εξίσωση. Αυτό θα γίνει με τον ίδιο τρόπο που αποδείξαμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το πρόβλημα Cauchy. Εφόσον η τυχαία μεταβλητή $\tau$ είναι ένας χρόνος στάσης αρκεί να εφαρμόσουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov.

Τέλος ας ασχοληθούμε με την συνοριακή συνθήκη. Εντελώς διαισθητικά μπορούμε να δούμε ότι αν ένα σημείο του σύνορου του χωρίου είναι κανονικό, τότε αν αρχίσουμε την διαδικασία διάχυσης από το σημείο αυτό ο χρόνος εξόδου θα είναι 0 με πιθανότητα 1. Στην περίπτωση αυτή όλα τα ολοκληρώματα θα είναι μηδενικά, και εφόσον $X_{\tau_D} = x$ για $x \in \partial\Omega$ θα ισχύει $E[\psi(X_\tau)] \to \psi(x)$ και $u(x) \to \psi(x)$ καθώς πλησιάζουμε το σύνορο. Αν η συνθήκη της κανονικότητας δεν είχε τεθεί τότε θα είχαμε προβλήματαμα την συνέχεια στο σύνορο και με το να ικανοποιήσουμε την συνοριακή συνθήκη Dirichlet και επίσης θα είχαμε πρόβλημα με την μοναδικότητα της λύσης. Οι διαισθητικές αυτές ιδέες μπορεί να γίνουν αυστηρές σχετικά εύκολα. Για την πλήρη απόδειξη βλ. π.χ. [2]. □

Με παρεμφερή τρόπο μπορούμε να δώσουμε μια αναπαράσταση των λύσεων του χρονικά εξαρτημένου (παραβολικού) προβλήματος Dirichlet.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Au + cu, \quad x \in \Omega \\ &u(0,x) = f(x), \\ &u(t,x) = g(t,x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.36}$$

Επίσης θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $f$,$c$, $g$ είναι συνεχείς και φραγμένες.

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 5.6.6** *Μία συνεχής και φραγμένη λύση του προβλήματος αυτού η οποία έχει φραγμένες και συνεχείς πρώτες παραγώγους στον χρόνο και φραγμένες και συνεχείς δεύτερες παραγώγους στις χωρικές μεταβλητές, έχει την αναπαράσταση*

$$u(t,x) \quad = \quad E_x\left[f(X_t)\mathbf{1}_{\{\tau_t=t\}} exp\left\{\int_0^t c(X_s)ds\right\}\right]$$

$$+ \quad E_x \left[ g(\tau, X_\tau) \mathbf{1}_{\{\tau_t \neq t\}} exp \left\{ \int_0^\tau c(X_s) ds \right\} \right]$$

*όπου* $\tau = inf\{s : X_s \in \partial\Omega\}$ *είναι ο χρονος πρώτης εξόδου της διαδικασίας* $X_s$ *από το χωρίο* $\Omega$ *(ο οποίος φυσικά εξαρτάται από την αρχική συνθήκη* $x$ *της διάχυσης),* $\tau_t = t \wedge \tau_D$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t = t\}}$ *η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου* $\{\omega : \tau = t\}$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t \neq t\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau_t = t\}}$.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι παρόμοια με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για την ελλειπτική περίπτωση και παραλείπεται.□

### 5.6.4 Η αναπαράσταση Feynman-Kac για προβλήματα που οι συντελεστές τους εξαρτώνται από τον χρόνο

Η αναπαράσταση Feynman-Kac μπορεί να γενικευθεί χωρίς μεγάλη δυσκολία και για προβλήματα που οι συντελεστές τους εξαρτώνται από τον χρόνο. Θα παρουσιάσουμε εδώ μία τέτοια γενίκευση για προβλήματα τα οποία τα επιλύσουμε αντίστροαφα στον χρόνο.

Ας ορίσουμε τον διαφορικό τελεστή

$$L := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,x) := A + c(t,x)$$

Με $X_s^{(t,x)}$ ας συμβολίσουμε την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_s^{(t,x)} = x + \int_t^s b(r, X_r^{(t,x)}) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{(t,x)}) dB_r$$

όπου $\sigma$ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $\sigma\sigma^T = a$.

Θεωρούμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις

$Y1.$ $y^T a y \geq \lambda \mid\mid y \mid\mid^2$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$ (ο τελεστής είναι ελειπτικός)

$Y2.$ $a_{ij}$, $b_i$ ομοιόμορφα συνεχείς κατά Lipschitz

Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= f(x), \ \text{στο} \ [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ u(T,x) &= g(x), \ \text{στο} \ \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.37}$$

και το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= f(x), \ \text{στο} \ [0,T] \times \Omega \\ u(T,x) &= g(x), \ \text{στο} \ \mathbb{R}^n \\ u(t,x) &= w(t,x), \ \text{στο} \ [0,T] \times \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.38}$$

Θεωρούμε ότι σχετικά με το πρόβλημα Cauchy ικανοποιούνται και οι περαιτέρω υποθέσεις

$Y3$. Οι συναρτήσεις $a_{ij}(t,x)$ είναι φραγμένες στο $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ και συνεχείς (κατά Hölder βλ. [10]) στο $x$.

$Y4$. Η συνάρτηση $c$ είναι φραγμενη στο $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ και ομοιόμορφα συνεχής κατά Hölder στο $x$ και $t$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

$Y5$. Η συνάρτηση $b$ είναι συνεχής στο $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, ομοιόμορφα συνεχής κατά Hölder στο $x$ και $t$ στο $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ και φραγμένη από μία πολυωνυμική συνάρτηση του $x$.

$Y6$. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$ και είναι φραγμένη απο μία πολυωνυμική συνάρτηση του $x$.

Σχετικά με το πρόβλημα Dirichlet ικανοποιούνται οι υποθέσεις

$Y3'$. Οι συναρτήσεις $c$ και $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς κατά Hölder στο $(t,x)\in[0,T]\times\bar{\Omega}$,

$Y4'$. Η $g$ είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$,

$Y5'$. Η $w$ είναι συνεχής στο $[0,T]\times\partial\Omega$,

$Y6'$. $g(x)=w(x,T)$ για $x\in\partial\Omega$.

Ισχύουν τα παρακάτω δύο θεωρήματα (βλ. [24])

**Θεώρημα 5.6.7** *Κάτω από τις υποθέσεις $Y1-Y6$ υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος Cauchy (5.37) η οποία δίνεται από την αναπαράσταση*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= E\left[g(X_T^{(t,x)})exp\left(\int_t^T c(s,X_s^{(t,x)})ds\right)\right] \\ &- E\left[\int_t^T f(X_s^{(t,x)})exp\left(\int_t^s c(r,X_r^{(t,x)})dr\right)ds\right] \end{aligned}$$

**Θεώρημα 5.6.8** *Ας θεωρήσουμε ότι το $\Omega$ είναι ένα φραγμένο και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ του οποίου το σύνορο $\partial\Omega$ είναι $C^2$. Κάτω από τις υποθέσεις $Y1-Y2$ και $Y3'-Y6'$ υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος Dirichlet (5.38) η οποία δίνεται από την αναπαράσταση*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= E\left[\mathbf{1}_{\{\tau<T\}}w(X_\tau^{(t,x)},\tau)exp\left(\int_t^\tau c(s,X_s^{(t,x)})ds\right)\right] \\ &+ E\left[\mathbf{1}_{\{\tau=T\}}g(X_T^{(t,x)})exp\left(\int_t^T c(s,X_s^{(t,x)})ds\right)\right] \\ &- E\left[\int_t^\tau f(s,X_s^{(t,x)})exp\left(\int_t^s c(r,X_r^{(t,x)})dr\right)ds\right] \end{aligned}$$

*όπου* $\tau=T\wedge\inf\{s\in[t,T]:X_s^{(t,x)}\notin\Omega\}$

Τα παραπάνω θεωρήματα έχουν και εκδοχές για όταν αντί για τελική συνθήκη έχουμε αρχική συνθήκη, δηλαδή όταν δίνεται το $u(0,x)$ αντί του $u(t,x)$. Σαν παράδειγμα δίνουμε την εκδοχή αυτή της λύσεως του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = Au + cu, \quad x \in \Omega \\
&u(0,x) = f(x), \\
&u(t,x) = g(t,x), \quad x \in \partial\Omega
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 5.6.9** *Μία $C^{1,2}$ λύση του προβλήματος αυτού έχει την αναπαράσταση*

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= E\left[f(X_t^{(t,x)})\mathbf{1}_{\{\tau_t=t\}} exp\left\{\int_0^t c(t-s, X_s^{(t,x)})ds\right\}\right] \\
&+ E\left[g(\tau, X_\tau^{(t,x)})\mathbf{1}_{\{\tau_t\neq t\}} exp\left\{\int_0^\tau c(t-s, X_s^{(t,x)})ds\right\}\right]
\end{aligned}$$

*όπου $\tau = inf\{s : X_s^{(t,x)} \in \partial\Omega\}$ είναι ο χρονος πρώτης εξόδου της διαδικασίας $X_s^{(t,x)}$ από το χωρίο $\Omega$ (ο οποίος φυσικά εξαρτάται από την αρχική συνθήκη $x$ της διάχυσης), $\tau_t = t \wedge \tau_D$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t=t\}}$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου $\{\omega : \tau = t\}$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t\neq t\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau_t=t\}}$.*

### 5.6.5 Εφαρμογές των αναπαραστάσεων Feynman-Kac

Με την βοήθεια των αναπαραστάσεων Feynman-Kac μπορούμε να υπολογίσουμε ενδιαφέρουσες ποσότητες για διαδικασίες διάχυσης (διαδικασίες Itô). Παρουσιάζουμε στην παράγραφο αυτή ορισμένες τέτοιες ενδιαφέρουσες εφαρμογές (βλ. π.χ. [10]).

#### Η εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov

• **Χρονικά ομογενείς διαχύσεις**
Αν στον τύπο Feynman-Kac για το πρόβλημα Cauchy θέσουμε $c = 0$ βρίσκουμε ότι η $u(t,x) = E_x[f(X_t)]$ ικανοποιεί την ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov ( backward Fokker-Planck-Kolmogorov equation ) η έχει την μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au.$$

Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε ποσότητα η οποία εξελίσσεται κατά μήκος μίας τροχιάς μίας διάχυσης ικανοποιεί την εξίσωση αυτή.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι λύνουμε την εξίσωση αυτή με αρχικές συνθήκες μία συνάρτηση δέλτα $\delta(x-y)$. Η λύση της εξίσωσης αυτής με την δεδομένη αρχική συνθήκη ονομάζεται μία θεμελιώδης λύση[5] ή στην γλώσσα της θεωρία

[5] ή αλλιώς συνάρτηση Green

πιθανοτήτων η πυκνότητα μετάβασης της διαδικασίας Markov που παράγεται από την διάχυση αυτή. Η ειδική αυτή λύση συμβολίζεται ως $p(t,x;y)$.

Η λύση για οποιαδήποτε άλλη αρχική συνθήκη που δίνεται από μία συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί σαν το ολοκλήρωμα

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p(t,x;y)dy$$

Αντί ολόκληρου του $\mathbb{R}^n$ ας θεωρήσουμε τώρα ένα χωρίο $D$ που έχει λείο σύνορο $\partial D$ και ας θέσουμε

$$f(x) = \mathbf{1}_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Η λύση του προβλήματος Cauchy για αυτή την αρχική συνθήκη, μπορεί να γραφεί ως

$$u(x,t) = E_x[\mathbf{1}_D(X_t)] = P(t,x;D) = \int_D p(t,x;y)dy$$

όπου $P(t,x;D)$ είναι η πιθανότητα ότι η διάχυση έχοντας ξεκινήσει στο σημείο $x$ βρίσκεται στο σύνολο $D$ μετά την πάροδο χρόνου $t$. Αν κάνουμε λίγες πράξεις μπορούμε να δούμε ότι η πυκνότητα μετάβασης $p(t,x;y)$ ικανοποιεί την αποκαλούμενη ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov (forward Fokker-Planck-Kolmogorov equation) στις μεταβλητές $t$ και $y$. Η εξίσωση αυτή δεν είναι παρά η συζυγής εξίσωση της ανάστροφης εξίσωσης

$$\frac{\partial p(t,x;y)}{\partial t} = A_y^* p(t,x;y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(\sigma_{ij}(y)p(t,x;y)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(b_i(y)p(t,x;y))$$

**Παράδειγμα 5.6.9** *Βρείτε τις ευθείες (forward) και ανάστροφες (backward )εξισώσεις Kolmogorov για την κίνηση Brown.*

*Ο γεννήτορας τελεστής της κίνησης Brown είναι ο τελεστής* $A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *ο οποίος είναι και αυτοσυζυγής δηλαδή* $A^* = A$. *Η πιθανότητα μετάβασης της κίνησης Brown από την θέση* $x$ *στην θέση* $y$ *σε χρόνο* $t$, $p(t,x,y)$ *ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

*ενώ οποιαδήποτε συνάρτηση της θέσης του σωματιδίου που εκτελεί την κίνηση Brown θα ικανοποιεί την ευθεία εξίσωση Kolmogorov*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*Η λύση των εξισώσεων Fokker-Planck-Kolmogorov μπορεί να μας δώσει την πυκνότητα μετάβασης πιθανότητας για την κίνηση Brown*

$$p(t,x;y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)$$

• **Μη χρονικά ομογενείς διαδικασίες διάχυσης**
Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι για μία μη χρονικά ομογενή διαδικασία διάχυσης η πυκνότητα μετάβασης $p(s,x;t,y)$ ικανοποιεί την ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + A_{s,x}\right) p(s,x;t,y) = 0, \quad s < t,$$

όπου με τους δείκτες $s,x$ εννοούμε ότι ο τελεστής $A$ περιέχει παραγωγίσεις ως προς τις (ανάστροφες) μεταβλητές $s,x$, και την ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A^*_{t,y}\right) p(s,x;t,y) = 0, \quad s < t,$$

όπου με τους δείκτες $t,y$ εννοούμε ότι ο τελεστής $A$ περιέχει παραγωγίσεις ως προς τις (ευθείες) μεταβλητές $t,y$,

**Παράδειγμα 5.6.10** *Γράψτε τις εξισώσεις Fokker-Planck-Kolmogorov για την πυκνότητα μετάβασης πιθανότητας της διαδικασίας Itô που δίνεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t$$

*όπου* $X \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $B_t \in \mathbb{R}^{d\times 1}$.

*Η πυκνότητα μετάβασης πιθανότητας θα έχει την μορφή* $p(s,x;t,y) := P[X_t = y \mid X_s = x]$, $s < t$ *(εξάρτηση και από το* $s$ *και το* $t$ *λόγω του ότι η διαδικασία διάχυσης έχει συντελεστές που εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο, δηλαδή δεν παράγεται απο μία αυτόνομη στοχαστική διαφορική εξίσωση).*
*Η ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov είναι της μορφής*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}p(s,x;t,y) \quad &- \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}(t,y)p(s,x;t,y)) \\ &- \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(b_i(t,y)\; p(s,x;t,y)) = 0\end{aligned}$$

*και η ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov είναι της μορφής*

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1} n b_i(s,x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) p(s,x;t,y) = 0$$

*Ο πίνακας* $a$ *ορίζεται ως* $a = \sigma\sigma^T$ *ή με μορφή συνιστωσών* $a_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$.
*Η λύση της ευθείας εξίσωσης μας δίνει την πυκνότητα μετάβασης σαν συνάρτηση των ευθέων μεταβλητών* $t,y$ *και η λύση της ανάστροφης μας δίνει την πυκνότητα μετάβασης σαν συνάρτηση των ανάστροφων μεταβλητών* $s,x$. *Η λύση της*

*ευθείας εξίσωσης είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό μέσων τιμών της μορφής $E[F(X_t) \mid \mathcal{F}_s]$ βάσει του τύπου*

$$E[F(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \int_{\mathbb{R}^n} p(s, x; t, y) F(y) dy.$$

*Τέτοιοι τύποι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων.*

### Μέσος χρόνος εξόδου από ένα χωρίο

Ας εφαρμόσουμε τώρα την αναπαράσταση της λύσης του ελλειπτικού προβλήματος Dirichlet στην περίπτωση όπου $\phi(x) = 0$, $c = 0$ και $f = -1$. Έχουμε ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} Au &= -1 \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

μπορεί να αναπαρασταθεί ως $u(x) = E[\tau_\Omega]$ (βλ. θεώρημα 5.6.5). Η τελευταία έκφραση όμως δεν είναι τίποτε άλλο από τον μέσο χρόνο εξόδου από το χωρίο $\Omega$ της διαδικασίας διάχυσης που έχει ως γεννήτορα τελεστή τον τελεστή $A$. Στην μονοδιάστατη περίπτωση ο μέσος χρόνος εξοδου μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.

**Παράδειγμα 5.6.11** *Για την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το σημείο $x \in [a, b]$ υπολογίστε τον μέσο χρόνο εξόδου από το διάστημα $[a, b]$.*

*Ο γεννήτορας τελεστής της μονοδιάστατης κίνησης Brown είναι ο $A = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$. Ο μέσος χρόνος εξόδου από το διάστημα $[a, b]$ δίνεται από την λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} T(x) = -1 \\ &T(a) = 0, \\ &T(b) = 0 \end{aligned}$$

*όπου με $T(x)$ συμβολίζουμε τον μέσο χρόνο εξόδου από το διάστημα $[a, b]$ δεδομένου ότι ξεκινήσαμε από το σημείο $x$. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Η λύση είναι*

$$T(x) = (x - a)(b - x).$$

### Μονοδιάστατη περίπτωση $x \in (a, b)$: Πιθανότητα εξόδου από το $b$

Ας εφαρμόσουμε την αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος Dirichlet για $\phi(x)$ τέτοιο ώστε $\phi(a) = 0$ και $\phi(b) = 1$, $c = 0$ και $f = 0$. Η λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned} Au &= 0 \quad x \in (a, b) \\ u(a) &= 0, \\ u(b) &= 1 \end{aligned}$$

δίνεται από την αναπαράσταση $u(x) = E[\phi(X_\tau)]$ (βλ. θεώρημα 5.6.5). Από την επίλογή της $\phi$ φαίνεται καθαρά ότι $u(x) = P\{X_\tau = b\}$, δηλαδή η πιθανότητα ένα σωματίδιο που ξεκίνησε στο $x$ φτάνει στο σημείο $b$ πρίν να φτάσει στο σημείο $a$. Η πιθανότητα αυτή μπορεί να υπολογιστεί με εκπεφρασμένο τρόπο επιλύοντας την συνήθη διαφορική εξίσωση που δόθηκε παραπάνω.

**Παράδειγμα 5.6.12** *Θεωρείστε την μονοδιάστατη κίνηση Brown στο διάστημα $[a, b]$ η οποία ξεκινάει από το σημείο $x$. Βρείτε την πιθανότητα $\psi(x)$ η πρώτη έξοδος από το διάστημα $[a, b]$ να είναι από το σημείο $b$.*

*Σύμφωνα με ότι είπαμε παραπάνω η πιθανότητα αυτή είναι λύση του προβλήματος συνοριακών συνθηκών*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = 0 \\ &\psi(a) = 0, \quad \psi(b) = 1 \end{aligned}$$

*Η λύση του προβλήματος αυτού είναι*

$$\psi(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

*Το αποτέλεσμα αυτό είχαμε πάρει με διαφορετικό τρόπο χρησιμοποιώντας την θεωρία των martingale.*

### Μέση τιμή εκθετικών συναρτήσεων του χρόνου πρώτης εξόδου

Ας πάρουμε $\lambda > 0$ ένα πραγματικό αριθμό. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή $E[e^{-\lambda\tau}]$ όπου $\tau$ είναι ο χρόνος πρώτης εξόδου από το χωρίο $\Omega$;

Έστω $\phi = 1$, $f = 0$ και $c = -\lambda$. Τότε η αναπαράσταση της λύσης του ελλειπτικού προβλήματος

$$\begin{aligned} Au - \lambda u &= 0 \qquad x \in \Omega \\ u &= 1 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

μας δίνει ότι $u(x) = E[e^{-\lambda\tau}] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_\tau(t) dt$ όπου $p_\tau(t)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\tau = min\{t : X_t^x \in \partial\Omega\}$ (βλ. θεώρημα 5.6.5). Μπορούμε να αναγνωρίσουμε την $u(x)$ σαν τον μετασχηματισμό Laplace αυτής της πυκνότητας πιθανότητας.

**Παράδειγμα 5.6.13** *Για την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο $x \in [a, b]$ βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου εξόδου $T_{x,a,b}$ από το διάστημα $[a, b]$.*

*Ας συμβολίσουμε με $u(x; \lambda)$ την ποσότητα αυτή, δηλαδή $u(x; \lambda) = E[e^{-\lambda T_{x,a,b}}]$. Σύμφωνα με τα παραπάνω η ποσότητα αυτή λύνει το πρόβλημα συνοριακών τιμών*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} - \lambda u &= 0 \qquad x \in [a, b] \\ u(a; \lambda) &= 1 \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+ \\ u(b; \lambda) &= 1 \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

*Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι*

$$u(x;\lambda) = C_1 \exp(\sqrt{2\lambda}x) + C_2 \exp(-\sqrt{2\lambda}x)$$

*όπου $C_1$, $C_2$ είναι σταθερές που καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Μετά από λίγη άλγεβρα βρίσκουμε ότι*

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{-\sqrt{2\lambda}a}}{e^{\sqrt{2\lambda}a}e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}b}e^{-\sqrt{2\lambda}a}} = 2\frac{e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{-\sqrt{2\lambda}a}}{sinh(\sqrt{2\lambda}(a-b))} \\ C_2 &= \frac{e^{\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}a}}{e^{\sqrt{2\lambda}a}e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}b}e^{-\sqrt{2\lambda}a}} = 2\frac{e^{\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}a}}{sinh(\sqrt{2\lambda}(a-b))} \end{aligned}$$

*Η παραπάνω έκφραση λοιπόν δίνει τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου εξόδου της κίνησης Brown που ξεκίνησε από το σημείο $x$ από το διάστημα $[a,b]$. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να μας δώσει την κατανομή του πρώτου χρόνου εξόδου.*
*Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση $x=0$ και $a \to -\infty$. Η εφαρμογή του τύπου για τις τιμές αυτές θα μας δόσει τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου εξόδου της κίνησης Brown που ξεκίνησε από το 0 από το διάστημα $(-\infty, b)$ ή αλλιώς τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου που η τυπική κίνηση Brown χτυπάει το σημείο $x=b$. Μπορούμε να δούμε ότι στο όριο $a \to -\infty$,*

$$C_1 \to e^{-\sqrt{2\lambda}b}, \;\; C_2 \to 0$$

*Συνεπώς, $E[e^{-\lambda T_b}] = e^{\sqrt{2\lambda}b}$, που φυσικά συμπίπτει με το αποτέλεσμα που είχαμε βρεί στο Παράδειγμα 3.3.2 χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους.*

### Πιθανότητα να είναι ο χρονος εξόδου μεγαλύτερος του $t$

Θα εργαστούμε τώρα με την αναπαράσταση Feynman-Kac της λύσης του παραβολικού προβλήματος (βλ. θεώρημα 5.6.6). Ας θέσουμε $g=0$, $f=1$, $c=0$. Τότε η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Au, \;\; x \in \Omega \\ u(0,x) &= 1, \\ u(t,x) &= 0, \;\; x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

δίνεται από την αναπαράσταση $u(t,x) = E[\mathbf{1}_{\tau_t = t}] = P\{\tau > t\}$. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης λοιπόν θα μας δώσει την πιθανότητα ο πρώτος χρόνος εξόδου απο το χωρίο $\Omega$, $\tau$, να είναι μεγαλύτερος του $t$. Προβλήματα τέτοιου τύπου είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στα αναλογιστικά μαθηματικά.

**Παράδειγμα 5.6.14** *Θεωρείστε την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο $x$. Βρείτε την πιθανότητα ο χρόνος εξόδου από το διάστημα $[a,b]$ να είναι μεγαλύτερος από $t$.*

*Ας συμβολίσουμε με $p(t,x)$ την πιθανότητα αυτή. Η συνάρτηση $p(t,x)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης*

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t,x)$$

*με αρχική συνθήκη*

$$p(0,x) = 1,$$

*και συνοριακή συνθήκη*

$$p(t,a) = 0, \;\; p(t,b) = 0.$$

*Το πρόβλημα αυτό είναι μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η λύση της οποίας μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους όπως π.χ. η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών ή η μέθοδος των εικόνων. Δεν θα επεκταθούμε στον τρόπο λύσης αλλά θα δώσουμε την τελική έκφραση η οποία είναι*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_a^b p_{a,b}(x,t;y,0)dy \\ p_{a,b}(x,t;y,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left(-\frac{(x+2nd-y)^2}{2t}\right)\right. \\ &- \left.\exp\left(-\frac{(2b-x+2nd+y)^2}{2t}\right)\right\} \end{aligned}$$

*όπου $d = b-a$. Η λύση αυτή έχει βρεθεί με την βοήθεια της μεθόδου των εικόνων. Ισοδύναμη μορφή της λύσης μπορεί να βρεθεί με την χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών οπότε η λύση θα είναι εκφρασμένη με την μορφή μίας σειράς Fourier.Η ισοδύναμη αυτή έκφραση είναι*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_a^b p_{a,b}(x,t;y,0)dy \\ p_{a,b}(x,t;y,0) &= \frac{2}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{d}\right)\sin\left(\frac{n\pi(y-a)}{d}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2d^2t}\right) \end{aligned}$$

*Οι δύο αυτές αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες. Στην μία περίπτωση η λύση για την πιθανότητα ο χρόνος εξόδου να είναι μεγαλύτερος του $t$ θα δοθεί σαν μία άπειρη σειρα από συναρτήσεις σφάλματος, ενώ στην δεύτερη σαν μία σειρά Fourier.*

### 5.6.6 Άλλα προβλήματα συνοριακών τιμών.

Και τα άλλα προβλήματα συνοριακών τιμών μπορούν να έχουν κάποια πιθανοθεωρητική ερμηνεία. Η πιθανοθεωρητική ερμηνεία των άλλων προβλημάτων συνοριακών τιμών απαιτεί την χρήση πιο περίπλοκων διαχύσεων από αυτές που χρησιμοποιούνται για την μελέτη του προβλήματος Dirichlet. Θα αρκεστούμε εδώ να παραθέσουμε μερικές βασικές ιδέες. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε π.χ. στο [10].

Ας υποθέσουμε πως ενδιαφερόμαστε για την λύση του ακόλουθου προβλήματος Neumann.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= Au - cu, \quad x \in \Omega \\
u(x,0) &= f(x), \\
(\nabla u, \gamma(x)) - \lambda(x)u &= h(x), \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Τότε, και αυτό είναι φανερό διαισθητικά, μπορούμε να περιμένουμε ότι χρειαζόμαστε μία διαδικασία διάχυσης που σχετίζεται με τον τελεστή $A$, αλλά αφού η συνοριακή συνθήκη σχετίζεται με τον προσδιορισμό κάποιας ροής, η διάχυση που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να είναι (μερικώς) ανακλώμενη στο σύνορο του χωρίου που μας ενδιαφέρει κατά την διεύθυνση $\gamma(x)$ ($\gamma$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο).

Η παραπάνω διαισθητική αντιμετώπιση του θέματος μπορεί να γίνει πιο αυστηρή ως εξής: Η διαδικασία διάχυσης που μας ενδιαφέρει μπορεί να δοθεί από την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$
\begin{aligned}
& dX_t^x = \sigma(X_t^x)dB_t + b(X_t^x)dt + \mathbf{1}_{\partial\Omega}(X_t^x)\gamma(X_t^x)d\xi_t^x, \\
& X_0^x = x, \;\; \xi_0^x = 0
\end{aligned}
$$

όπου $\mathbf{1}_{\partial\Omega}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόρου του χωρίου $\Omega$ και $\xi_t^x$ είναι μία μη-φθίνουσα διαδικασία που αυξάνει μόνο όταν $t \in \Lambda = \{t : X_t^x \in \partial\Omega\}$. Με άλλα λόγια, τα σωματίδια διαχέονται χωρίς καμία παρέμβαση εως ότου φτάσουν στο σύνορο του χωρίου όπου η στοχαστική διαδικασία $xi_t^x$ τα ανακλά κατά την διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου $\gamma(x)$. Η απόδειξη της ύπαρξης μίας τέτοιας διαδικασίας διάχυσης είναι μη τετριμένο θέμα, και παραπέμπουμε στην σχετική βιβλιογραφία. Εδώ θα ακολουθήσουμε την τακτική της ακρίδας και θα θεωρήσουμε δεδομένη την ύπαρξη μίας τέτοιας διαδικασίας διάχυσης και θα παραθέσουμε (χωρίς απόδειξη) το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 5.6.10** *Μία λύση του προβλήματος (5.40) που είναι $C^{1,2}$ έχει την αναπαράσταση*

$$
\begin{aligned}
u(t,x) \;\; = \;\; & E\left[f(X_t^x)exp\left\{-\int_0^t c(X_s^x)ds - \int_0^t \lambda(X_s^x)d\xi_s^x\right\}\right] - \\
& E\left[\int_0^t h(X_s^x)exp\left\{\int_0^s c(X_{s'}^x)ds^{'} - \int_0^s \lambda(X_{s'}^x)d\xi_{s'}\right\}d\xi_s^x\right]
\end{aligned}
$$

Με τον όρο $C^{1,2}$ εννοούμε ότι η λύση έχει συνεχείς και φραγμένες δεύτερες παραγώγους στις χωρικές μεταβλητές και συνεχείς και φραγμένες πρώτες παραγώγους στον χρόνο.

Παρόμοιες αναπαραστάσεις μπορεί να δοθούν και για ελλειπτικά προβλήματα.

## 5.7 Αποδείξεις των θεωρημάτων

### 5.7.1 Χώροι Banach και το θεώρημα σταθερού σημείου

**Ορισμός 5.7.1** *Ένας χώρος Banach είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος με νόρμα.*

Υπενθυμίζουμε την έννοια της πληρότητας: Ένας χώρος $X$ ονομάζεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy $u_n$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο $u$ για το οποίο ισχύει $u \in X$.

Για τους χώρους Banach ισχύει το θεώρημα σταθερού σημείου.

**Θεώρημα 5.7.1** (**Το θεώρημα σταθερού σημείου**) *Έστω $X$ ένας χώρος Banach και $\| \,.\, \|_X$ μία νόρμα σε αυτόν. Έστω μία απεικόνιση $T : X \to X$ για την οποία ισχύει $\| Tu_1 - Tu_2 \|_X \leq \| u_1 - u_2 \|_X$. Τότε υπάρχει $u \in X$ τέτοιο ώστε $Tu = u$.*

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές στο βασικό αυτό θεώρημα σταθερού σημείου. Τα θεωρήματα σταθερού σημείου παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, και ιδιαίτερα στις διαφορικές εξισώσεις, είτε στοχαστικές είτε ντετερμινιστικές.

### 5.7.2 Απόδειξη της ιδιότητας Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Θα αποδείξουμε στο παράρτημα αυτό την ιδότητα Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (θεώρημα 5.4.2 )

Για την διευκόλυνση των αναγνωστών παραθέτουμε το θεώρημα

**Θεώρημα 5.4.2(Η ιδιότητα Markov** ) Έστω $X_t$ η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

όπου οι συντελεστές πληρούν τις συνθήκες Lipschitz και την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Τότε η $X_t$ είναι μία διαδικασία Markov με πιθανότητα μετάβασης που ορίζεται από την σχέση

$$p(s, x; t, A) = P(X_t^{(s,x)} \in A)$$

όπου $X_t^{(s,x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_t^{(s,x)} = x + \int_s^t b(r, X_r^{(s,x)})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{(s,x)})dB_r \tag{5.41}$$

για $s \leq t$. Η $X_t^{(s,x)}$ ουσιαστικά είναι η λύση της αρχικής στοχαστικής εξίσωσης με αρχική τιμή $x$ την χρονική στιγμή $s$ ή αλλιώς για $X_s = x$.

**Απόδειξη:** Έστω $\mathcal{G}_s = \sigma(B_r - B_s : r \geq s)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις μεταβολές της κίνησης Brown μεταξύ των χρονικων στιγμών $s$ και $r$. Λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών της κίνησης Brown η σ-άλγεβρα αυτή είναι α-νεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_s = \sigma(B_r, r \leq s)$. Από τον ορισμό της μέσω της εξίσωσης (5.41) η $X_t^{(s,x)}$ θα είναι $\mathcal{G}_s$-μετρήσιμη συνεπώς θα είναι ανεξάρτηση της $\mathcal{F}_s$. Η $X_t$ όμως θα ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = X_s + \int_s^t b(r, X_r)dr + \int_s^t \sigma(r, X_r)dB_r$$

(δηλαδή την αρχική στοχαστική διαφορική εξίσωση αλλά με αρχική τιμή την $X_s$ όταν σαν αρχική χρονική στιγμή παίρνουμε την χρονική στιγμή $s$). Η εξίσωση αυτή είναι η ίδια με την (5.41) συνεπώς λόγω της μοναδικότητας των λύσεων των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να καταλήξουμε ότι $X_t = X_t^{(s,X_s)}$ για $s \leq t$.

Ας θεωρήσουμε τώρα $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και ας θέσουμε $h(x,\omega) = \mathbf{1}_A(X_t^{(s,x)})$. Έχουμε ότι

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = E[\mathbf{1}_A(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s,X_s)}) \mid \mathcal{F}_s]$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την ανεξαρτησία της $X_t^{(s,X_s)}$, $s \leq t$ από την $\mathcal{F}_s$ έ-τσι ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη μεση τιμή ως προς την σ-άλγεβρα αυτή. Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα ότι αν $h(x,\omega)$ είναι μία φραγμένη μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση του $x$ η οποία είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s$ και αν $\zeta$ είναι μία τυχαία μεταβλητή η ο-ποία είναι μετρήσιμη ως πρός την σ-αγεβρα $\mathcal{F}_s$ τότε $E[h(\zeta,\omega) \mid \mathcal{F}_s] = H(\zeta)$ όπου $H(x) := E[h(x,\omega)]$. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού που μάλλον είναι διαισθητικά αναμενόμενος παρατίθεται σαν ένα ξεχωριστό λήμμα στην συνέχεια.

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$\begin{aligned} P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) &= E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s,X_s)}) \mid \mathcal{F}_s] = E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s,x)})]\Big|_{x=X_s} \\ &= p(s,x;t,A)|_{x=X_s} = p(s,X_s;t,A) \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

**Λήμμα 5.7.1** *Έστω $h(x,\omega)$ μία φραγμένη μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση του $x$ η οποία είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_s$. Έστω $\zeta$ μία $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Τότε,*

$$E[h(\zeta,\omega) \mid \mathcal{F}_s] = H(\zeta)$$

*όπου $H(x) = E[h(x,\omega)]$.*

**Απόδειξη:** Ας θεωρήσουμε ότι η $h(x,\omega)$ είναι μία απλή συναρτηση της μορφής

$$h(x,\omega) = \sum_{i=1}^k u_i(x)v_i(\omega)$$

όπου $u_i(x)$ είναι ντετερμινιστικές συναρτήσεις του $x$ και οι $v_i(\omega)$ είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες της $\mathcal{F}_s$. Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε την συνάρτηση $H(x)$ η οποία και θα πάρει την μορφή

$$H(x) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x) E[v_i(\omega)]$$

Για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{F}_s$ ισχύει

$$\begin{aligned} E[h(\zeta,\omega)\mathbf{1}_A] &= E[\sum_{i=1}^{k} u_i(\zeta) v_i(\omega)\mathbf{1}_A] = \sum_{i=1}^{k} E[u_i(\zeta)\mathbf{1}_A] E[v_i(\omega)] \\ &= E[\sum_{i=1}^{k} u_i(\zeta) E[v_i(\omega)]\mathbf{1}_A] = E[H(\zeta)\mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει για $h$ οι οποίες είναι απλές συναρτήσεις. Όμως, κάθε φραγμένη, μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση $h(x,\omega)$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία τυχαίων συναρτήσεων απλής μορφής. Παίρνοντας το όριο των ακολουθιών αυτών και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της σύγκλισης καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

### 5.7.3 Απόδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Θα αποδείξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή το θεώρημα 5.4.3. Για την διευκόλυνση των αναγνωστών παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος.

**Θεώρημα 5.4.3( Η ισχυρή ιδιότητα Markov)** Έστω $X_t$ η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t$$

Ας θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις γραμμικές συνθήκες αύξησης δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \mid b(t,x) - b(t,y) \mid^2 \vee \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid^2 \leq \bar{K} \mid x - y \mid^2 \\ \mid b(t,x) \mid^2 \vee \mid \sigma(t,x) \mid^2 \leq K(1 + \mid x \mid^2) \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$. Τότε, η στοχαστική διαδικασία $X_t$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov.

**Απόδειξη:** Έχοντας ήδη αποδείξει την ιδιότητα Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, για να δείξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov θα πρέπει να δείξουμε επίσης και ότι οι λύσεις ικανοποιούν και την ιδιότητα Feller καθώς και την συνέχεια των τροχιών. Η συνέχεια των τροχιών μπορεί να αποδειχθεί κάνοντας χρήση τις ιδιότητες συνέχειας των στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η απόδειξη της ιδιότητας του Feller για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η απόδειξη ότι η ιδιότητα Feller εξασφαλίζει την ισχυρή ιδιότητα Markov είναι πέρα των πλαισίων του παρόντος. Για την απόδειξη του σημείου αυτού παραπέμπουμε π.χ. στο [8]. Για να δείξουμε ότι οι λύσεις της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης έχουν την ιδιότητα Feller θα πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$(x,s) \to \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)p(s,x;s+\lambda,dy) := E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})]$$

είναι συνεχής για κάθε φραγμένη συνεχή συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και για κάθε δεδομένο $\lambda > 0$.

Αυτό μπορεί να δειχθεί ως εξής. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})] - E[\phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] &= E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] = \\ & E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(s,x)}) + \phi(X_{u+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] \end{aligned}$$

Λόγω όμως της συνέχειας των λύσεων των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] \to 0, \quad (u,y) \to (s,x) \\ E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(s,x)})] \to 0, \quad u \to s \end{aligned}$$

Η απόδειξη των ισχυρισμών αυτών σαν ένα ξεχωριστό λήμμα στο τέλος της παραγράφου.

Συνεπώς,

$$E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})] - E[\phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] \to 0, \quad (u,y) \to (s,x)$$

άρα η μέση τιμή $E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})]$ είναι μία συνεχής συνάρτηση των $(s,x)$ για κάθε $\lambda$. Έτσι αποδεικνύεται η ιδιότητα Feller και από αυτή καταλήγουμε στην ισχυρή ιδιότητα Markov. $\square$

Θα δώσουμε τώρα και το λήμμα που σχετίζεται με την συνέχεια.

**Λήμμα 5.7.2** *Ας υποθέσουμε ότι οι συντελεστές της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης $b, \sigma$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχείς και ότι ικανοποιούν την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Για κάθε $(x,s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ ας συμβολίσουμε με $X_t^{(s,x)}$ την λύση της εξίσωσης*

$$X_t^{(s,x)} = x + \int_s^t b(r, X_r^{(s,x)})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{(s,x)})dB_r, \quad t \geq s$$

*Τότε, για κάθε $T > 0$ και $\delta > 0$ ισχύει ότι*

$$E[\sup_{u \leq t \leq T} \mid X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y} \mid^2] \leq C(\mid x-y \mid^2 + \mid u-s \mid), \quad 0 \leq s,u \leq T, \ \mid x \mid \vee \mid y \mid \leq \delta$$

**Απόδειξη:** Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $s \leq u$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y)} &= X_u^{(s,x)} - y + \int_u^t [b(r, X_r^{(s,x)}) - b(r, X_r^{(u,y)})]dr \\ &+ \int_u^t [\sigma(r, X_r^{(s,x)}) - \sigma(r, X_r^{(u,y)})]dB_r \end{aligned}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες που ικανοποιούν οι συντελεστές παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[\mid X_u^{(s,x)} - y \mid^2] &\leq 2E[\mid X_u^{(s,x)} - x \mid^2 + 2 \mid x - y \mid^2] \\ &\leq C_1 \mid u - s \mid + 2 \mid x - y \mid^2 \end{aligned}$$

Αν $u \leq v \leq T$ τότε

$$\begin{aligned} E[\sup_{u \leq t \leq v} \mid X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y)} \mid^2] &\leq 3C_1 \mid u - s \mid + 6 \mid x - y \mid^2 \\ &+ 3K(T+t) \int_u^v E[\sup_{u \leq t \leq r} \mid X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y)} \mid^2]dr \end{aligned}$$

Από την σχέση αυτή μπορεί να καταλήξουμε στο ζητούμενο κάνοντας χρήση της ανισότητας του Gronwall (βλ. Λήμμα 5.7.3). □

**Λήμμα 5.7.3 (Ανισότητα του Gronwall)** *Έστω $f(t)$ μία μη αρνητική, φραγμένη και μετρήσιμη κατά Borel συνάρτηση στο διάστημα $[0,T]$ και $g(t)$ μία μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,T]$. Αν ισχύει*

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

*τότε*

$$f(t) \leq c \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right), \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη του κλασσικού αυτού λήμματος αρκεί να θέσουμε $z(t)$ ίσο με το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της πρώτης ανισότητας και να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας για να βρούμε μία ανισότητα για το $log(z(t))$. □

### 5.7.4 Απόδειξη του θεωρήματος του Girsanov

Θα δώσουμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος του Girsanov. Για ευκολία παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος.

**Θεώρημα 5.5.2(Girsanov)** Ας θεωρήσουμε $u_t = (u_{1,t}, ..., u_{n,t})$ ένα διάνυσμα από (τετραγωνικά ολοκληρώσιμες) στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν την συνθήκη του Novikov

$$E[exp(\frac{1}{2}\int_0^T u_s \cdot u_s ds)] < \infty.$$

Έστω $B_t$ μία τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $P$. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t^u = exp[-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s \cdot u_s ds], \qquad t \in [0,T].$$

Η στοχαστική αυτή διαδικασία είναι μία martingale κάτω από το μέτρο Π. Θεωρείστε τώρα το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας $Q^u$ που ορίζεται από το

$$\frac{dQ^u}{dP} = M_t^u$$

Τότε η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}^u$ που ορίζεται από την σχέση

$$\bar{B}_t^u = B_t + \int_0^t u_s ds, \quad 0 \le t \le T$$

είναι μία τυπική κίνηση Brown και μία martingale κάτω από το μέτρο $Q^u$. Επιπλέον, η $\bar{B}^u$ έχει την ιδιότητα αναπαράστασης martingale, δηλαδή για κάθε τοπική $Q^u$-martingale $L_t$ υπάρχει κάποια $\phi$ η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και τέτοια ωστε

$$L_t = L_0 + \int_0^t \phi_s d\bar{B}_s^u, \quad t \le T$$

**Απόδειξη:** Για να αποδείξουμε το θέωρημα του Girsanov αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Levy για να δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t$ είναι μία κίνηση Brown. Συγκεκριμένα, αρκει να δείξουμε ότι η $\bar{B}_t$ και η $L_t := \bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t$ είναι martingales ως προς το μέτρο $Q$.

Για το πρώτο ισχυρισμό θα δείξουμε πρώτα ότι η στοχαστική διαδικασία $K_t = M_t B_t$ είναι martingale κάτω από το μέτρο $P$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Itô για την διαδικασία $K_t$. Ισχύει ότι

$$dK_{i,t} = M_t d\bar{B}_{i,t} + \bar{B}_{i,t} dM_t + d\bar{B}_{i,t} dM_t$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα ότι

$$dM_t = -M_t \sum_j u_{j,t} dB_{j,t}$$

και ότι

$$d\bar{B}_{i,t} = u_{i,t}dt + dB_{i,t}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} dK_{i,t} &= M_t(dB_{i,t} + u_{i,t}dt - \bar{B}_{i,t}\sum_j u_{j,t}dB_{j,t} - \sum_j u_{j,t}\delta_{ij}dt \\ &= M_t(dB_{i,t} - \bar{B}_{i,t}\sum_j u_{j,t}dB_{j,t}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η στοχαστική διαδικασία $K_t$ μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô επάνω στην στοχαστική διαδικασία $B_t$ η οποία είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $P$. Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô καταλήγουμε ότι η $K_t$ είναι μία αμ μαρτινγαλε κάτω από το μέτρο $P$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο για τον υπολογισμό των υπό συνθήκη μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο. Έχουμε ότι

$$E_Q[\bar{B}_{i,t} \mid \mathcal{F}_s] = \frac{E_P[M_t\bar{B}_{i,t} \mid \mathcal{F}_s]}{E_P[M_t \mid \mathcal{F}_s]} = \frac{E_P[K_{i,t} \mid \mathcal{F}_s]}{M_s} = \frac{K_{i,s}}{M_s} = \bar{B}_{i,s}$$

και συνεπώς η $\bar{B}_t$ είναι μια martingale κάτω από το μέτρο $Q$. Στην παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $K_t$ και η $M_t$ είναι martingales κάτω από το μέτρο $Q$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό θα αποδείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $K_t^{'} = M_t(\bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t)$ είναι martingale κάτω από το μέτρο $P$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Itô για την συνάρτηση $f(x,y,z,t) = z(xy - \delta_{ij}t)$ όπου $x = \bar{B}_{i,t}$, $y = \bar{B}_{j,t}$ και $z = M_t$. Μετά από λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} dK_t^{'} = -\delta_{ij}M_t dt + M_t\bar{B}_{j,t}d\bar{B}_{i,t} + M_t\bar{B}_{i,t}d\bar{B}_{j,t} + \\ (\bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t)dM_t + M_t d\bar{B}_{i,t}d\bar{B}_{j,t} + \\ \bar{B}_{j,t}dM_t d\bar{B}_{i,t} + \bar{B}_{i,t}dM_t d\bar{B}_{j,t} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι

$$dK_t^{'} = -M_t(\bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t)\sum_{j^{'}} u_{j^{'},t}dB_{j^{'},t} = -K_t^{'}\sum_{j^{'}} u_{j^{'},t}dB_{j^{'},t}$$

Η στοχαστική διαδικασία $K_t^{'}$ μπορεί λοιπόν να εκφραστεί σαν ένα ολοκλήρωμα Itô επάνω στην διαδικασία $B_t$ η οποία είναι μία κίνηση Brown ως προς το μέτρο $P$. Χρησιμοποιούμε τώρα τον τύπο για τον υπολογισμό της υπό συνθήκης μέσης τιμής ως προς το μέτρο $Q$

$$E_Q[L_t \mid \mathcal{F}_s] = \frac{E_P[M_tL_t \mid \mathcal{F}_s]}{E_P[M_t \mid \mathcal{F}_s]} = \frac{E_P[K_{i,t}^{'} \mid \mathcal{F}_s]}{M_s} = \frac{K_{i,s}^{'}}{M_s} = L_s$$

και συνεπώς η $L_t$ είναι μια martingale κάτω από το μέτρο $Q$. Στην παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $K_t$ και η $M_t$ είναι martingales κάτω από το μέτρο $Q$.

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

## 5.8 Βασικές ιδέες του κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε μερικές βασικές ιδέες σχετικά με τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, την ύπαρξη και τις ιδιότητες των λύσεων τους και σκιαγραφήσαμε τις πιθανές τους εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά. Ένα από τα βασικότερα σημεία του κεφαλαίου αυτού είναι η σύνδεση των πιθανόν μη γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με ντετερμινιστικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους μέσω τηςαναπαράστασης των Feynman-Kac.

Σημαντικά σημεία που πρέπει να θυμόμαστε

- Οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων είναι διαδικασίες Itô
- Τις συνθήκες κάτω από τις οποίες έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις
- Την διάκριση μεταξύ ισχυρών και ασθενών λύσεων
- Οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov κάτω από ορισμένες συνθήκες
- Το θεώρημα του Girsanov σχετικά με την αλλαγή ταχύτητας σε μία στοχαστική διαφορική εξίσωση.

  ♢ Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό μπορούμε να μετατρέψουμε μία διαδικασία Itô σε martingale αν την 'κοιτάξουμε' κάτω από το κατάλληλο μέτρο πιθανότητας.

  ♢ Το θεώρημα Girsanov μας παρέχει ένα τρόπο κατασκευής του μέτρου αυτού

  ♢ Το θεώρημα του Girsanov είναι ένα από τα πιο απαραίτητα μαθηματικά αποτελέσματα στην χρηματοοικονομική
- Με κάθε διαδικασία Itô μπορούμε να συσχετίσουμε ένα διαφορικό τελεστή με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ο οποίος ονομάζεται ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας.
- Με την χρήση του γεννήτορα τελεστή μπρούμε να συνδέσουμε τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις με τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

  ♢ Η αναπαράσταση Feynman-Kac μας επιτρέπει να γράψουμε την λύση ντετερμινιστικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σαν την μέση τιμή κατάλληλα επιλεγμένων συναρτησοειδών επάνω στις τροχιές κατάλληλα επιλεγμένων διαδικασιών Itô

  ♢ Με την χρήση της αναπαράστασης αυτής μπορούμε να πάρουμε ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τις ιδιότητες διαδικασιών Itô όπως π.χ. χρονους εξόδου από περιοχές ή την πυκνότητα μετάβασης

  ♢ Η αναπαράσταση αυτή βρίσκει ευρεία χρήση στην χρηματοοικονομική. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εξίσωση Black-Scholes για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων

# Βιβλιογραφία


[1] R. F. Bass, *'Probabilistic Techniques in Analysis'*, Springer-Verlag, 1995

[2] R. F. Bass, *Diffusions and Elliptic Operators*, Springer-Verlag, 1998

[3] H. Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση: Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα, 1997

[4] Z. Brzeźniak and T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes*, Springer, 1999

[5] H. Bühlmann, *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer, 1970

[6] Y. S. Chow and H. Robbins *'On optimal stopping rules.'* **Z. Wahr. Theorie Vol. 2** pp. 33-49 (1963)

[7] J. Cox, S. Ross and M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, **J. Financial Econ. 7** pp. 229-264 (1979)

[8] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, John Wiley and Sons, 1986

[9] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society, 1998

[10] M. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations*, Annals of Mathematics Studies, Study 109, Princeton University Press, 1985

[11] P. M. Garber and L. E. O. Svensson, *The operation and collapse of fixed exchange rate regimes*, Institute for International Economic Studies, University of Stockholm, Seminar Paper No. 588, 1994

[12] C. Goffman and G. Pedrick,*First Course in Functional Analysis*, Prentice-Hall, 1965

[13] B. Fristedt and L. Gray, *A Modern Approach to Probability Theory*, Birkhäuser, 1997

[14] J. Jacod and P. Protter, *Probability Essentials*, Springer, 2000

[15] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 1997

[16] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability* Chelsea New York, 1933-56

[17] Σ. Καλπαζίδου, *Στοιχεία Μετροθεωρίας Πιθανοτήτων*, Εκδόσεις Ζήτη, 2002

[18] Γ. Κουμουλλής και Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1988

[19] Κ. Ι. Κουτσόπουλος, *Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι: Θεωρία των Κινδύνων*, Αθήνα 1999

[20] P.R. Krugman, *Currencies and Crises*, The MIT Press, 1992

[21] N. V. Krylov, *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 142, American Mathematical Society, 1995

[22] S. F. LeRoy *'Efficient capital markets and martingales.'* **Journal of Economic Literature Vol. XXVII** 1989 pp. 1583-1621.

[23] J. D. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002

[24] X. Mao *Stochastic Differential Equations and Applications* Horwood Series in Mathematics and Applications Horwood Publishing Chichester 1997

[25] P. Malliavin, *Integration and Probability*, Springer, 1995

[26] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1988

[27] J. Neveu, *Discrete-Parameter Martingales*, North-Holland Mathematical Library, Volume 10, North-Holland, 1975

[28] L. T. Nielsen, *Pricing and Hedging of Derivative Securities*, Oxford, 1999

[29] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th Edition, Springer 1997

[30] P. Protter *Stochastic Integration and Differential Equations* Springer, 1990

[31] A. W. Phillips, *'The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1861-1957'*, **Economica** November 1958

[32] M. M. Rao, *Probability Theory with Applications*, Academic Press, 1984

[33] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion* Springer, 1999 (3rd Edition)

[34] W. Rudin, *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα, Leader Books, Αθήνα, 2000

[35] A. E. Taylor, *General Theory of Functions and Integration*, Dover Publications 1985

[36] Σ. Α. Τερσένοβ, *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1992

[37] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, 1991

[38] Ο. Χρυσαφίνου, *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις (Διδακτικές Σημειώσεις)* Αθήνα 2002