Δεσμευμένη μέση τιμή

Κίνηση Brown, τα βασικά

Semimartingales

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα

Εφαρμογές του

Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Σε σχέση με το προπτυχιακό

— Υπολογισμοί με το Θ. επιλ. διακοπής

Κάποιες ιδιότητες της κιν. Brown

\+ ολοκλήρωμα $\int X(s,\omega)\, dM_s$

Θ. χαρακτηρισμού του Levy

Girsanov

Θ. Αναπαράστασης των martingales

Local times

Απειροστικός γεννήτορας διάχυσης

Θ. Ύπαρξης + μοναδικότητας ΣΔΕ

Βιβλία

1. Kuo. Introduction to stochastic integration

2. Le Gall. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus

3. Durrett. Stochastic calculus

4. Revuz-Yor. Continuous martingales and B. M.

5. Protter. Stochastic integration and differential equations

Μετρήσιμες συναρτήσεις

$$f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$$

μετρήσιμη αν $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$

Άσκηση:

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, E\}$$

$f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη

$\Leftrightarrow$ f σταθερή

λύση

$\Leftarrow$ Έστω ότι $f(x) = c \ (\in \mathbb{R}) \quad \forall x \in E$

τότε $f^{-1}(A) = \begin{cases} E & \text{αν } c \in A \\ \emptyset & \text{αν } c \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Αν όχι σταθερή

υπάρχουν $c_1 < c_2$

$x, y \in E$:

$f(x) = c_1 \ , \ f(y) = c_2$

$U \ni x, \not\ni y$

πρέπει $f^{-1}((-\infty, c_1]) \in \mathcal{E}$

Σ-άλγεβρα παραγόμενη από διαμέριση
αριθμήσιμη

X σύνολο

$\mathcal{C}=\{A_i : i\in I\}$ αριθμήσιμη διαμέριση του X

$$\sigma(\mathcal{C}) = \Big\{ \bigcup_{i\in J} A_i : J\subset I \Big\} \quad \mathcal{G}$$

Αν $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα με $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$

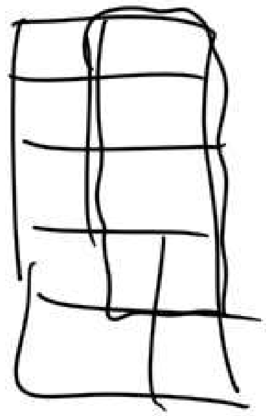
τότε $\bigcup_{i\in J} A_i \in \mathcal{A}$ ... $\mathcal{G}\subset\mathcal{A}$

Άρα $\mathcal{G}\subset\sigma(\mathcal{C})$

επίσης το $\mathcal{G}$ σ-αλγ. που περιέχει την $\mathcal{C}$

$\bigcup_{i\in J} A_i$

$\bigcup_{i\in I\setminus J} A_i$



Άρα $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{G}$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C})=\mathcal{G}$

~~$\mathcal{P}$~~ X

$\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$ διαμέριση του X με I αριθμήσιμο

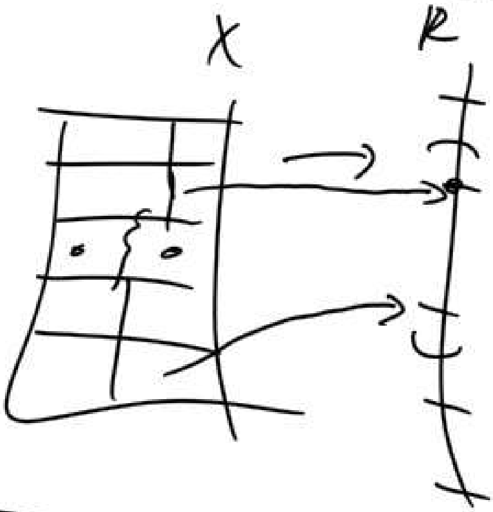
$\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C})$

Άσκηση: $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{E}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη

$\Leftrightarrow$ $f|A_i$ σταθερή $\forall i \in I$.

$\Leftarrow$ Αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ | $f = c_i$ στο A_i

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i : c_i \in A} A_i \in \sigma(\mathcal{E})$$



$\Rightarrow$

$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$

Δεσμευμένη μέση τιμή

$$E(X|Y=y) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

$\{Y=y\}$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$E(X|A)$ $\qquad$ $f(x|A)$

Το Θ. Radon-Nikodym

$(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος

μ, ν μέτρα σε αυτόν ώστε

- $\nu \ll \mu$ (δηλ. $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \Rightarrow \nu(A)$)
- μ σ-πεπερασμένο $\left\{ \begin{array}{l} X = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad I \subseteq_c \mathbb{N} \\ \mu(A_i) < \infty \quad \forall i \in I \end{array} \right.$

τότε υπάρχει $f : X \to [0, \infty]$

$\mathcal{A}$-μετρήσιμη με

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

Η f είναι μ-σχεδόν παντού μοναδική

Έχουμε $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρο πιθανότητας

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα

$E|X| < \infty$

<u>Ορισμός</u> Δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ ονομάζουμε κάθε $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

i) Η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

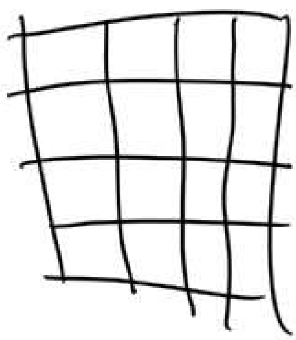
ii) $\forall A \in \mathcal{G}$ ισχύει

$$\int_A X \, dP = \int_A Y \, dP \qquad (*)$$

$E(X|\mathcal{G})$

$E(X|Y=y)$

$|A)$



Ύπαρξη δεσμ. μέσης τιμής

Κάποια Y όπως παραπάνω υπάρχει.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X: \Omega \to \mathbb{R}$, $E|X|<\infty$

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ $\quad E(X|\mathcal{G})(\omega)$

$X(\omega)=\omega$

1	2
3	4
5	6

- $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{G}$-μετρήσιμη
- $\int_A X\, dP = \int_A Y\, dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$

Υπόθ. ~~...~~ $X: \Omega \to [0,\infty]$

Η $\nu: \mathcal{G} \to [0,\infty]$ με $\nu(A) = \int_A X\, dP$ $\forall A \in \mathcal{G}$

τότε $\nu \ll P$ ← πεπερασμένο

$\overset{RN}{\Rightarrow} \exists f: \Omega \to [0,\infty)$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

ώστε $\nu(A) = \int_A f\, dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$

Αν $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ~~...~~ $\quad X^+ = X \vee 0$

$\exists\, Y_1, Y_2 : \Omega \to [0,\infty]$ $\quad X^- = (-X) \vee 0$

$\mathcal{G}$-μετρήσιμες ώστε

$\int_A X^+ dP = \int_A Y_1\, dP$, $\quad \int_A X^- dP = \int_A Y_2\, dP$

$$\int_A X^+ \, dP = \int_A Y_1 \, dP$$

Έστω $Y = Y_1 - Y_2$

τότε
$$\int |Y| \, dP \leq \int Y_1 \, dP + \int Y_2 \, dP$$
$$= \int X^+ \, dP + \int X^- \, dP = E|X| < \infty$$

Αν για $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A Y \, dP = \int_A Y_1 \, dP - \int_A Y_2 \, dP$$
$$= \int_A (X^+ - X^-) \, dP = \int_A X \, dP$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad E|X| < \infty$

- Y $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

- $$\int_A X \, dP = \int_A Y \, dP \quad \forall A \in \mathcal{G} \quad (*)$$

$\forall$ τέτοια Y έχουμε $E|Y| < \infty$

Μάλιστα $E|Y| \leq E|X|$

Αποδ.

$$E|Y| = \int_{\underbrace{\{Y > 0\}}_{\in \mathcal{G}}} Y \, dP - \int_{\{Y < 0\}} Y \, dP$$

$$= \int_{Y>0} X \, dP - \int_{Y<0} X \, dP \leq \int_{Y>0} |X| \, dP$$

$$+ \int_{Y<0} |X| \, dP \leq \int |X| \, dP$$

Μοναδικότητα

Αν $Y, Y' : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ---- . Y --- $\mathcal{G}$

τότε $P(Y=Y')=1$

$A = \{Y > Y'\} \in \mathcal{G}$ $\quad P(Y \neq Y') = 0$

$$\int_A (Y - Y')\, dP = \int_A Y\, dP - \int_A Y'\, dP$$

$$= \int_A X\, dP - \int_A X\, dP = 0$$

$$\int \underbrace{1_A \cdot (Y - Y')}_{\geq 0} dP = 0$$

$$P(\underbrace{1_A \cdot (Y - Y') > 0}_{= A}) = 0$$

$E(X \mid \mathcal{G})$

$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ • Y $\mathcal{G}$-μετρ

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $E|X| < \infty$ ⊛ • $\int_A X\,dP = \int_A Y\,dP$ $\forall A \in \mathcal{G}$

$\exists c \in \mathbb{R} :$ $Y = c$ $\forall \omega \in \Omega$

Η ⊛ για $A = \Omega \Rightarrow EX = c$

Άρα $E(X|\mathcal{G})(\omega) = EX$

– Αν η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τότε

$E(X|\mathcal{G}) = X$

– Αν X ανεξάρτητη της $\mathcal{G}$ τότε

$E(X|\mathcal{G}) = EX$

– Αν $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{E})$ με $\mathcal{E} = \{A_i : i \in I\}$ αριθμήσιμη διαμέριση του Ω από στοιχεία της $\mathcal{F}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\overline{\mathcal{G} \subset \mathcal{F}}$

Έστω $Y = E(X|\mathcal{G})$

$\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C})$, $Y=E(X|\mathcal{G})$

$\exists\, (c_i)_{i\in I}$ ώστε $Y(\omega)=c_i \quad \forall \omega\in A_i, \forall i\in I$

Η ⊛ για $A=A_i\in\mathcal{G}$ δίνει

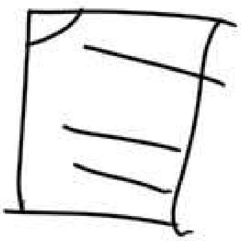
$$\int_{A_i} X\,dP = \int_{A_i} Y\,dP = c_i\,P(A_i)$$

Άρα αν $P(A_i)>0$, τότε $c_i = \frac{1}{P(A_i)}\int_{A_i} X\,dP$

Η
$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{P(A_i)}\int_{A_i} X\,dP & \omega\in A_i,\ P(A_i)>0 \\ 0 & \omega\in A_i,\ P(A_i)=0 \end{cases}$$

είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή

$$\cancel{\int_A X\,dP = \sum_{i\in I}\int_{A_i\cap A} X\,dP = \ldots = \int_A Y\,dP}$$
$\cancel{G\in\mathcal{G}}$



$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$

π.χ. $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}$ $\quad\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$

$X(\omega)=\omega$ $\quad\mathcal{G}=\sigma(\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\})$

$$E(X|\mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2/6}\left(1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}\right)=1.5 & \omega\in\{1,2\} \\ =3.5 & \omega\in\{3,4\} \\ =5.5 & \omega\in\{5,6\} \end{cases}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

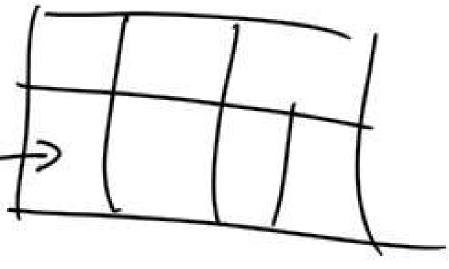
πληροφορία της $\mathcal{G}$ για ένα $\omega \in \Omega$ είναι
το σε ποια σύνολα της $\mathcal{G}$ ανήκει το ω.

$E(X|\mathcal{G})(\omega) =$ "η καλύτερη εκτίμηση για το $X(\omega)$
δεδομένης της πληροφορίας της $\mathcal{G}$
για το ω"

- $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$ $\quad E(X|\mathcal{G}) = EX$
- $\Omega = [6]$ $\quad \mathcal{G} = \sigma(\{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\})$

$\omega = 5$ $\quad 5.5$

$$\frac{1}{P(A_1)} \int_{A_i} X\,dP$$



$$c_i P(A_i) = \int_{A_i} X\,dP$$

$$\int_{\substack{A \\ \in \mathcal{G}}} X\,dP = \sum_{i \in I} \int_{A_i \cap A} X\,dP = \sum_{\substack{i \in I \\ A_i \cap A = A_i}} \int_{A_i} X\,dP$$

$$= \sum_{\substack{i \in I \\ A_i \cap A = A_i}} \int_{A_i} c_i\,dP = \sum_{i \in A} \int_{A_i \cap A} Y\,dP = \int_A Y\,dP$$

Ιδιότητες της $E(X|\mathcal{G})$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $E|X| < \infty$

Πρόταση

i) $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$

ii) Αν η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, τότε

$$E(X|\mathcal{G}) = X$$

Απόδ.

i) $\int_A E(X|\mathcal{G})\, dP = \int_A X\, dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$

Για $A = \Omega$, έχουμε $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$

$$E(\cdot \mid \mathcal{G}) : L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \to L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

είναι γραμμική απεικόνιση

$$E(aX + bY \mid \mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$$

Αν $X \geq 0$ τότε $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$

Αν $X \leq Y$ " $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$

$E|X|<\infty$ $\quad \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ $\quad E(X/\mathcal{G})=X$

τότε

i) $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1)$

ii) $E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$

Αποδ.

i) Η $E(X|\mathcal{G}_1)$ είναι $\mathcal{G}_2$-μετρήσιμη

ii) Ψάχνουμε μια Y $\mathcal{G}_1$-μετρήσιμη με

$$\int_A E(X|\mathcal{G}_2)\,dP = \int_A Y\,dP \quad \forall A\in\mathcal{G}_1 \quad *$$

Η $Y=E(X/\mathcal{G}_1)$ μας κάνει

$$\int_{A\in\mathcal{G}_1} E(X|\mathcal{G}_2)\,dP = \int_A X\,dP = \int_A E(X|\mathcal{G}_1)\,dP$$

$$E(XY|\mathcal{G}) = Y\,E(X|\mathcal{G})$$

$E|XY|<\infty$, $E|X|<\infty$

Y $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

Θέλουμε $\int_A XY\,dP = \int_A Y\,E(X|\mathcal{G})\,dP$

$\forall A\in\mathcal{G}$

$$\int_A XY\,dP = \int_A Y E(X|\mathcal{G})\,dP \qquad \forall A \in \mathcal{G}$$

- $Y = 1_B$, $B \in \mathcal{G}$

$$\int_{\underbrace{A\cap B}_{\in \mathcal{G}}} X\,dP = \int_{A\cap B} E(X|\mathcal{G})\,dP$$

- επομένως οπου Y απλή $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

- Αν $X, Y \geq 0$ Y $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

$(Y_n)_{n\geq 1}$ απλές $\mathcal{G}$-μετρήσιμες $Y_n \uparrow$

$\lim Y_n = Y$

$$\int_A XY_n\,dP = \int_A Y_n E(X|\mathcal{G})\,dP \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\int_A XY\,dP = \int_A Y E(X|\mathcal{G})\,dP$$

$$E(XY|\mathcal{G}) = Y E(X|\mathcal{G})$$

$$E(h(X,Y)|X) = E\,h(x,Y)\Big|_{x=X}$$

$\omega \in Y^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{G}$

Πρότ. 2.13 ~~?~~ $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ X $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$

$$E(h(X,Y)|\mathcal{G}) = E(h(x,\underset{Y(\omega)}{Y}))\Big|_{x=X(\omega)}$$

Άσκηση 24

$X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

α) $E(YX) = E(Y E(X|\mathcal{G}))$

$|XY| \leq \frac{|X|^2 + |Y|^2}{2}$

β) $E((X - E(X|\mathcal{G}))^2) \leq E((X-Y)^2)$

το "=" αν $Y = E(X|\mathcal{G})$

Λύση

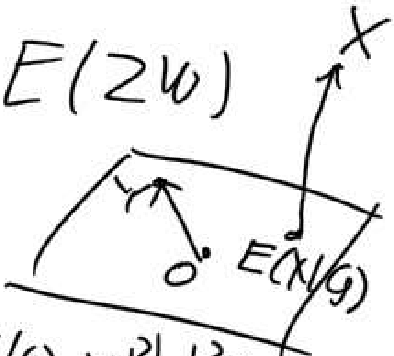
$E(E(X|\mathcal{G})) = EX$

α) $E(YX) = E(E(XY|\mathcal{G})) = E(Y E(X|\mathcal{G}))$

$E(Y \cdot (X - E(X|\mathcal{G}))) = 0$

$\cancel{\langle X, Y \rangle} = \langle Z, W \rangle = E(ZW)$

$\boxed{Y \perp X - E(X|\mathcal{G})}$



β) $E((X-Y)^2) = E((X - E(X|\mathcal{G}) + E(X|\mathcal{G}) - Y)^2)$ $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

$= E((X - E(X|\mathcal{G}))^2) + E((E(X|\mathcal{G}) - Y)^2)$

$+ 2E((X - E(X|\mathcal{G}))(E(X|\mathcal{G}) - Y))$ $\in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

$= E((X - E(X|\mathcal{G}))^2) + \underbrace{E((E(X|\mathcal{G}) - Y)^2)}_{\geq 0}$

$\geq E((X - E(X|\mathcal{G}))^2)$

Η ανισότητα Jensen

$\varphi: I \to \mathbb{R}$ κυρτή, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα

$$\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G})$$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad X(\Omega) \subset I$

$E|X| < \infty$ $\quad E|\varphi(X)| < \infty$

$\mathcal{F}$-μετρήσιμη

Για $\varphi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ $\quad E(|X|^p) < \infty$

$$|E(X|\mathcal{G})|^p \leq E(|X|^p | \mathcal{G})$$

$$\Rightarrow E(|E(X|\mathcal{G})|^p) \leq E(|X|^p)$$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

$E(X|\mathcal{G}) \in \mathcal{L}^2$ αν $X \in \mathcal{L}^2$

<u>2.12</u> $X_1, \quad , X_n$ ανεξάρτητες $E(X_i)=0$

$E(X_i^2)=1$. $\qquad X_i : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \quad , X_k)$

$1 \le k \le n$

$a_1, \quad , a_n : \Omega \to \mathbb{R}$

ώστε a_k είναι $\mathcal{F}_{k-1}$- μετρήσιμη και φραγμένη. Ν.δ. ότι

$$E\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right)^2\right\} = \sum_{k=1}^{n} E(a_k^2)$$

$\frac{\sigma(Z)}{h(Z)}$

λύση

$$\sum_{k=1}^{n} E(a_k^2 X_k^2) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} E(a_i X_i \; a_j \underline{X_j})$$

$$E(a_k^2 X_k^2) = E(a_k^2) E(X_k^2) = E(a_k^2)$$

$a_i X_i a_j$ είναι $\mathcal{F}_{j-1}$ μετρήσιμη

$$E(\underbrace{a_i X_i a_j}\underbrace{X_j}) = E(a_i X_i a_j) E(X_j) = 0$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$E(X|\mathcal{G})$ την ορίσαμε

O $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χώρος Hilbert

$\langle X, Y \rangle := E(XY)$

o $H_0 = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

($X_n \in H_0$ $X_n \xrightarrow{L^2} X \in H$ ... X $\mathcal{G}$-μετρήσιμη)

ορθ. προβολή στον H_0 είναι η γραμμική συνάρτηση $T: H \to H_0$ ώστε $\forall x \in H$, $x - Tx \perp H_0$

<u>Πρόταση</u> Η $T: H \to H_0$ με $T(X) = E(X/\mathcal{G})$ είναι η ορθογώνια προβολή στον H_0.

Απόδ.

Το ότι $T(X) \in H_0$ έπεται από Jensen

$E(E(X|\mathcal{G})^2) \le E(X^2)$

Μένει ν.δ. ότι $X - E(X|\mathcal{G}) \perp H_0$

Δηλ. $E((X - E(X|\mathcal{G}))Y) = 0$ $\forall Y \in H_0$

Το είδαμε στην ~~2.9~~ άσκηση 2.9(a)

Ανελίξεις

$(S, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χωρ. πιθ.

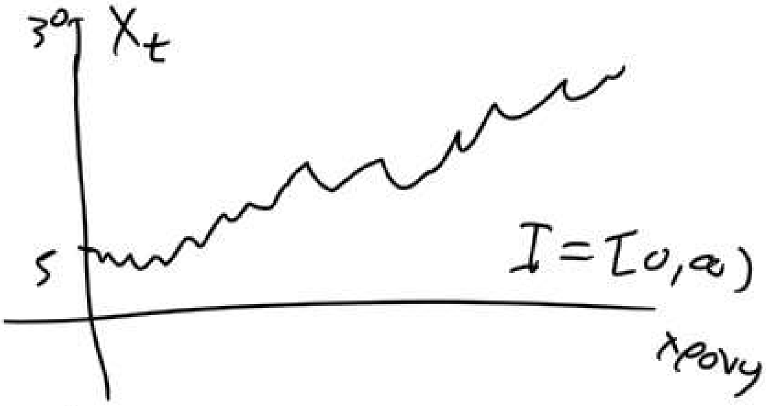
Ανέλιξη με τιμές στο S λέμε κάθε σύνολο

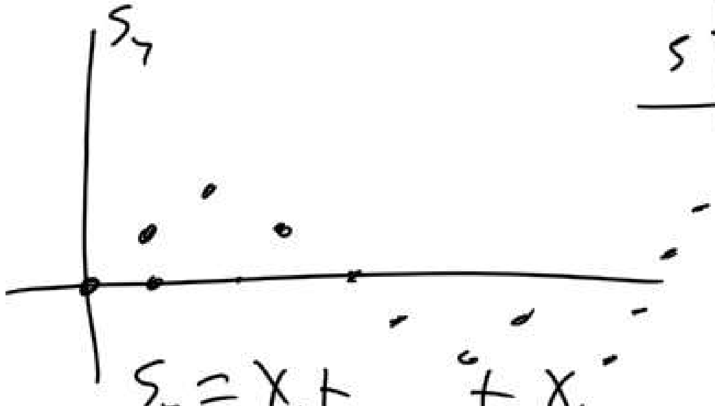
$(X_t)_{t \in I}$ από τ.μ. $X_t : \Omega \to S$

Συνήθως $I = \mathbb{N}$ ή $I = [0, \infty)$

Μονοπάτι της X λέμε κάθε συνάρτηση

$t \longmapsto X_t(\omega)$





$S_n = X_1 + \dots + X_n$

$S_0 = 0$

Άλλοι τρόποι να βλέπουμε μια στοχ. ανέλιξη

- $X : I \times \Omega \to S$

  $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$

- $\hat{X} : \Omega \to S^I \qquad \hat{X}(\omega) = (t \longmapsto X(t, \omega))$

I σύνολο, $(S, \mathcal{A})$ μετρ. χώρος

$X = (X_t)_{t \in I}$, $Y = (Y_t)_{t \in I}$ ανελίξεις στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

<u>Ορισμός</u> i) Η X λέγεται <u>τροποποίηση</u> της Y αν $\forall t \in I$ ισχύει $P(X_t = Y_t) = 1$

ii) Οι X, Y λέγονται <u>μη διακρίσιμες</u> αν

$$P(X_t = Y_t \ \forall t \in I) = 1$$

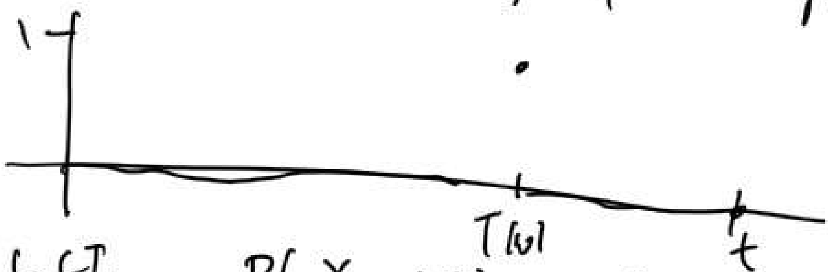
$$\bigcap_{t \in I} \{X_t = Y_t\} \hookrightarrow P(\hat{X} = \hat{Y}) = 1$$

<u>Παράδειγμα</u> $I = [0, \infty)$, $S = \mathbb{R}$

$X_t = 0 \quad \forall t \in I, \forall \omega \in \Omega$

T τ.μ. στον Ω με $T \sim \exp(1)$

ορίζουμε $Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \neq T(\omega) \\ 1 & \text{για } t = T(\omega) \end{cases}$



$\forall t \in I \quad P(X_t = Y_t) = P(\{\omega : T(\omega) \neq t\}) = 1$

$P(X_t = Y_t \ \forall t \in I) = 0$

<u>Πρόταση</u> $X, Y : I \times \Omega \to S$ \ μετρ. χώρος

Υποθ. ότι $I \subset \mathbb{R}$

- οι X, Y έχουν συνεχή μονοπάτια με π.Θ. 1
  $(t \mapsto X_t(\omega))$ συνεχής $\forall \omega$
  $(t \mapsto Y_t(\omega))$.
- η X είναι τροποποίηση της Y

Τότε οι X, Y είναι μη-διακρίσιμες.

Απόδ.

$\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ με $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = 1$

Το $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \left(\bigcap_{t \in D} \{ X_t = Y_t \} \right)$

έχει πιθανότητα 1 (D πυκνό, αριθ. υποσ. του I)

και ~~σε αυτό έχουμε~~ για ω να ανήκει σε αυτό έχουμε $X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall t \in I$

Άρα το $\{ \omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega) \ \forall t \in I \}$ έχει εσωτερικό μέτρο 1.

$X=(X_t)_{t\in I}$ στοχ. ανέλιξη με τιμές στο $(S,\mathcal{A})$

κατανομές πεπερασμένης διάστασης της X λέμε τις κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \quad \text{όπου } n\in\mathbb{N}^+$$

και $t_1, \dots, t_n \in I$ διαφορετικά

τιμές στο S^n

Γκαουσιανές τ.μ.

Στο $\mathbb{R}$ είναι οι $N(\mu,\sigma^2)$

Στο $\mathbb{R}^d$

Έστω $X=(X_1, \dots, X_d)^t$ τ.μ. στο $\mathbb{R}^d$

- η X λέγεται d-διάστατη τυπική κανονική τ.μ. αν $X_1, \dots, X_d$ ανεξάρτητες και $X_i \sim N(0,1)$ $\forall i$
- η X λέγεται Γκαουσιανή τ.μ. αν

$$X = AY + b$$

με $b\in\mathbb{R}^d$, Y m-διάστατη τυπική κανονική

$A\in\mathbb{R}^{d\times m}$

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Y_j + b_i \quad \forall i=1, \dots, d$$

Στο $\mathbb{R}$ αν X, Y κανονικές με

$EX = EY$, $Var(X) = Var(Y)$ τότε $X \overset{d}{=} Y$

μ, σ^2

$X: \Omega \to \mathbb{R}^d$

χαρακτηριστική συνάρτηση της X λέμε την

$\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ $\quad \varphi_X(u) = E\left(e^{i\langle u, X\rangle}\right)$

$\langle u, X\rangle = \sum_{r=1}^{d} u_r X_r$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E\left(e^{itX}\right) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

<u>Πρόταση</u> Μια $X: \Omega \to \mathbb{R}^d$ είναι Γκαουσιανή

$\Leftrightarrow \varphi_X(u) = e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu\rangle}$ $\forall u \in \mathbb{R}^d$

για κάποιο $b \in \mathbb{R}^d$ και $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ συμμετρικό θετικά ημιορισμένο πίνακα $(\langle u, Cu\rangle \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^d)$

Απόδ

"$\Rightarrow$" έστω $X = AY + b$ $\quad A \in \mathbb{R}^{d\times m}$, $b \in \mathbb{R}^d$

$$\langle u, X\rangle = \sum_{r=1}^{d} u_r X_r = \sum_{r=1}^{d} u_r\left(\sum_{j=1}^{m} a_{rj} Y_j + b_r\right)$$

$$= \langle u, b\rangle + \sum_{j=1}^{m} Y_j\left(\sum_{r=1}^{d} u_r a_{rj}\right)$$

$$E\left(e^{i\langle u, X\rangle}\right) = e^{i\langle u, b\rangle} \prod_{j=1}^{m} E\left(e^{iY_j \sum_{r=1}^{d} u_r a_{rj}}\right)$$

$\mathbb{R}^d \ni X = AY + b \qquad Y = (Y_1, \ldots, Y_M)$

i.i.d $N(0,1)$

$\varphi_X(u) = E(e^{i\langle u, X\rangle}) = e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu\rangle}$

$C_{i,j} = cov(X_i, X_j)$

Αν $(X_1, \ldots, X_d)$ Γκαουσιανό

$X_1, \ldots, X_d$ ασυσχέτιστες $\Rightarrow$ $X_1, \ldots, X_d$ ανεξάρτητες

$cov(X_i, X_j) = 0 \ \forall i, j$

Αυτό γιατί τότε

$$\varphi_X(u) = e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} c_{jj} u_j^2} = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{Z_j}(u_j)$$

αυτή είναι χαρ. συνάρτηση και του

$(Z_1, \ldots, Z_d)$ με $Z_j = b_j + \sqrt{c_{jj}}\, W_j$

με $W_1, \ldots, W_d$ i.i.d $N(0,1)$

$X \sim N(0,1)$, $I \perp\!\!\!\perp X$ $\quad I = \begin{cases} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases}$

X, IX

(X, IX) όχι γκαουσιανό

$X=(X_t)_{t\in I}$ ανέλιξη σε ένα χώρο $(\Omega,\mathcal{F},P)$

και τιμές στο $\mathbb{R}$ $\quad X_t:\Omega\to\mathbb{R}$

Η X λέγεται Γκαουσιανή αν

$\forall\, t_1,\dots,t_n\in I$ το $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ είναι Γκαουσιανό διάνυσμα

ισοδύναμα

$\forall\, n\in\mathbb{N}^+$, $\forall\, t_1,\dots,t_n\in I$ και $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$
η $a_1X_1+\dots+a_nX_n$ είναι Γκαουσιανή τ.μ.

Η X λέγεται κεντραρισμένη αν $EX_t=0$ $\forall t\in I$

Συνάρτηση συνδιακύμανσης της X λέμε την

$C: I\times I\to[0,\infty)$ με

$C(t,s):=Cov(X_t,X_s)$

$a(t)=E(X_t)$

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.
$(e_n)_{n\geq 1}$ ορθοκανονική βάση του.
Τότε υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
και απεικόνιση $G: H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$
ώστε $(G(h))_{h\in H}$ Γκαουσιανή κεντραρισμένη αιτιάζη
- G γραμμική
- $E((G(h))^2) = \|h\|_H^2 \quad \forall h \in H$

Απόδ

$\exists (\Omega, \mathcal{F}, P)$ και ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$

$X_n : \Omega \to \mathbb{R} \ \forall n$ i.i.d $N(0,1)$

Θέτουμε $G: H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$G(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle X_n$$

$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+}$
$\mathcal{F}$ το $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
$\bigotimes_{n=1}^{\infty} \gamma$
$X_n(\omega) = \omega_n$

- Η G καλά ορισμένη

$m<n$

$$E((S_n - S_m)^2) = \sum_{j=m+1}^{n} (\langle h, e_j \rangle)^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

- $G(h)$ κανονική $\forall h$

$Y_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ $\quad \mu_n \to \mu$, $\sigma_n \to \sigma$ $\quad$ τότε $Y_n \Rightarrow N(\mu, \sigma^2)$

$S_n \sim N(0, \sum_{j=1}^{n} \langle h, e_j \rangle^2)$, $\quad S_n \xrightarrow{L^2} G(h)$

$S_n \Rightarrow N(0, \|h\|^2)$

• $(G(h))_{h\in H}$ Γκαουσιανή.

Έστω $h_1, \ldots, h_n \in H$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$a_1 G(h_1) + \ldots + a_n G(h_n) =$

$G(a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n) \sim N(0, \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \|h_j\|^2)$

Ειδική περίπτωση.

$H = L^2([0,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$ διαχωρίσιμος

$\exists\, G : H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad L^2(\Omega, \mathcal{F}, \ldots)$

ώστε $(G(h))_{h\in H}$ Γκαουσιανή

G γραμμική ισομετρία

$$E(G(f)\, G(g)) = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx$$

Θεωρούμε την ανέλιξη $(B_t)_{t\geq 0}$

με $B_t = G(1_{[0,t]})$ $\forall t \geq 0$

Η $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι Γκαουσιανή ... $(G(h))_{h\in H}$

με αύξοντα διαστήματα στο $[0,\infty)$

$$C(s,t) = E(B_s B_t) = E(G(1_{[0,s]})\, G(1_{[0,t]}))$$
$$= \int_0^\infty 1_{[0,s]}(r)\, 1_{[0,t]}(r)\, dr = s \wedge t$$

- Αν $0 = t_0 < t_1 < \quad < t_n$, τότε

$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \quad , B(t_n) - B(t_{n-1})$

ανεξάρτητες)

Απόδ.

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = G(1_{[0, t_{i+1}]}) - G(1)$$
$$= G(1_{(t_i, t_{i+1}]})$$

$$\left(G(1_{[0,t_1]}), G(1_{(t_1,t_2]}), \quad , G(1_{(t_{n-1},t_n]})\right)$$

είναι Γκαουσιανό διάνυσμα

$$cov\left(G(1_I)\ G(1_J)\right) = E\left(G(1_I) G(1_J)\right)$$
$$= \int_0^\infty 1_I(r)\ 1_J(r)\, dr = 0 \quad \text{αν } I \cap J = \emptyset$$

- Για $0 \le s < t$

$$B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$$

Απόδ.

$$B(t) - B(s) = G(1_{(s,t]})$$
$$E\left(G(1_{(s,t]})^2\right) = \|1_{(s,t]}\|^2 = \int_0^\infty 1_{(s,t]}^2\, dr$$
$$= t-s$$

Θέλουμε ένα $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0)=1$ ώστε
$\forall \omega \in \Omega_0$ η $(t \mapsto B_t(\omega))$ συνεχής
$[0,\infty)$

Από την πιο πάνω B παίρνει στην Κ.Β μέσω Kolmogorov–Centsov.

Θεώρημα (Kolmogorov–Centsov)
$X=(X_t)_{t\in[0,1]}$ ανέλιξη με τιμές σε ένα πλήρη μετρ. χώρο (E,d). Υποθέτουμε ότι $\exists\ q,\varepsilon,C>0$ ώστε
$$E(\ d(X_s,X_t)^q\ ) \leq C\,|t-s|^{1+\varepsilon}$$
$\forall s,t \in [0,1]$.
Τότε υπάρχει τροποποίηση $\tilde{X}$ της X που είναι α-Hölder για οποιοδήποτε $\alpha\in(0,\frac{\varepsilon}{q})$

Απόδειξη

Έστω $\alpha \in (0,\frac{\varepsilon}{q})$. Για $s,t \in I$
$$P(\ d(X_s,X_t) \geq \lambda) = P(\ d^q \geq \lambda^q) \leq \frac{C}{\lambda^q}|t-s|^{1+\varepsilon}$$
Για $s=\frac{i-1}{2^n}$, $t=\frac{i}{2^n}$, $\lambda=\frac{1}{2^{\alpha n}}$

$$P\left(d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right) \geq \frac{1}{2^{\alpha n}} \right) \leq C \, \frac{2^{\alpha q n}}{2^{n(1+\varepsilon)}} \, \frac{1}{\cancel{2^{\alpha q n}}}$$

$i = 1, \ldots, 2^n$

$$= \frac{C}{2^n} \, \frac{1}{2^{n(\varepsilon - \alpha q)}}$$

$$P\Bigg(\overbrace{\exists\, i = 1 \ldots 2^n : d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right) \geq \frac{1}{2^{\alpha n}}}^{A_n} \Bigg) \qquad \alpha < \frac{\varepsilon}{q}$$

$$\leq \frac{C}{2^{n(\varepsilon - \alpha q)}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. Άρα $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$

Το $\Omega_0 = \Omega \setminus \limsup_{n \geq 1} A_n$ έχει $P(\Omega_0) = 1$

και $\forall \omega \in \Omega_0 \ \exists\, n_0(\omega)$:

$\forall n \geq n_0(\omega)$ και $i = 1 \ldots 2^n$ ισχύει

$$d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right) < \frac{1}{2^{n\alpha}}$$

Επομένως $\forall \omega \in \Omega_0$

$$K_\alpha(\omega) = \sup_{n \geq 1} \sup_{1 \leq i \leq 2^n} \frac{d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right)}{2^{-n\alpha}} < \infty$$

Λήμμα $D=\left\{ \frac{i}{2^n} : n\in\mathbb{N}^+,\ i=0,1,\dots,2^n \right\}$

έστω $f: D\to (E,d)$ μετρ. χώρος

$$d\left(f\left(\tfrac{i}{2^n}\right), f\left(\tfrac{i-1}{2^n}\right)\right) \le \frac{K}{2^{\alpha n}}$$

$\forall n\ \forall i=1,\dots,2^n$ (K σταθερά)

τότε $\forall s,t\in D$

$$d(f(s),f(t)) \le \frac{2K}{1-2^{-\alpha}}\,|t-s|^{\alpha}$$

Ας το δεχτούμε

θα έχουμε $d(X_s,X_t) \le \dfrac{2K_\alpha(\omega)}{1-2^{-\alpha}}\,|s-t|^{\alpha}$

$\forall s,t\in D \quad \forall \omega\in\Omega_0$

Άρα η $(s\mapsto X_s(\omega))$ είναι α-Hölder στο D.

άρα ομοιόμορφα συνεχής στο D.

έχει μοναδική συνεχή επέκταση

$$\tilde{X}_t(\omega)=\lim_{\substack{s\to t\\ s\in D}} X_s(\omega) \qquad t\in[0,1]$$

$(X_{s_n})_{n\ge 1}$, $s_n\to t$

επιλέγουμε τυχόν $x_0\in E$ και ορίζουμε

$\tilde{X}_t(\omega)=x_0 \quad \forall\omega\in\Omega\setminus\Omega_0,\ \forall t\in[0,1]$

Για $\alpha \in (0, \frac{\varepsilon}{q})$ $\exists\ \Omega_0^{\alpha} \subset \Omega$ και $\tilde{X}$ με $P(\Omega_0^{\alpha}) = 1$

ώστε $\forall \omega \in \Omega_0^{\alpha}$ $\exists$ $C(\omega) < \infty$ ώστε

$$d(\tilde{X}_s(\omega), \tilde{X}_t(\omega)) \leq C(\omega)\,|t-s|^{\alpha}$$

$\alpha_n \uparrow \frac{\varepsilon}{q}$

$$\Omega_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_0^{\alpha_n}$$

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in D}} X_s(\omega) \qquad \forall t \in [0,1] \quad \forall \omega \in \Omega_0$$

$$= x_0 \qquad \omega \in \Omega \setminus \Omega_0$$

Η $\tilde{X}$ είναι τροποποίηση της $(X_t)_{t \in [0,1]}$

$$P(X_t \neq \tilde{X}_t) = 0 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Αν $t \in D$ ο.κ.

Αν $t \in [0,1] \setminus D$ τότε παίρνουμε

$t_n \in D$ με $t_n \to t$

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega_0$$

επίσης $X_{t_n} \to X_t$ κατά πιθανότητα

γιατί $P(d(X_{t_n}, X_t) \geq \delta) \leq \frac{K}{\delta^q} |t - t_n|^{1+\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\ldots$ $\tilde{X}_t = X_t$

Λήμμα

$D = \left\{ \frac{i}{2^n} : n \in \mathbb{N}^*,\ i = 0, \dots, 2^n \right\}$

$f : D \to (E, d)$ ← μετρικός χώρος

$$d\left(f\left(\frac{i}{2^n}\right), f\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right) \le \frac{K}{2^{\alpha n}}$$

$K\left|\frac{i}{2^n} - \frac{i-1}{2^n}\right|^\alpha$ κάποιο $\alpha > 0$

$\forall n\ \forall i = 1, \dots, 2^n$

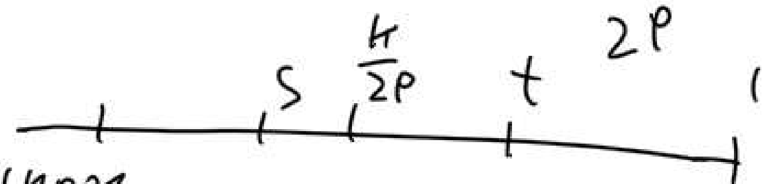
τότε $\forall s, t \in D$ έχουμε

$$d(f(s), f(t)) \le \frac{2K}{1 - 2^{-\alpha}} |t-s|^\alpha$$

Απόδειξη

Έστω $s, t \in D$ $\quad 0 \le s < t \le 1$

και p ο ελάχιστος ώστε $\frac{1}{2^p} < t - s \le \frac{1}{2^{p-1}}$



Έστω k ο μικρότερος ακέραιος ώστε $\frac{k}{2^p} > s$

$$s = \frac{k}{2^p} - \frac{\varepsilon_1}{2^{p+1}} - \dots - \frac{\varepsilon_\ell}{2^{p+\ell}} \qquad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{0, 1\}$$

$$t = \frac{k}{2^p} + \frac{\varepsilon'_0}{2^p} + \dots + \frac{\varepsilon'_m}{2^{p+m}}$$

$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2^{p-1}}$

$$s_i = \frac{k}{2^p} - \frac{\varepsilon_1}{2^{p+1}} - \dots - \frac{\varepsilon_i}{2^{p+i}} \qquad i = 0, \dots, \ell$$

$$t_j = \frac{k}{2^p} + \frac{\varepsilon'_0}{2^p} + \dots + \frac{\varepsilon'_j}{2^{p+j}} \qquad j = 0, \dots, m$$

$s_0 = \frac{k}{2^p}, \quad s_\ell = s$

$t_0 = \frac{k + \varepsilon'_0}{2^p} \quad t_m = t$

$$d(f(s), f(t)) = d(f(s_\ell), f(t_m))$$

$$\le \sum_{i=1}^{\ell} d(f(s_i), f(s_{i-1})) + d(f(\overset{\frac{k}{2^p}}{s_0}), f(\overset{\frac{k+\varepsilon_0'}{2^p}}{t_0}))$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} d(f(t_j), f(t_{j-1}))$$

$$\le \sum_{i=1}^{\ell} K \frac{1}{2^{\alpha(p+i)}}$$

$$+ K \frac{1}{2^{\alpha p}} + \sum_{i=1}^{m} K \frac{1}{2^{\alpha(p+i)}}$$

$$\le K \frac{\frac{1}{2^{\alpha(p+1)}}}{1-2^{-\alpha}} + \frac{K}{2^{\alpha p}} + K \frac{\frac{1}{2^{\alpha(p+1)}}}{1-2^{-\alpha}}$$

$$= \frac{K}{2^{\alpha p}} + \frac{2K}{1-2^{-\alpha}} \frac{1}{2^{\alpha(p+1)}} =$$

$$= \left(\frac{2K}{2^\alpha-1} + K\right) \frac{1}{2^{\alpha p}} \le \left(\frac{2K}{2^\alpha-1} + K\right) \cdot (t-s)^\alpha$$

$$s_i = \frac{k}{2^p} - \frac{\varepsilon_1}{2^{p+1}} - \cdots - \frac{\varepsilon_i}{2^{p+i}}$$

$$= \cancel{\frac{2}{2^{p+i}}} \quad \frac{\varepsilon_i}{2^{p+i}}$$

$$s_{i-1} = \frac{\mu}{2^{p+i-1}} = \frac{2\mu}{2^{p+i}}$$

$$s_i = \frac{2\mu+\varepsilon_i}{2^{p+i}}$$

$$\frac{1}{2^p} < t-s$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad (X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d $N(0,1)$

$B_t = G(1_{[0,t]})$, $\quad t \geq 0$

$G: L^2[0,\infty) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle X_n$$

$$\left(\begin{array}{l} G: H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \\ (e_\alpha)_{\alpha \in I} \qquad G(f) = \sum_{\alpha \in I} \langle f, e_\alpha \rangle X_\alpha \end{array} \right)$$

Εφαρμόζουμε το Kolmogorov-Centsov

στην $(B_t)_{t \in [0,A]}$ $\quad \Big| \; E|X_t - X_s|^q \leq C|t-s|^{1+\varepsilon}$

Για $0 \leq s < t \leq A$ $\quad < \frac{\varepsilon}{q}$

$$X_t - X_s \sim N(0, t-s)$$

$\forall q > 0 \quad E|X_t - X_s|^q = E|\sqrt{t-s}\, Z|^q =$

$= (t-s)^{\frac{q}{2}} E(|Z|^q)$

$$\frac{\frac{q}{2} - 1}{q} = \frac{q-2}{2q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$$

$\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2})$

$\forall N$ έχουμε τροποποίηση $(B_t^{(N)})_{t \geq 0}$

η οποία με πιθ 1 (Ω_N) είναι Hölder α $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2})$

στο $[0, N]$

ορίζουμε $\hat{B}_t(\omega) = \begin{cases} B_t^{(N)}(\omega) & \forall \omega \in \bigcap \Omega_N \\ & t \leq N \end{cases}$

ο ορισμός είναι καλός.

έστω $M, N \geq t$ $\quad \omega \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \Omega_N$

οι $B^{(N)}, B^{(M)}$ είναι τροποποίηση η μία της άλλης και έχουν συνεχή μονοπάτια.

Άρα είναι μη διακρίσιμες

$\exists\ \Omega^{M,N}$ με πιθ. 1 ώστε $\forall \omega \in \Omega^{M,N}$

να ισχύει $B_t^{(N)}(\omega) = B_t^{(M)}(\omega) \quad \forall t \geq 0$

έστω $\tilde{\Omega} = \bigcap_{M,N \in \mathbb{N}} \Omega^{M,N}$ στο $\tilde{\Omega} \cap \bigcap_{N=1}^{\infty} \Omega_N$

η $\hat{B}$ είναι καλά ορισμένη

και είναι τροποποίηση της B

είναι Hölder α ~~∀α∈[0~~ στο $[0, A]$

$\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2})$

Ορισμός Μια ανέλιξη $(B_t)_{t\ge 0}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται τυπική κίνηση Brown αν

i) ~~$B_t=0$~~ $B_0 = 0$

ii) $\forall\ 0 \le t_1 < \dots < t_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$, $B(t_1) - B(0)$

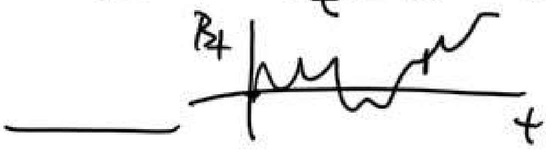
$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$

ανεξάρτητες

iii) $\forall\ 0 \le s < t$

$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

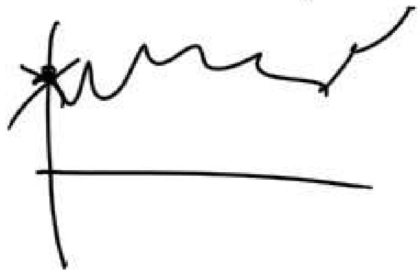
iv) με πιθ. 1 η $(t \longmapsto B_t(\omega))$ είναι συνεχής



Παρατήρηση Αν παραλείψουμε το i) λέμε την B κίνηση Brown.

τότε η $X_t = B_t - B_0$ είναι τ.κ.Β.

$B_t = B_0 + X_t$



ii) $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$

$B_{t_1} - B_0, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$

$B_0, B_{t_1} - B_0, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \Leftarrow \sigma((X_t)_{t\ge 0})$

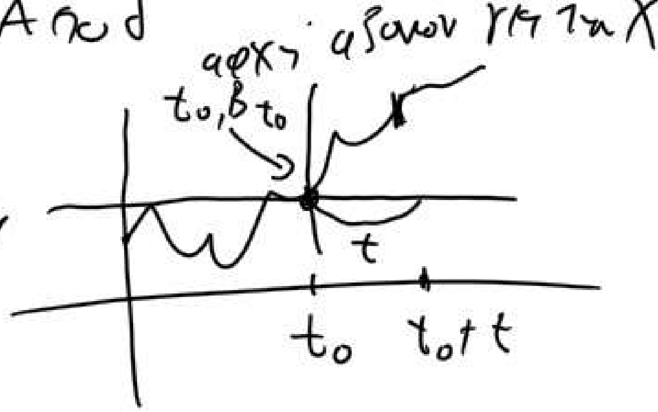
iii) $X_t - X_s = B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

Πρόταση $(B_t)_{t\geq 0}$, $t_0 \geq 0$ κίνηση Brown.

Ορίζουμε $X_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}$ $\forall t \geq 0$

Η X είναι τ.Κ.Β.

Απόδ



$X_0 = 0$

X έχει συνεχή μονοπάτια

$X_t - X_s = B_{t_0+t} - B_{t_0+s}$

$s<t$

$\sim N(0, t_0+t - (t_0+s))$

$= N(0, t-s)$

B κίνηση Brown

$t_0 \geq 0$ $\quad X(t) = B_{t+t_0} - B_{t_0}$, $t \geq 0$

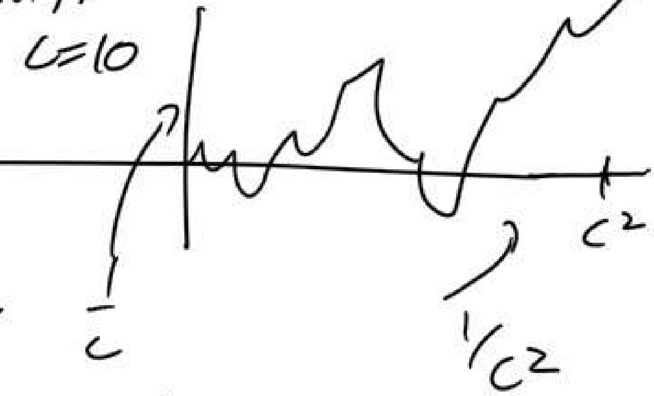
είναι τ.κ.Β

<u>Πρόταση</u> $(B_t)_{t\geq 0}$ τ.κ.Β. $\quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Θέτουμε $\quad X_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t} \quad \forall t \geq 0$

Τότε $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι τ.κ.Β

Απόδειξη



• $X_0 = 0$

• έστω $0 \leq t_1 < \dots < t_n$

οι προσ. της X είναι

$X_{t_1}, \; X_{t_2} - X_{t_1}, \; \dots, \; X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ δηλ.

$\frac{1}{c} B_{c^2 t_1}, \; \frac{1}{c} B_{c^2 t_2} - \frac{1}{2} B_{c^2 t_1}, \; \dots, \; \frac{1}{c} B_{c^2 t_n} - \frac{1}{c} B_{c^2 t_{n-1}}$

ανεξάρτητες

$\dots \; c^2 t_1, \; \dots, \; c^2 t_n$

• Για $0 \leq s < t$ έχουμε $X_t - X_s = \frac{1}{c}\left(B_{c^2 t} - B_{c^2 s}\right)$

$\sim \frac{1}{c} N(0, c^2(t-s)) = \frac{1}{c^2} c^2 (t-s) = t-s$

$$X_t = a B_{\gamma t} \qquad a^2\gamma t = t \qquad a^2\gamma = 1$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} B_{\gamma t}$$

με πιθανότητα 1

• Η $X_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ έχει συνεχή μονοπάτια

γιατί και η B - - -

$X_0 = 0$

$$X_t = t B_{\frac{1}{t}} \qquad t^2 \frac{1}{t} = t$$

$0<s<t \qquad 0<\frac{1}{t}<\frac{1}{s}$

$$X_t - X_s = t B_{\frac{1}{t}} - s B_{\frac{1}{s}}$$
$$= t B_{\frac{1}{t}} - s\left(B_{\frac{1}{t}} + B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}\right)$$
$$= (t-s) B_{\frac{1}{t}} - s\left(B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}\right)$$
$$\sim N(0, \sigma^2)$$
$$\sigma^2 = (t-s)^2 \frac{1}{t} + s^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) =$$
$$= \frac{\cancel{s}(t-s)^2 + s^{\cancel{2}}(t-s)}{t\cancel{s}} = \frac{(t-s)}{t}(t-s+s) = t-s$$

$0<t_1<t_2<\dots$

$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$

Η κίνηση Brown ορίζει ένα μέτρο στον $C[0,\infty)$

$$\omega \longmapsto (t \longmapsto B_t(\omega))$$

$$T: \Omega \to C[0,\infty)$$

$$\mu(A) = P(T^{-1}(A)) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(C[0,\infty))$$

↑ η κατανομή της B

$$X = AY + b$$

B Τ.Κ.Β. ———

Για κάθε $0 < t_1 < \dots < t_n$, $t_0 = 0$

το διάνυσμα $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$ είναι Γκαουσιανό

Έστω $Y_i = \dfrac{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}}{\sigma_i \to \sqrt{t_i - t_{i-1}}}$, $i = 1, \dots, n$

οι $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. $N(0,1)$

$$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \sigma_i Y_i$$

$$B_{t_i} = \sigma_1 Y_1 + \dots + \sigma_i Y_i$$

$$\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_1 & & & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

Άρα η $(B_t)_{t \geq 0}$ Γκαουσιανή ανέλιξη

Αν $B_0 = x \in \mathbb{R}$ $\qquad B_t - B_0$

$$\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix} = AY + \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$$

$B_s, B_t - B_s$

B Τ.Κ.Β

$$\begin{cases} m(t) = E B_t = 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ και για } 0 \leq s \leq t \\ C(s,t) = Cov(B_s, B_t) = Cov(B_s, B_s + B_t - B_s) \end{cases}$$

$$= cov(B_s, B_s) + cov(B_s, B_t - B_s)$$

$$= Var(B_s) + 0 = s$$

$$cov(B_s, B_t) = s \wedge t$$

οι $m(\cdot)$, $C(\cdot,\cdot)$ καθορίζουν τις κατανομές πεπερασμένης διάστασης της $(B_t)_{t \geq 0}$

Θεώρημα $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t \geq 0}$ με ~~...~~ ~~...~~ συνεχή μονοπάτια (δηλ. $(t \mapsto X_t(\omega))$, $(t \mapsto Y_t(\omega))$ συνεχείς $\forall \omega \in \Omega$).

Αν έχουν τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης τότε έχουν την ίδια κατανομή στον $C[0,\infty)$.

~~...~~ $\{f \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : f(t) \in A\} \cap C[0,\infty)$, $\{f \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : f(t_1) \in A_1, \ldots, f(t_n) \in A_n\} \cap C[0,\infty)$

$C[0,\infty)$ μ μέτρο σε αυτόν

$g \in C[0,\infty)$

$\mu(\{f \in C[0,\infty) : \|f-g\|_{[0,30]} < 10\})$

$\mu(\{f \in C[0,\infty) : f(t_1) \in A_1 , \ldots , f(t_n) \in A_n\})$

<u>Πρόταση</u> $B, \tilde{B}$ τυπικές κινήσεις Brown.
Τότε οι $B, \tilde{B}$ έχουν την ίδια κατανομή στο $C[0,\infty)$.

Απόδειξη

$\hat{B} : \Omega \to C[0,\infty) \qquad B(\omega) = (t \longmapsto B_t(\omega))$

$\hat{\tilde{B}} : \tilde{\Omega} \to C[0,\infty)$

οι $B, \tilde{B}$ έχουν συνεχείς μονοπάτια και για

$0 \leq t_1 < \ldots < t_n$

$(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \stackrel{d}{=} (\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_n})$

γιατί είναι δύο Gaussian διανύσματα με ίδιες αναμενόμενες $E(B_t)$, $Cov(B_s, B_t)$

<u>Πρόταση</u> B τ.κ.Β. Θέτουμε $X_t = \begin{cases} t B_{\frac{1}{t}} , & t>0 \\ 0 , & t=0 \end{cases}$

Τότε η X είναι τ.κ.Β.

Απόδειξη

• Η X είναι Γκαουσιανή ανέλιξη

Δηλ. $\forall\ 0 < t_1 < \quad < t_n$ το διάνυσμα

$(X_{t_1}, X_{t_2}, \quad , X_{t_n})$ είναι Γκαουσιανό

$A \gamma + X$

$(t_1 B_{\frac{1}{t_1}} \quad , t_n B_{\frac{1}{t_n}})$

$0 < \frac{1}{t_n} < \frac{1}{t_{n-1}} < \quad < \frac{1}{t_1}$

• X, B έχουν τις ίδιες συναρτήσεις $\mu(\cdot), c(\cdot,\cdot)$

$\mu_X(t) = E(X_t) = t E(B_{\frac{1}{t}}) = 0 = E(B_t) = \mu_B(t)$

Για $s \le t$

$C_X(s, t) = cov(X_s, X_t) = cov(s B_{\frac{1}{s}}, t B_{\frac{1}{t}})$

$= st\, cov(B_{\frac{1}{s}}, B_{\frac{1}{t}}) = st\left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}\right) = \frac{st}{t} = s$

$\forall s, t$

$C_X(s, t) = s \wedge t = C_B(s, t)$

Άρα οι X, B έχουν τις ίδιες μηχανικές πεπερ. διάστασης.

• οι X, B έχουν συνεχή μονοπάτια

$X_t = \begin{cases} t B_{\frac{1}{t}} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

Μένει το $P(\lim_{t \to 0^+} t B_{\frac{1}{t}} = 0)$

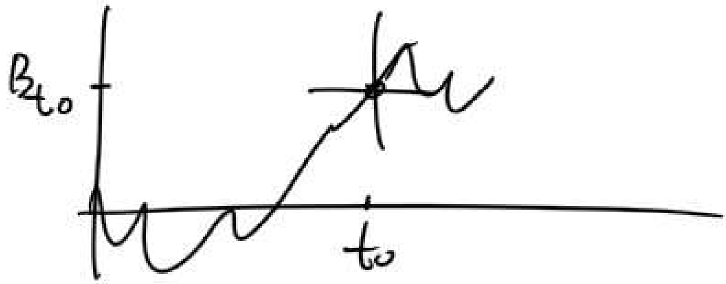
$\frac{B_n}{n} \to 0 \qquad \frac{B_t}{t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$

B κίνηση Brown στο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$ $\forall t \geq 0$

$t_0 \geq 0$ $\quad X_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}$ $\quad \forall t \geq 0$

Η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_0}^0$



$\sigma((X_t)_{t \geq 0}) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_0}$

π-σύστημα που παράγει την $\mathcal{F}_{t_0}$

$\cancel{\sigma(\{(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) : 0 \leq t_1 < \dots < \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\})}$

$\mathcal{G}_1 = \{ \{(B_{t_1}, \quad , B_{t_n}) \in A\} : n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq t_1 < \quad < t_n \leq t_0 \}$

↳ $A_1 \times \quad \times A_n$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\{B_t \in A\}$, $t \in [0, t_0]$

$\mathcal{G}_2 = \{ \{ (X_{s_1}, \quad , X_{s_k}) \in B_1 \times \quad \times B_k : \quad \} \}$

$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ $\quad \mathcal{G}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{G}_2)$

↳ π-συστήματα

αρκεί $(B_{t_1}, \quad , B_{t_n}) \perp\!\!\!\perp (X_{s_1}, \quad , X_{s_k}) \Big|$ t_0, t_0+s_1, t_0+s_2

$h(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \quad , B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ $\quad (B_{t_0+s_1} - B_{t_0}, \quad , B_{t_0+s_k} - B_{t_0})$

$$h(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1} \quad , B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$$

$$(B_{t_0+s_1}-B_{t_0}, \quad , B_{t_0+s_k}-B_{t_0})$$

$$= g(B_{t_0+s_1}-B_{t_0}, B_{t_0+s_2}-B_{t_0+s_1}, \quad , B_{t_0+s_k}-B_{t_0+s_{k-1}})$$

$$\sigma(\mathcal{G}_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{G}_2)$$

Άσκηση 5.3 $n \in \mathbb{N}^+$ $\quad 0 \leq t_0 < t_1 < \quad < t_n$

B τ.κ.Β τότε $X = a_1 B_{t_1} + \quad + a_n B_{t_n} \sim N(0, \sigma^2)$

$\sigma^2 =$; λύση

$Y_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ $\quad i = 1, 2, \quad , n$ ανεξάρτητες

$B_{t_i} = Y_1 + \quad + Y_i$

$$X = a_1 Y_1 + a_2 (Y_1 + Y_2) + \quad + a_n (Y_1 + \quad + Y_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Y_j \left(\sum_{r=j}^{n} a_r\right) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

B τ.κ.Β

$\underbrace{B_t}_{B_t} - B_0 \sim N(0,t)$

$x + W_t = B_t$

$\mu = EX = 0$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} a_r\right)^2 (t_j - t_{j-1})$$

Άσκηση 5.6 Πόση η μέση τιμή και διασπορά της $Y = \int_0^t B^2(s)\,ds$

λύση

$$EY = \int_0^t E(B^2(s))\,ds = \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2}$$

$$E(Y^2) = E\left(\int_0^t \int_0^t B^2(s) B^2(r)\,dr\,ds\right) = \int_0^t \int_0^t E(B_s^2 B_r^2)\,ds\,dr$$

$E(B_s^2 B_r^2)$ Αν $0 \le s < r$

$$= E(B_s^2 (B_s + \underbrace{B_r - B_s})^2) = E(B_s^4) +$$

$$E(B_s^2)\, E((B_r - B_s)^2) + 2\, E(B_s^3 (B_r - B_s))$$

$$= s^2 E(Z^4) + s(r-s) + 0 \qquad \Big|\ \frac{B_s}{\sqrt{s}} = Z \sim N(0,1)$$

$$= 3s^2 + sr - s^2 = 2s^2 + sr$$

<u>Κύμανση και τετραγωνική κύμανση για την B</u>

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$.

Θέτουμε $$V_2(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2$$

<u>Πρόταση</u> $0 < a < b$, B τ.κ.Β.

i) $V_2(B, \Delta_n) \to b - a$ στον L^2 για $n \to \infty$ $\forall$ ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n \ge 1}$ με $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

ii) Αν $\sum_{n \ge 1}^{\infty} \|\Delta_n\| < \infty$, τότε $V_2(B, \Delta_n) \to b - a$ με πιθανότητα 1.

Απόδειξη

$D = \{a = t_0 < \quad < t_k = b\}$

$$V_2(B,\Delta) - (b-a) = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\{(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\}}_{= Y_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} Y_j$$

$$E(Y_j^2) = E((B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^4) + (t_j - t_{j-1})^2 - \qquad \left| \begin{array}{l} t_j - t_{j-1} \\ = \Delta t_j \end{array} \right.$$

$$- 2(t_j - t_{j-1})\, E((B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2)$$

$$= 3(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2 - 2\Delta t_j\, \Delta t_j$$

$$= 2(\Delta t_j)^2$$

$EY_j = 0$, $(Y_j)_{j=1\ldots k}$ ανεξάρτητα

$$E((V_2(B,\Delta) - (b-a))^2) = 2\sum_{j=1}^{k}(\Delta t_j)^2$$

$$\leq 2\|\Delta\| \sum_{j=1}^{k} \Delta t_j = 2(b-a)\|\Delta\| \quad (*)$$

i) Αν $\|\Delta_n\| \to 0$, τότε $V_2(B,\Delta_n) - (b-a) \xrightarrow{L^2} 0$

ii) Αν $\sum \|\Delta_n\| < \infty$, τότε $E\left(\sum_{n=1}^{\infty} (V_2(B,\Delta_n) - (b-a))^2\right) < \infty$

$\Rightarrow$ με π.θ. 1, $\sum_{n=1}^{\infty} (V_2(B,\Delta_n) - (b-a))^2 < \infty$

$\Rightarrow$ με π.θ. 1, $V_2(B,\Delta_n) \to (b-a)$

$$V_1(f,[a,b]) = \sup\{V_1(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

<u>Πρόταση</u> Β τ.κ.Β. ~~...~~ με πιθανότητα 1

$$\forall\, 0 \le a < b, \quad V_1(B,[a,b]) = \infty$$

Απόδειξη

Για σταθερά $0 \le a < b$ και Δ διαμέριση του $[a,b]$

$$V_2(B,\Delta) \le \left(\max_{1\le j\le k} |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|\right) V_1(B,\Delta)$$

Θεωρούμε $(\Delta_n)_{n\ge 1}$ ... $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\| < \infty$, τότε

$V_2(B,\Delta_n) \to b-a$ με πιθ. 1

$\max_{t_j \in \Delta_n} |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Άρα, με πιθανότητα 1,

$V_1(B,\Delta_n) \to \infty$

$$\sqrt{(t_j - t_{j-1})^2 + (f(t_j) - f(t_{j-1}))^2} \le |t_j - t_{j-1}| + |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

Martingales (σε διακριτό χρόνο)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας

Διήθηση θα καλούμε κάθε ακολουθία $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σ-αλγεβρών στο Ω με $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Μία ακολουθία τ.μ. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται προσαρμοσμένη αν η X_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη $\forall n\in\mathbb{N}$.

Η $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, λέγεται martingale ως προς το P και τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν

i) Η X είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

ii) $E|X_n| < \infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$

iii) $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

Αν στην iii) έχουμε $\geq$ λέμε την X submartingale

iii) " $\leq$ " " supermartingale

iii) $\Rightarrow$ $E(X_{n+1}) = E(X_n)$

X submartingale $\Rightarrow$ $\underline{EX_n \uparrow}$

Παράδειγμα: $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες ισόνομες, $EX_1 = 0$, $E(X_1^2) = \sigma^2 < \infty$

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$