**Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις**
**Εαρινό εξάμηνο 2023-2024**
**Εργασία 1**

**Άσκηση 1**. Έστω $H \in (0,1)$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει Γκαουσιανή ανέλιξη $X = (X_t)_{t\geq 0}$ έτσι ώστε για κάθε $0 \leq s \leq t$, η τυχαία μεταβλητή $X_t - X_s \sim N(0, |t-s|^{2H})$. Μια τέτοια ανέλιξη ονομάζεται κλασματική κίνηση Brown.

**(α)** Αποδείξτε ότι η $X$ έχει τροποποίηση που με πιθανότητα 1 έχει μονοπάτια που τοπικά είναι Holder($c$) για κάθε $c \in [0, H)$.

**(β)** Δείξτε ότι η $X$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν και μόνο αν $H = 1/2$.

**Άσκηση 2**. Έστω $(Z_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. με

$$Z_n = \begin{cases} -a_n, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n^2} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - \frac{1}{n^2} \\ a_n, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n^2} \end{cases}$$

όπου $a_1 = 2$, $a_n = 4\,(a_1 + \dots + a_{n-1})$. Θέτουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.
Να αποδειχθούν τα παρακάτω:

(1) Η $Y_n = Z_1 + \dots + Z_n$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$.
(2) Το $\lim_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει με πιθανότητα 1.
(3) $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}|Y_n| = +\infty$.

**Άσκηση 3**. Le Gall. Άσκηση 3.26.

**Άσκηση 4** . Le Gall. Άσκηση 3.28.

Σχόλια

**Άσκηση 4.** Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι $a = 1$. Για το ότι ο τύπος του ερωτήματος 2 ισχύει και για $\lambda \in [-1/2, 0)$ δείχνουμε το εξής. Η απεικόνιση $F(z) := \mathbf{E}(e^{-z\sigma_1})$ είναι αναλυτική στο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1/2\}$ και ισούται με $\exp(1 - \sqrt{1 + 2z})$ εκεί.

Τρόπος 1: Αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό Laplace (τύπος με χρήση μιγαδικής ανάλυσης και θεώρημα Cauchy για να μεταφέρουμε ένα ολοκλήρωμα από μια κάθετη ευθεία $\mathrm{Re}(z) = c > 0$ σε ολοκλήρωμα πάνω στο branch cut της $\sqrt{1 + 2z}$) και βρίσκουμε ότι η $\sigma_1$ έχει πυκνότητα

$$f(t) = \frac{1}{t^{3/2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(1 - \frac{1}{2t} - \frac{t}{2}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t).$$

Από εδώ και τον τύπο της $F$ για $z \in [0, \infty)$ έπεται ο ισχυρισμός.

Τρόπος 2: Αντί να ταλαιπωρούμαστε με την αντιστροφή του Laplace, λέμε ότι για $\delta \in (0, 1)$ και $t \geq 1/\delta$ ισχύει ότι

$$\mathbf{P}(\sigma_1 > t) \leq \mathbf{P}(B_t > t - 1) \leq \mathbf{P}(B_t > t(1 - \delta)) = \mathbf{P}(B_1 > \sqrt{t}(1 - \delta)) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1 - \delta)\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{t}(1-\delta))^2}$$

Αυτό δίνει τον ισχυρισμό για τα $z : \mathrm{Re}(z) > -(1 - \delta)^2/2$. Για $\delta \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο. Επίσης, αρκεί να έχουμε αυτή την ανισότητα για κάποιο $\delta < 1$ (π.χ., $\delta = 1/2$), και μετά έπεται το ζητούμενο με επιχείρημα μιγαδικής ανάλυσης.