Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις
Εαρινό εξάμηνο 2023-2024
Εργασία 2

Άσκηση 1. Έστω $(X_t)_{t\geq 0}$ ανέλιξη με τιμές στο $\mathbb{R}$ προσαρμοσμένη σε μια διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ και αριστερά συνεχής. Δείξτε ότι είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Άσκηση 2. Le Gall. Άσκηση 4.23.

Άσκηση 3. Le Gall. Άσκηση 4.24.

Άσκηση 4 . Le Gall. Άσκηση 4.25.

Άσκηση 5. Le Gall. Άσκηση 5.25.
[Υπόδειξη. Το όριο ισουται με H_0 και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H_0 = 0$. Μπορείτε να δείξετε το ζητούμενο αν αντικαταστήσουμε το B_t στον παρονομαστή με $\sqrt{t}$;]

Άσκηση 6 . Le Gall. Άσκηση 5.26.

Σχόλια

Άσκηση 5. Έστω

$$X_t := \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t H_s \, dB_s.$$

Ισχυρισμος: $\lim_{t\to 0+} X_t = 0$ κατά πιθανότητα.

Έστω $Y := \sup_{s\in[0,1]} |H_s|$ (η Y παίρνει πραγματικές τιμές γιατί είναι το supremum συνεχούς διαδικασίας σε συμπαγές σύλονο). Επίσης, για κάθε $M, s \geq 0$ θέτουμε $J_s^M := (-M) \vee (H_s \wedge M)$. Η ανέλιξη J^M έχει συνεχή μονοπάτια και είναι προσαρμοσμένη. Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_t| > \varepsilon) = \mathbf{P}(|X_t| > \varepsilon, Y > M) + \mathbf{P}(|X_t| > \varepsilon, Y \leq M) \tag{1}$$

$$\leq \mathbf{P}(Y > M) + \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t J_s^M \, dB_s\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbf{P}(Y > M) + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t J_s^M \, dB_s\right)\right\} \tag{2}$$

$$= \mathbf{P}(Y > M) + \frac{1}{\varepsilon^2 t}\mathbf{E}\left(\int_0^t (J_s^M)^2 \, ds\right) = \mathbf{P}(Y > M) + \frac{1}{\varepsilon^2 t} \int_0^t \mathbf{E}\{(J_s^M)^2\} \, ds. \tag{3}$$

Επειδή η J^M είναι διαδιακασία συνεχής, φραγμένη, και με $J_0^M = 0$, εύκολα δείχνουμε ότι όταν $t \to 0^+$ το όριο της τελευταίας ποσότητας είναι 0. Άρα $\overline{\lim}_{t\to 0+} \mathbf{P}(X_t > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(Y > M)$. Για $M \to \infty$, παίρνουμε τον ισχυρισμό.

Έπειτα γράφουμε την ποσότητα στο ερώτημα ως

$$\frac{\sqrt{t}}{|B_t|} X_t$$

και αποδεικνύουμε τον εξής ισχυρισμό. Αν $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ διαδιακασίες ώστε για $t \to 0^+$ η μία να συγκλίνει στο 0 κατά πιθανότητα ενώ η άλλη να είναι σφιχτή (ως σύνολο τυχαίων μεταβλητών) τότε το γινόμενό τους συγκλίνει στο 0 κατά πιθανότητα. Η οικογένεια $(\sqrt{t}/|B_t|)_{t>0}$ είναι σφιχτή αφού όλα της τα μέλη έχουν την ίδια κατανομή (και για κάθε $t > 0$, με πιθανότητα 1, η $\sqrt{t}/|B_t|$ δεν ισούται με άπειρο).

Προσέξτε ότι για την ποσότητα στο ερώτημα δεν μπορούμε να μιλήσουμε για συγκλιση με πιθανότητα 1 γιατί ο παρονομαστής, B_t, μηδενίζεται για τιμές του t οσοδήποτε κοντά στο 0. Στη σύγκλιση κατά πιθανότητα δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα.