

Θεωρία Αριθμών

25 Ιουνίου 2015

Πρόβλημα 1:

1. Να βρεθούν τα υπόλοιπα της διαιρέσεως των αριθμών 2^{46} , 7^{126} , 8^{130} δια των αριθμών 47, 127, 131 αντίστοιχα.
2. Να υπολογιστεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης d των αριθμών 356 και 156 και να υπολογιστούν $a, b \in \mathbb{Z}$ ώστε $a356 + b156 = d$.

Πρόβλημα 2:

Να λυθεί η ισοδυναμία $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 \pmod{27}$.

Πρόβλημα 3:

Να αποδειχθεί ότι για p πρώτο και $i \geq 1$ οι αριθμοί $\binom{p^i}{\nu} \equiv 0 \pmod{p}$ όταν $1 \leq \nu \leq p - 1$. Υπόδειξη: εξετάστε πρώτα την περίπτωση $i = 1$.

Πρόβλημα 4: Να αποδειχθεί ότι

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{αν } p \equiv 1 \pmod{5} \text{ ή } p \equiv 4 \pmod{5} \\ -1 & \text{αν } p \equiv 2 \pmod{5} \text{ ή } p \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

Πρόβλημα 5:

1. Αν ο αριθμός a έχει τάξη ℓ modulo n και αν ο αριθμός b έχει τάξη ν modulo n και $(\ell, \nu) = 1$ να υπολογιστεί η τάξη του ab .
2. Αφού υπολογίσετε την τάξη του 2 modulo 47 να υπολογίσετε μια αρχική ρίζα modulo 47. Πόσες άλλες αρχικές ρίζες υπάρχουν;