Θεωρία Πιθανοτήτων

Τελική Εξέταση, 3 Ιουλίου 2015

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Έστω $n \geq 2$ ακέραιος, και $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$, $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathbf{E}(X_1^2) = \mu_2, \mathbf{E}(X_1^3) = \mu_3$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^3$.

Θέμα 2. (30 Βαθμοί) Εκτελούμε ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων νομισμάτων. Στη n-οστή ρίψη ($n \geq 1$) ρίχνουμε ένα νόμισμα που φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_n = a/(n+1)$, όπου $a \in (0, 2]$ είναι μια σταθερά.

(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 θα έρθει «Κ» άπειρες φορές.

(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 τα ζεύγη διαδοχικών ρίψεων που και στις δύο έρχεται «Κ» είναι πεπερασμένα.

(γ) Έστω Z η πρώτη ρίψη στην οποία έρχεται «Κ». Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της Z και να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(Z) < \infty \Leftrightarrow a > 1$.

Θέμα 3 (20 Βαθμοί) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με κατανομή Cauchy. Έστω και σταθερές $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \stackrel{d}{=} cX_1$$

Θέμα 4. (20 Βαθμοί) Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $[0, \infty)$. Μετασχηματισμό Laplace του μ λέμε τη συνάρτηση $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ με $L(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\mu(x)$ για κάθε $s \geq 0$. Να δειχθεί ότι για κάθε $u > 0$ ισχύει

$$\mu\left(\frac{2}{u}, \infty\right) \leq \frac{2}{u}\int_0^u (1 - L(s))\, ds. \tag{1}$$

Θέμα 5. (25 Βαθμοί) Έστω $a > 0$ και X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{a}{2|x|^{a+1}}\, \mathbf{1}_{|x|\geq 1}.$$

(α) Αν $a > 2$, $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες ισόνομες με πυκνότητα f, και $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$, να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $C(a) \in (0, \infty)$ ώστε $S_n/\sqrt{n} \Rightarrow N(0, C(a))$.

(β) Αν $a \in (0, 2)$, να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $\widetilde{C}(a) \in (0, \infty)$ ώστε

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \phi_X(t)}{|t|^a} = \widetilde{C}(a). \tag{2}$$

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Πρόταση Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $\hat{\mu}$ ο μετασχηματισμός Fourier του. Τότε

$$\mu\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\hat{\mu}(t))dt \tag{3}$$

για κάθε $u > 0$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier του μέτρου μ έχουμε

$$\int_{-u}^{u}(1-\hat{\mu}(t))dt = \int_{-u}^{u}\int(1-e^{itx})d\mu(x)dt = \int\int_{-u}^{u}(1-\cos(tx)+i\sin(tx))dtd\mu(x).$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Fubini. Εφόσον η συνάρτηση $1-\cos(tx)$ είναι άρτια και η συνάρτηση $\sin(tx)$ είναι περιττή, το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$2\int\int_{-u}^{u}(1-\cos(tx))dtd\mu(x) = 2\int\left(u-\frac{\sin(ux)}{x}\right)d\mu(x) = 2u\int\left(1-\frac{\sin(ux)}{ux}\right)d\mu(x).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνάρτηση στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μη αρνητική ($1-\frac{\sin(ux)}{ux} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα αν ολοκληρώσουμε σε μικρότερο χωρίο, το ολοκλήρωμα μικραίνει) και για $|ux| > 2$ έχουμε

$$\Big|\frac{\sin(ux)}{ux}\Big| \leq \frac{1}{ux} \leq \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-u}^{u}\{1-\hat{\mu}(t)\}dt \geq 2u\int_{\{x:|x|>2/u\}}\frac{1}{2}d\mu(x) = u\mu\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right). \tag{4}$$

που είναι το ζητούμενο. ■

Η κατανομή Cauchy έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t) = e^{-|t|}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.