Θεωρία Πιθανοτήτων. Ασκήσεις I

1. Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχόμενα σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Για $r = 0, 1, \ldots, n$ θέτουμε

$$C_r := \{x \in \Omega : \text{το } x \text{ ανήκει σε ακριβώς } r \text{ από τα } A_1, A_2, \ldots, A_n\}.$$

Να δειχθεί με χρήση δεικτριών ότι

$$\mathbf{P}(C_r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Το εσωτερικό πολλαπλό άθροισμα για $k = 0$ ορίζεται ίσο με 1.

2. Για X τυχαία μεταβλητή με πραγματικές τιμές, διάμεσο της λέμε κάθε $m \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\mathbf{P}(X \geqslant m) \geqslant 1/2, \mathbf{P}(X \leqslant m) \geqslant 1/2.$$

(α) Να δειχθεί ότι κάθε τυχαία μεταβλητή X με πραγματικές τιμές έχει τουλάχιστον έναν διάμεσο. Είναι μοναδικός πάντοτε;

(β) Έστω X τυχαία μεταβλητή με πραγματικές τιμές και με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Να δειχθεί ότι ο $m \in \mathbb{R}$ είναι διάμεσος της X αν και μόνο αν ο m είναι σημείο στο οποίο η συνάρτηση $f(a) = \mathbf{E}|X - a|, a \in \mathbb{R}$ παίρνει το ολικό της ελάχιστο. [Δεν υποθέτουμε ότι η X είναι συνεχής τ.μ.]

(γ) Έστω X τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή μ, διάμεσο m, και διασπορά σ^2. Να δειχθεί ότι

$$|m - \mu| \leqslant \sigma,$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η X είναι σταθερή (με πιθανότητα 1).

3. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$.

(α) Αν για τον $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mathbf{P}(X + Y = a) > 0$, τότε υπάρχουν $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = a_1) > 0, \mathbf{P}(Y = a_2) > 0$ και $a = a_1 + a_2$.

(β) Η $X + Y$ είναι διακριτή αν και μόνο αν οι X, Y είναι διακριτές. Ισχύει η ισοδύναμια αν παραλείψουμε την υπόθεση της ανεξαρτησίας για τις X, Y;

4. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}|f(X)g(X)|, \mathbf{E}|f(X)|, \mathbf{E}|g(X)| < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\{f(X)g(X)\} \geqslant \mathbf{E}\{f(X)\}\mathbf{E}\{g(X)\}.$$

5. Durrett. 2.2.2

6. Durrett. 2.2.4

7. Durrett. 2.2.5