Θεωρία Πιθανοτήτων. Ασκήσεις ΙΙ

1. Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε η κατανομή της X_1 να μην είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο [δηλαδή δεν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(X_1 = c) = 1$]. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει στο } \bar{\mathbb{R}}) = 0.$$

2. Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $X_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$ για κάθε $n \geqslant 1$. Θέτουμε $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ για κάθε $n \geqslant 1$. Να δειχθούν τα εξής.

(α) $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ κατά πιθανότητα $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X_1 \in \mathbb{R}) = 1$.

(β) $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ με πιθανότητα 1 $\Leftrightarrow \mathbf{E}|X_1| < \infty$.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0$ κατά πιθανότητα $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X_1 = -\infty) < 1$ και $\lim_{x\to\infty} x\,\mathbf{P}(X_1 > x) = 0$.

(δ) $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0$ με πιθανότητα 1 $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X_1 = -\infty) < 1$ και $\mathbf{E}(X_1^+) < \infty$.

3. (α) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, με $\mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$, και οι οποίες είναι m-εξαρτημένες, όπου $m \in \mathbb{N}^+$ δεδομένο. Δηλαδή, για κάθε $r \in \mathbb{N}^+$ και θετικούς ακέραιους $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ με $k_{i+1} - k_i \geqslant m + 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, r-1$, οι τυχαίες μεταβλητές $X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_r}$ είναι ανεξάρτητες. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mathbf{E}(X_1)$ με πιθανότητα 1.

(β) Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε $X_1 \sim U(0,1)$. Θέτουμε

$$T_n := X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} T_n/n$ υπάρχει με πιθανότητα 1 και να υπολογιστεί.

4. Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ και $(k_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbf{1}_{|X_i| > k_n} = 0$$

με πιθανότητα 1.

5. Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(0,1)$. Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $a > 1/2$, τότε

$$\mathbf{P}(\varlimsup_{n\to\infty} n^a |S_n| = \infty) = 1.$$

(β) Αν $a \leqslant 1/2$, τότε

$$\mathbf{P}(\varliminf_{n\to\infty} n^a |S_n| = 0) = 1.$$

[Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 2.3.10 από το βιβλίο του Durrett, δηλαδή το λήμμα Kochen-Stone.]

6. Έστω $p \in [0,1]$ και $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - p$, $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$. Θέτουμε

$$X := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_n.$$

Δηλαδή ο X είναι ένας αριθμός που γραμμένος στο δυαδικό σύστημα έχει ψηφία τις τυχαίες μεταβλητές $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Να δειχθεί ότι:

(α) Αν $p = 1/2$, τότε η κατανομή της X είναι ο περιορισμός του μέτρου Lebesgue στο $[0,1]$.

(β) Αν $p \neq 1/2$, τότε η κατανομή της X είναι ιδιάζουσα.

3. Έστω $R_n := S_n/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, $\rho := m+1, \mu := \mathbf{E}(X_1)$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbf{P}(\lim_{k\to\infty} R_{k\rho+v} = \mu) = 1$$

για κάθε $v = 0, 1, \dots, \rho - 1$. Γράφουμε

$$(k\rho + v)R_{k\rho+v} = S_v + T_{k,0} + T_{k,1} + \cdots + T_{k,\rho-1}$$

όπου

$$T_{k,\ell} = X_{v+\ell} + X_{v+\ell+\rho} + \cdots + X_{v+\ell+(k-1)\rho}$$

για κάθε $\ell = 0, 1, \dots, \rho - 1$. Το $T_{k,\ell}$ είναι το άθροισμα των πρώτων k όρων της ακολουθίας $(X_{v+\ell+j\rho})_{j\geqslant 0}$, που είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Ο νόμος μεγάλων αριθμών εφαρμόζεται. Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_{k,\ell}}{k} = \mu.$$

Αρα (παίρνοντας τομή ρ συνόλων που το καθένα έχει πιθανότητα 1) έχουμε με πιθανότητα 1 ότι

$$R_{k\rho+v} = \frac{S_v}{k\rho+v} + \frac{k}{k\rho+v}\frac{T_{k,0}}{k} + \cdots + \frac{k}{k\rho+v}\frac{T_{k,\rho-1}}{k} \to 0 + \rho\frac{1}{\rho}\mu = \mu$$

καθώς $k \to \infty$.