Θεωρία Πιθανοτήτων

Τελική εξέταση. 20 Ιουνίου 2022

1. (10 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $c > 0$. Να δειχθεί ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(x < X < x + c)\, dx = c.$$

2. (20 Βαθμοί) (α) Έστω $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathbf{E}(X_1^2) < \infty$. Θέτουμε

$$M_n := \max\{|X_i|/\sqrt{n} : i = 1, 2, \dots, n\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να διεχθεί ότι $M_n \Rightarrow 0$ για $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή).

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ έχουμε $\{X_{n,i} : i = 1, \dots, n\}$ ανεξάρτητες με

$$\mathbf{P}(X_{n,i} = 1) = p_{n,i} = 1 - \mathbf{P}(X_{n,i} = 0)$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \max\{p_{n,i} : i = 1, \dots, n\} \to 0$ και $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{n,i} = r \in (0, \infty)$. Θέτουμε $M_n := \max\{X_{n,i} : i = 1, \dots, n\}$. Να δειχθεί ότι $M_n \Rightarrow W$ για κατάλληλη τυχαία μεταβλητή W της οποίας την κατανομή να προσδιορίσετε.

3. (25 Βαθμοί) Εστω $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και $\mathbf{E}(X_k^2) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Θέτουμε $S_n := \sum_{k=1}^{n} kX_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.

(α) Να δειχθεί ότι $\frac{S_n}{n^2} \to 0$ κατά πιθανότητα.

(β) Να δειχθεί ότι $\frac{S_n}{n^2} \to 0$ με πιθανότητα 1.

4. (30 Βαθμοί) Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Η χαρακτηριστική της συνάρτηση ορίζεται ως $\phi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(α) Να δειχθεί ότι η ϕ_X είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αν $\mathbf{E}|X| < \infty$, τότε η ϕ_X είναι διαφορίσιμη στο 0.

(γ) Αν η ϕ_X είναι διαφορίσιμη στο 0 (με πεπερασμένη παράγωγο), τότε ισχύει ότι $\phi_X'(0) = ia$ με $a \in \mathbb{R}$.

(δ) Αν η ϕ_X είναι διαφορίσιμη στο 0 με $\phi_X'(0) = ia$ με $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$\frac{S_n}{n} \to a$$

κατά πιθανότητα.

5. (20 Βαθμοί) Εστω $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}^+, k = 1, 2, \dots, n\}$ τυχαίες μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ οι $(X_{n,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ είναι ανεξάρτητες και υπάρχει $C_n \in (0, \infty)$ ώστε $|X_{n,k}| \leqslant C_n$ για κάθε $k \in [n]$. Θέτουμε $S_n := X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ και $\sigma_n := \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Υποθέτουμε ότι $\sigma_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $\lim_{n\to\infty} C_n/\sigma_n = 0$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma_n} \Rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

καθώς $n \to \infty$.

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. Γράφουμε την πιθανότητα ως μέση τιμή δείκτριας και αλλάζουμε σειρά ολοκλήρωσης.

2. (α) Δείχνουμε σύγκλιση κατά πιθανότητα. Χρήσιμη είναι η σχέση

$$n\mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}) = n\mathbf{P}(X_1^2 \geqslant \varepsilon^2 n) \leqslant \varepsilon^{-2}\mathbf{E}(X_1^2 \mathbf{1}_{X_1^2 > \varepsilon^2 n}) \to 0.$$

(β) Η M_n παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1. Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n = 0)$. Η W είναι Bernoulli$(1 - e^{-r})$.

3. (α) Δείχνουμε σύγκλιση στον L^2.

$$\mathbf{E}\left(\frac{S_n^2}{n^4}\right) = \frac{1}{n_4}\text{Var}(S_n) = \frac{1}{n_4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \to 0$$

(β) Χρησιμοποιούμε το Λήμμα Kronecker.

5. Θέτουμε

$$Y_{n,k} := \frac{X_{n,k} - \mathbf{E}(X_{n,k})}{\sigma_n}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, οι $\{Y_{n,k} : k \in [n]\}$ είναι ανεξάρτητες, καθεμία έχει μέση τιμή 0 και

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Y_{n,k}^2) = 1.$$

Από τα δεδομένα, $|Y_{n,k}| \leqslant 2C_n/\sigma_n$. Το δεξί μέλος τείνει στο 0, οπότε για $\varepsilon > 0$ σταθερό, υπάρχει n_0 ώστε $2C_n/\sigma_n < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$. Άρα για $n > n_0$ και $k \in [n]$ έχουμε $\{|Y_{n,k}| > \varepsilon\} = \varnothing$, οπότε η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος Lindeberg-Feller ικανοποιείται τετριμμένα.