Θεωρία Πιθανοτήτων

Εξέταση 13 Σεπτεμβρίου 2022

1. (30 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$, μέση τιμή $\mu := \mathbf{E}(X) \in (0, \infty)$, και πυκνότητα $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Μεροληπτικη με βάση το μέγεθος εκδοχή της X ονομάζουμε οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X^* έχει πυκνότητα $f_{X^*}(x) = xf(x)/\mu$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(α) Αν $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, ποια κατανομή ακολουθεί η X^*;
(β) Να δειχθεί ότι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των X, X^* συνδέονται με τη σχέση

$$\phi_{X^*}(t) = -\frac{i}{\mu}\phi'_X(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
(γ) Έστω $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ (για κάποιο $\lambda > 0$) ανεξάρτητη της X και γνωρίζουμε ότι $X^* \stackrel{d}{=} X + Y$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω ότι η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $(X_t)_{t \in I}$ είναι σφιχτή (I αυθαίρετο σύνολο, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ για κάθε $t \in I$). Να δειχθεί ότι η $F(x) := \inf_{t \in I} F_{X_t}(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$.

3. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ τυχαίες μεταβλητές στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, και $C_\infty := \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(\{X_k : k \geqslant n\})$ η τελική σ-άλγεβρά τους. Ποιες από τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές είναι C_∞-μετρήσιμες;
(α) $\overline{\lim}_{n \to \infty} (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/\log n$
(β) $\sup\{X_n \wedge 1 : n \in \mathbb{N}^+\}$.
(γ) $\overline{\lim}_{n \to \infty} \max\{X_1 - n, X_2 - (n-1), \ldots, X_n - 1\}$.

4. (40 Βαθμοί) Ένας φοιτητής απαντάει τις ερωτήσεις μιας εξέτασης, οι οποίες είναι άπειρες και αριθμημένες ως $1, 2, 3, \ldots$ Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να απαντήσει σωστά την ερώτηση n είναι $1/n$ (οι ερωτήσεις είναι με σειρά αύξουσας δυσκολίας), και τα ενδεχόμενα $(\{\text{απαντάει σωστά την ερώτηση } n\})_{n \in \mathbb{N}^+}$ είναι ανεξάρτητα.
(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 θα απαντήσει σωστά άπειρες ερωτήσεις.
(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 μόνο πεπερασμένο αριθμό φορών θα καταφέρει να απαντήσει σωστά δύο διαδοχικές ερωτήσεις.
(γ) Έστω T_n το πλήθος από τις ερωτήσεις $\{1, 2, \ldots, n\}$ τις οποίες ο φοιτητής απαντάει σωστά. Να δειχθεί ότι

$$\frac{T_n}{\log n} \to 1$$

κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.
(δ) Έστω T_n όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Να δειχθεί ότι

$$\frac{T_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \Rightarrow Z$$

με $Z \sim N(0, 1)$.

Υπενθύμιση: $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\log n =: \gamma \in (0,\infty)$.
Η πυκνότητα της $\Gamma(a,\lambda)$ είναι η $f(x)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$ και η ροπογεννήτριά της είναι η

$$M(t)=\frac{1}{(1-\frac{t}{\lambda})^a}$$

για κάθε $t<\lambda$.

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. (γ) Λύνουμε μια διαφορική εξίσωση για την ϕ_X.

2. Δείχνουμε ότι η F είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής, $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$. Η σφιχτότητα χρειάζεται για την τελευταία ισότητα.

3. Είναι οι (α), (γ).

4. (α) Δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli.
(β) Πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.
(γ) Ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών για τριγωνικούς πίνακες.
(δ) Θεώρημα Lindeberg-Feller.