Τοπολογία

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

1. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν d τυχούσα μετρική στο X, τότε $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_d$.

(β) Αν X πεπερασμένο, τότε $\mathscr{T} = P(X) =$ η διακριτή τοπολογία.

(γ) Αν X άπειρο, τότε ο $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

Υπόδειξη: (α) Έστω d τυχούσα μετρική στο X. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σύνολο $A \subseteq X$ με πεπερασμένο συμπλήρωμα ($A \in \mathscr{T}$) είναι ανοιχτό ως προς την d. Όμως, σε κάθε μετρικό χώρο, τα πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά, άρα $X \setminus A$ d-κλειστό, δηλαδή $A \in \mathscr{T}_d$.

(β) Αν το X είναι πεπερασμένο, τότε κάθε υποσύνολό του έχει πεπερασμένο συμπλήρωμα, άρα αν $A \in \mathcal{P}(X)$, τότε $A \in \mathscr{T}$, δηλαδή $\mathscr{T} = \mathcal{P}(X)$.

(γ) Έστω X άπειρο σύνολο. Αν ο $(X, \mathscr{T})$ ήταν μετρικοποιήσιμος, τότε, για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, θα υπήρχαν ανοιχτά σύνολα U, V με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Όμως, αν $U, V \in \mathscr{T}$, με $U, V \neq \emptyset$, τότε $U \cap V \neq \emptyset$. Πράγματι, αν ήταν $U \cap V = \emptyset$, τότε θα ήταν $U \subseteq X \setminus V$ και αφού $X \setminus V$ είναι πεπερασμένο, θα ήταν και το U πεπερασμένο, άτοπο. Επομένως $U \cap V \neq \emptyset$ για κάθε $U, V \neq \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι ο $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

2. Αποδείξτε ότι καθένα από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι μια τοπολογία στο $\mathbb{N}$.

Το $\mathscr{T}_1$ αποτελείται από τα $\emptyset, \mathbb{N}$ και κάθε αρχικό διάστημα $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 1$ (τοπολογία των αρχικών διαστημάτων).

(β) Το $\mathscr{T}_2$ αποτελείται από τα $\emptyset, \mathbb{N}$ και κάθε τελικό διάστημα $J_n = \{n, n+1, \dots\}$, $n \geq 1$ (τοπολογία των τελικών διαστημάτων).

Υπόδειξη: (α) (i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathscr{T}_1$.

(ii) Είναι απλό να ελέγξουμε ότι η τομή δύο αρχικών διαστημάτων είναι αρχικό διάστημα: $I_n \cap I_m = I_k$, όπου $k = \min\{n, m\}$.

(iii) Η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας αρχικών διαστημάτων είναι αρχικό διάστημα: $I_{n_1} \cup I_{n_2} \cup \ldots \cup I_{n_k} = I_l$, όπου $l = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Επιπλέον, μια άπειρη οικογένεια διαφορετικών ανά δύο αρχικών διαστημάτων είναι αναγκαστικά αριθμήσιμη της μορφής $(I_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ (γιατί;) και ισχύει $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n_j} = \mathbb{N} \in T$, αφού αν $m \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει j με $n_j \geq m$, άρα $m \in I_{n_j}$.
Συμπεραίνουμε ότι η $\mathscr{T}_1$ είναι τοπολογία.

(β) Η απόδειξη του (α) βασίστηκε στο γεγονός ότι η $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων, δηλαδή $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$. Αντίστοιχα, η $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα, δηλαδή $J_1 = \mathbb{N} \supset J_2 \supset \ldots$. Με βάση αυτό, ευκολα ελέγχονται τα ακόλουθα:

(i) $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathscr{T}_2$ από υπόθεση.

(ii) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $I_n \cap I_m = I_k$, όπου $k = \max\{n, m\}$.

(iii) Για οποιαδήποτε - πεπερασμένη ή άπειρη - οικογένεια τελικών διαστημάτων $(J_n)_{n \in S}$ ($S \neq \emptyset$), ισχύει $\bigcup_{n \in S} J_n = J_l$, όπου $l = \min S$.
Συμπεραίνουμε ότι η $\mathscr{T}_2$ είναι τοπολογία.

3. Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathscr{T}$ μια τοπολογία στο X ώστε το μόνο άπειρο ανοιχτό υποσύνολο του X είναι ο ίδιος ο X. Είναι τότε η $\mathscr{T}$ η τετριμμένη τοπολογία στο X;

Υπόδειξη: Όχι: Παρατηρούμε ότι η $\mathscr{T}_1$ της Άσκησης 2, δηλαδή η τοπολογία των αρχικών διαστημάτων στο $\mathbb{N}$, έχει την ιδιότητα το μόνο άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που ανήκει στην $\mathscr{T}_1$ να είναι το $\mathbb{N}$.

4. Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathscr{T}$ τοπολογία στο X ώστε κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι μέλος της $\mathscr{T}$. Αποδείξτε ότι η $\mathscr{T}$ είναι η διακριτή τοπολογία στο X.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μονοσύνολο του X ανήκει στην $\mathscr{T}$. Έστω $a \in X$. Θεωρούμε το άπειρο σύνολο $X \setminus \{a\}$. Παρατηρούμε ότι το $X \setminus \{a\}$ περιέχει δύο ξένα άπειρα σύνολα, έστω A, B (γιατί;). Τότε $A \cup \{a\} \in \mathscr{T}$ και $B \cup \{a\} \in \mathscr{T}$, άρα

$$\{a\} = (A \cup \{a\}) \cap (B \cup \{a\}) \in \mathscr{T}.$$

Αφού το a ήταν τυχόν στοιχείο του X, συμπεραίνουμε ότι η $\mathscr{T}$ είναι η διακριτή τοπολογία στο X.

5. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα , $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι:

(α) $\overline{B(x,\varepsilon)} = \widehat{B}(x,\varepsilon)$.

(β) $\operatorname{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right) = B(x,\varepsilon)$.

(γ) $\operatorname{bd}(B(x,\varepsilon)) = S(x,\varepsilon)$.

Υπόδειξη: (α) Είναι φανερό ότι $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \widehat{B}(x,\varepsilon)$, αφού το $\widehat{B}(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο και περιέχει το $B(x,\varepsilon)$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι, αν $y \in \widehat{B}(x,\varepsilon)$, τότε υπάρχει ακολουθία (y_n) στο $B(x,\varepsilon)$ με $y_n \to y$. Έστω λοιπόν $y \in \widehat{B}(x,\varepsilon)$, δηλαδή $\|y-x\| \leq \varepsilon$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $y_n = x + \frac{n}{n+1}(y-x)$. Τότε, για κάθε n, $\|y_n - x\| = \frac{n}{n+1}\|y-x\| < \varepsilon$, δηλαδή $y_n \in B(x,\varepsilon)$ και $\|y_n - y\| = \frac{1}{n+1}\|x-y\|$, δηλαδή $y_n \to y$. Έπεται ότι $\widehat{B}(x,\varepsilon) \subseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$ και τελικά ισχύει η ισότητα.

(β) Είναι φανερό ότι $B(x,\varepsilon) \subseteq \operatorname{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right)$, αφού το $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο και περιέχεται στο $\widehat{B}(x,\varepsilon)$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε $z \in \operatorname{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right)$. Τότε $z \in \widehat{B}(x,\varepsilon)$, οπότε υποθέτοντας ότι $z \notin B(x,\varepsilon)$ θα είχαμε $\|z-x\| = \varepsilon$. Θεωρούμε την ακολουθία (z_n) με $z_n = z + \frac{1}{n}(z-x)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\|z_n - z\| = \frac{1}{n}\|x-z\| \to 0$, δηλαδή $z_n \to z$. Από την άλλη μεριά, για κάθε n, $\|z_n - x\| = \frac{n+1}{n}\|z-x\| > \varepsilon$, δηλαδή $z_n \notin \widehat{B}(x,\varepsilon)$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση $z \in \operatorname{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right)$, αφού η (z_n) θα έπρεπε τελικά να περιέχεται στο $\operatorname{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right)$. Συμπεραίνουμε ότι $z \in B(x,\varepsilon)$ και τελικά ότι $\operatorname{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right) \subseteq B(x,\varepsilon)$, από όπου έπεται η ισότητα.

(γ) Με βάση το (α), είναι $\operatorname{bd}(B(x,\varepsilon)) = \overline{B(x,\varepsilon)} \setminus \operatorname{int}(B(x,\varepsilon)) = \widehat{B}(x,\varepsilon) \setminus B(x,\varepsilon) = S(x,\varepsilon)$.

6. Αποδείξτε με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι τα συμπεράσματα της προηγούμενης άσκησης δεν ισχύουν κατ΄ ανάγκη σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο X.

Υπόδειξη: Θεωρούμε ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο στοιχεία, εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική δ.
Τότε, για οποιοδήποτε $x \in X$, είναι $B(x,1) = \{x\}$, $\widehat{B}(x,1) = X$ και $S(x,1) = X \setminus \{x\}$, οπότε $\overline{B(x,1)} = \{x\} \neq \widehat{B}(x,1)$, $\operatorname{int}\left(\widehat{B}(x,1)\right) = X \neq B(x,1)$ και $\operatorname{bd}(B(x,1)) = \emptyset \neq S(x,1)$.

7. Αποδείξτε ότι, αν ένας τοπολογικός χώρος είναι μετρικοποιήσιμος, τότε υπάρχουν άπειρες διαφορετικές μετρικές που ορίζουν την τοπολογία του.

Υπόδειξη: Αν η d είναι μια μετρική στο σύνολο X, τότε, για κάθε $\lambda > 0$, η $\lambda \cdot d$ είναι και αυτή μετρική, ισοδύναμη με την d - δηλαδή η d και η $\lambda \cdot d$ ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα. Υπάρχουν βέβαια και άπειρες ακόμα μετρικές ισοδύναμες με την d. Η $\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y}$ είναι μια τέτοια, η οποία επιπλέον είναι φραγμένη.

8. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T})$ λέγεται χώρος T_1 αν, για κάθε $x \neq y \in X$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_x του x με $y \notin U_x$ και υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_y του y με $x \notin U_y$.

(α) Αποδείξτε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι T_1 αν και μόνο αν τα πεπερασμένα υποσύνολα του X είναι κλειστά.

(β) Έστω $(X, \mathscr{T})$ χώρος T_1, $A \subseteq X$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι κάθε ανοιχτή περιοχή U του x_0 περιέχει άπειρα σημεία του A. Ειδικότερα, σε κάθε T_1 χώρο, τα πεπερασμένα σύνολα δεν έχουν σημεία συσσώρευσης.

(γ) Έστω $(X, \mathscr{T})$ χώρος T_1 και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης του A είναι κλειστό.

(δ) Θεωρούμε το σύνολο $X = [-1,1]$ με την τοπολογία $\mathscr{T}$, όπου

$$\mathscr{T} = \Big\{\emptyset, [-1,1]\Big\} \cup \Big\{[-1,b) \;\Big|\; 0 < b \leq 1\Big\} \cup \Big\{(a,1] \;\Big|\; -1 \leq a < 0\Big\} \cup \Big\{(a,b) \;\Big|\; -1 \leq a < 0 < b \leq 1\Big\},$$

η οποία ονομάζεται τοπολογία των επικαλυπτόμενων διαστημάτων στο $[-1,1]$.

(i) Αποδείξτε ότι η κλάση $\mathscr{T}$ είναι πράγματι τοπολογία και ότι ο χώρος $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι T_1 χώρος.

(ii) Αν $A = \{0\}$, βρείτε το A' και δείξτε ότι δεν είναι κλειστό.

Υπόδειξη: (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο χώρος X είναι T_1 και θα δείξουμε ότι τα μονοσύνολά του είναι κλειστά. Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $X \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτό. Έστω $y \in X \setminus \{x\}$. Από την υπόθεση, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του y με $x \notin U$, δηλαδή $U \subseteq X \setminus \{x\}$. Συμπεραίνουμε ότι το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτό, δηλαδή το $\{x\}$ είναι κλειστό. Αφού τα μονοσύνολα είναι κλειστά, τότε και κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό σύνολο και έστω $x \neq y \in X$. Αφού το $\{x\}$ είναι κλειστό, το $X \setminus \{x\}$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του y η οποία δεν περιέχει το x και, ανάλογα, το $X \setminus \{y\}$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του x η οποία δεν περιέχει το y.

(β) Έστω $A \subseteq X$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Θεωρούμε μια ανοιχτή περιοχή U του x_0 και θα αποδείξουμε ότι η τομή $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο. Με απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι $(U \setminus \{x_0\}) \cap A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Από την υπόθεση ότι ο X είναι

T_1 χώρος και το (α), ξέρουμε ότι το σύνολο $V = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ανοιχτό, άρα το $U \cap V = U \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ανοιχτή περιοχή του x_0. Όμως $((U \cap V) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$ και αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. Συμπεραίνουμε ότι το $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο.

(γ) Έστω $A \subseteq X$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $X \setminus A'$ είναι ανοιχτό. Έστω $x \in X \setminus A'$. Τότε $x \notin A'$ άρα υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x με $(U \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Θα δείξουμε ότι $U \subseteq X \setminus A'$. Αν $U = \{x\}$, τότε προφανώς αυτό ισχύει. Διαφορετικά, έστω $y \in U$ με $y \neq x$. Αφού ο X είναι T_1, το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό, άρα το σύνολο $(U \setminus \{x\})$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του y με $(U \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Έπεται ότι $y \notin A'$ και αφού το y ήταν τυχόν σημείο του U έπεται ότι $U \subseteq X \setminus A'$. Συμπεραίνουμε ότι το $X \setminus A'$ είναι ανοιχτό.

9. Έστω X ένας 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ μια άλλη βάση για την τοπολογία του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε ανοιχτό σύνολο G του X υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο M_G του I, ώστε $G = \bigcup_{i\in M_G} U_i$.

(β) Υπάρχει μια αριθμήσιμη υποοικογένεια $(U_i)_{i\in M}$ της $(U_i)_{i\in I}$ που είναι βάση του X.

Υπόδειξη: (α) Αρχικά, υπάρχει $J \subseteq I$ με $G = \bigcup_{i\in J} U_i$. Τώρα, για κάθε $i \in J$, υπάρχει $N_i \subseteq \mathbb{N}$, με $U_i = \bigcup_{n\in N_i} B_n$. Θέτουμε $S = \bigcup_{i\in J} N_i$, οπότε έχουμε $G = \bigcup_{n\in S} B_n$, όπου, για κάθε $n \in S$, υπάρχει $i = i(n) \in J$ με $B_n \subseteq U_{i(n)}$. Έπεται ότι $G = \bigcup_{n\in S} B_n \subseteq \bigcup_{n\in S} U_{i(n)} \subseteq G$ και άρα $G = \bigcup_{n\in S} U_{i(n)}$. Θέτοντας $M_G = \{i(n) : n \in S\}$ έχουμε το ζητούμενο.

(β) Σύμφωνα με το (α), για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $M_n \subseteq I$ ώστε $B_n = \bigcup_{i\in M_n} U_i$. Θέτοντας $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, έχουμε ότι η $(U_i)_{i\in M}$ είναι μια αριθμήσιμη υποοικογένεια της $(U_i)_{i\in I}$ που είναι βάση για την τοπολογία του X.

12. Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathscr{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο χώρος $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος, κατά συνέπεια ούτε δεύτερος αριθμήσιμος

(β) Κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι $\mathscr{T}$-πυκνό στον X, κατά συνέπεια ο $(X, \mathscr{T})$ είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη: (α) Έστω, προς άτοπο, ότι για κάποιο σημείο $x \in X$, υπάρχει αριθμήσιμη βάση περιοχών $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του x. Αντικαθιστώντας το V_n με το V_n° αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα V_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοιχτά. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $X \setminus V_n$ είναι πεπερασμένο. Έπεται ότι το σύνολο $X \setminus (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus V_n)$ είναι αριθμήσιμο, και αφού το X είναι υπεραριθμήσιμο, συμπεραίνουμε ότι το $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ειδικότερα, υπάρχει $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ με $y \neq x$. Τότε το σύνολο $X \setminus \{y\}$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του x, που δεν περιέχει κανένα V_n, άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι κανένα σημείο του X δεν έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.

Παρατήρηση: Όμοια με το τελευταίο μέρος της απόδειξης προκύπτει και το εξής αποτέλεσμα: Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι T_1, τότε για οποιοδήποτε $x \in X$ και οποιαδήποτε βάση περιοχών $\{W_i : i \in I\}$ του x, ισχύει $\bigcap_{i\in I} W_i = \{x\}$.

(β) Έστω D ένα άπειρο υποσύνολο του X και U τυχόν μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του X. Τότε το $X \setminus U$ είναι πεπερασμένο, άρα είναι αδύνατο να περιέχει το D, επομένως $D \cap U \neq \emptyset$.

Συμπεραίνουμε ότι το D είναι πυκνό στον X. Επιλέγοντας το D να είναι άπειρο αριθμήσιμο, βλέπουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

13. (α) Αποδείξτε ότι γενικά σε έναν τοπολογικό χώρο, μια ακολουθία (ή ένα δίκτυο) μπορεί να συγκλίνει σε πολλά διαφορετικά όρια. Μπορείτε να βρείτε ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας στον χώρο $\mathbb{N}$ με τη συμπεπερασμένη τοπολογία;

(β) Αποδείξτε ότι αν ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T})$ είναι T_2, τότε κάθε συγκλίνον δίκτυο στον X έχει μοναδικό όριο.

Υπόδειξη: (α) Στον τοπολογικό χώρο $\mathbb{N}$ με τη συμπεπερασμένη τοπολογία θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n,\ n = 1, 2, \ldots$. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η (x_n) συγκλίνει στο m. Έστω U ανοιχτή περιοχή του m. Το $X \setminus U$ είναι πεπερασμένο, οπότε θεωρούμε το $n_0 = \max(X \setminus U)$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0 + 1$, έχουμε $x_n = n \in U$. Συμπεραίνουμε ότι, $x_n \to m$.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι ο τοπολογικός χώρος X είναι T_2 και έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, το οποίο συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια x και $y \in X$. Λόγω της ιδιότητας T_2, υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U του x και V του y με $U \cap V = \emptyset$. Αφού $x_\lambda \to x$, υπάρχει $\lambda_1 \in \Lambda$ με $x_\lambda \in U$, για κάθε $\lambda \geq \lambda_1$. Από την άλλη μεριά, αφού $x_\lambda \to y$, υπάρχει $\lambda_2 \in \Lambda$ με $x_\lambda \in V$, για κάθε $\lambda \geq \lambda_2$. Θεωρώντας $\lambda_0 \geq \lambda_1, \lambda_2$, θα έχουμε ότι $x_{\lambda_0} \in U \cap V$, άτοπο.

14. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την κλάση $\mathcal{C}$ των κλειστών διαστημάτων

$$\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

Εξετάστε αν η κλάση $\mathcal{C}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Θεωρώντας την $\mathcal{C}$ ως υποβάση, ποια είναι η τοπολογία που παράγει;

Υπόδειξη: Η κλάση $\mathcal{C}$ δεν είναι βάση τοπολογίας, αφού δεν έχει την ιδιότητα οι πεπερασμένες τομές των μελών της να γράφονται ως ενώσεις άλλων μελών της: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε $a < b < c \in \mathbb{R}$, ισχύει $[a, b] \cap [b, c] = \{b\}$ και δεν υπάρχει $B \in \mathcal{C}$ με $B \subseteq \{b\}$. Η προηγούμενη παρατήρηση αποδεικνύει επιπλέον ότι η τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{C}$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα, άρα είναι η διακριτή τοπολογία.

15. Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_S$ την ευθεία Sorgenfrey, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση των ημιανοιχτών διαστημάτων της μορφής $[a, b), a < b$.

(α) Αποδείξτε ότι στον $\mathbb{R}_S$ κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν η ακολουθία $x_n = -\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στον $\mathbb{R}_S$.

(γ) Στον χώρο γινόμενο $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. Αποδείξτε ότι $A' = \emptyset$, δηλαδή το A είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι μεμονωμένο σημείο.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι αν για μια ακολουθία (x_n) ισχύει $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}_S} x$, τότε ισχύει και $x_n \to x$ με τη συνήθη τοπολογία, αφού κάθε ανοιχτό διάστημα $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ είναι και $\mathbb{R}_S$ - ανοιχτό, δηλαδή είναι μια περιοχή του x στον $\mathbb{R}_S$. Αυτό σημαίνει ότι για να συγκλίνει μια ακολουθία στον $\mathbb{R}_S$ θα πρέπει να συγκλίνει στον $\mathbb{R}$ και, σε αυτή την περίπτωση, το μόνο πιθανό $\mathbb{R}_S$ - όριό της είναι το όριό της στον $\mathbb{R}$.

(α) Υποθέτουμε τώρα ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη και έστω $x_0 = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα δείξουμε ότι $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}_S} x_0$. Έστω U μια ανοιχτή περιοχή του x_0 στον $\mathbb{R}_S$. Τότε υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$ ώστε $[x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$. Από τον ορισμό του infimum, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $x_0 \leq x_{n_0} < x_0 + \varepsilon$. Αφού η (x_n) είναι φθίνουσα, έπεται ότι, για κάθε $n \geq n_0$, ισχύει $x_0 \leq x_n \leq x_{n_0} < x_0 + \varepsilon$, δηλαδή $x_n \in [x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$. Αφού η U ήταν τυχούσα ανοιχτή περιοχή του x_0, συμπεραίνουμε ότι $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}_S} x_0$.

(β) Έστω $x_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με την αρχική μας παρατήρηση, το μόνο πιθανό $\mathbb{R}_S$ - όριο της (x_n) είναι το 0. Όμως, η περιοχή $[0, 1)$ του 0 στον $\mathbb{R}_S$ δεν περιέχει κανέναν όρο της ακολουθίας, άρα η (x_n) δεν συγκλίνει στο 0 και έπεται ότι αποκλίνει.

(γ) Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, αφού το σύνολο A είναι κλειστό με την τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{R}^2$, είναι κλειστό και με την (ισχυρότερη) τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{R}_S^2$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε σημείο του A είναι μεμονωμένο σημείο του. Έστω $\mathbf{a} = (x_0, -x_0) \in A$. Είναι φανερό ότι η ανοιχτή περιοχή $[x_0, x_0 + 1) \times [-x_0, -x_0 + 1)$ του $\mathbf{a}$ στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ δεν τέμνει το $A \setminus \{\mathbf{a}\}$. Έπεται ότι το $\mathbf{a}$ είναι μεμονωμένο σημείο του A.

16. (α) Αποδείξτε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_S$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ αν και μόνο αν είναι δεξιά συνεχής ως συνάρτηση από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (δηλαδή: για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $a \leq x < a + \delta$, τότε $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$).

(β) Αποδείξτε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον $\mathbb{R}_S$ είναι οι σταθερές.

(γ) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x) = -x$ είναι συνεχής ως συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_S$ στον $\mathbb{R}_S$.

Υπόδειξη: (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεξιά συνεχής, $a \in \mathbb{R}$ και έστω $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ μια περιοχή του $f(a)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f\Big([a, a + \delta)\Big) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Αφού το $[a, a + \delta)$ είναι μια περιοχή του a στον $\mathbb{R}_S$, αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο a ως συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_S$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Αντίστροφα, αν η f είναι συνεχής στο a ως συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_S$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\mathbb{R}_S$ - περιοχή U του a με $f(U) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Αλλά κάθε $\mathbb{R}_S$ - περιοχή του a περιέχει κάποιο διάστημα της μορφής $[a, a + \delta)$, άρα $f\Big([a, a + \delta)\Big) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, από όπου έπεται ότι η f είναι δεξιά συνεχής στο a.

(β) Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι κάθε διάστημα $[a, b)$ της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}_S$ είναι clopen στον $\mathbb{R}_S$. Από την άλλη μεριά, στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, τα μόνα clopen σύνολα είναι ο $\mathbb{R}$ και το $\emptyset$. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to \mathbb{R}_S$ είναι οι σταθερές. Πράγματι, αν $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to \mathbb{R}_S$ συνεχής και υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < f(x_2)$, τότε το $[f(x_2), +\infty)$ είναι clopen στον $\mathbb{R}_S$, επομένως και το $A = f^{-1}\Big([f(x_2), +\infty)\Big)$ είναι clopen στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, άρα $A = \mathbb{R}$ ή $A = \emptyset$, άτοπο, αφού $x_1 \notin A$ ενώ $x_2 \in A$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή.

(γ) Δείχνουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}_S$ με $f(x) = -x$ δεν είναι συνεχής σε κανένα x. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία (x_n) με $x_n = x + \frac{1}{n}$ τείνει στο x, αλλά η $f(x_n) = -x - \frac{1}{n}$ δεν τείνει στο $f(x) = -x$ (Άσκηση 13 α,β).

17. Έστω $\mathscr{T}_{cf}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cf})$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Υπόδειξη: Έστω $f : (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cf}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεχής. Θα δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Με απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < f(x_2)$. Για τυχόν t με $f(x_1) < t < f(x_2)$ θέτουμε $A = f^{-1}\Big((t, +\infty)\Big)$ και $B = f^{-1}\Big((-\infty, t)\Big)$. Αφού η f είναι συνεχής, τα σύνολα A, B είναι ανοιχτά στον $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cf})$. Επιπλέον, τα A, B είναι μη κενά και ξένα. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το συμπλήρωμα του A θα είναι πεπερασμένο, άρα το B θα είναι πεπερασμένο (μη κενό) και ανοιχτό, το οποίο είναι αδύνατο στον $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cf})$.

18. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to S^1$ με $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Αποδείξτε ότι η f είναι $1-1$, επί του S^1 και συνεχής, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

Υπόδειξη: Η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} δεν είναι συνεχής στο σημείο $(1,0) \in S^1$, αφού η ακολουθία $x_n = \big(\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n})\big)$ συγκλίνει στο $(1,0) = f(0)$, αλλά η $f^{-1}(x_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει στο $f^{-1}\big((1,0)\big) = 0$.

19. Έστω $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ η επεκτατεμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία $\mathscr{T}_e$ που έχει ως υποβάση την κλάση όλων των συνόλων της μορφής $[-\infty, b) = \{-\infty\} \cup (-\infty, b)$ ή $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, αν $x \in \mathbb{R}$, $f(+\infty) = 1$ και $f(-\infty) = -1$, είναι ομοιομορφισμός.

(β) Αποδείξτε ότι ο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρικοποιήσιμος και βρείτε μία μετρική που επάγει την τοπολογία του.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι η τοπολογία $\mathscr{T}_e$ του $\overline{\mathbb{R}}$ έχει ως βάση την κλάση όλων των συνόλων της μορφής $[-\infty, b)$, $(a, +\infty]$ και (c, d), $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Ειδικότερα, ο περιορισμός της $\mathscr{T}_e$ στο $\mathbb{R}$ είναι η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}$.

(α) Αφού ο περιορισμός f_0 της f στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση $f_0 : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ με $f_0(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι $1-1$ και επί, έπεται ότι η f είναι $1-1$ και επί του $[-1, 1]$. Επιπλέον, η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η αντίστροφή της, $f^{-1} : [-1, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ με $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, αν $x \in (-1, 1)$, $f^{-1}(-\infty) = -1$ και $f^{-1}(+\infty) = 1$, είναι συνεχής σε κάθε $x \in (-1, 1)$. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $+\infty$ και στο $-\infty$ και η f^{-1} είναι συνεχής στο 1 και στο -1. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι, αν $0 < t < 1$, τότε $f\Big((\frac{t}{1-t}, +\infty]\Big) = (t, 1]$ και, αν $-1 < t < 0$, τότε $f\Big([-\infty, \frac{t}{1+t})\Big) = [-1, t)$.

(β) Έπεται από το (α). Μια μετρική στο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι η d με $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, για κάθε $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Παρατηρούμε ότι με αυτή τη μετρική είναι $\mathrm{diam}(\overline{\mathbb{R}}) = 2$.

20. Έστω $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ μετρικοί χώροι. Αποδείξτε (με βάση τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο) ότι η τοπολογία γινόμενο του $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ συμπίπτει με την τοπολογία που επάγεται στο X από τη μετρική d_∞ με $d_\infty\Big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\Big) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \ldots, \rho_n(x_n, y_n)\}$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει
$$B_{(X,d_\infty)}(x, \varepsilon) = B_{(X_1,\rho_1)}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B_{(X_n,\rho_n)}(x_n, \varepsilon).$$
Αυτό σημαίνει ότι κάθε d_∞ - ανοιχτό $U \subseteq X$ γράφεται ως ένωση ανοιχτών συνόλων της βάσης της τοπολογίας γινόμενο και άρα είναι ανοιχτό στην τοπολογία γινόμενο και, αντίστροφα, κάθε ανοιχτό στην τοπολογία γινόμενο $V \subseteq X$ γράφεται ως ένωση d_∞ - ανοιχτών μπαλών και άρα είναι d_∞ - ανοιχτό.

21. (α) Έστω Y ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathscr{T} = \{U \subseteq Y : Y \setminus U \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}$ η συναριθμήσιμη τοπολογία στο Y. Έστω $x \in Y$. Αποδείξτε ότι $x \in \overline{Y \setminus \{x\}}$, αλλά δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in N}$ στο $Y \setminus \{x\}$ με $x_n \to x$.

(β) Έστω X ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος (δηλαδή κάθε σημείο του X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών). Αποδείξτε ότι, για κάθε $A \subseteq X$, ισχύει η ισοδυναμία:
$$x \in \overline{A} \iff \text{υπάρχει ακολουθία } (x_n) \text{ στο } A \text{ με } x_n \to x.$$
Έπεται ότι αν ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος, τότε η τοπολογία του προσδιορίζεται από τις συγκλίνουσες ακολουθίες.

Υπόδειξη: (α) Έστω U ανοιχτή περιοχή του x. Τότε το U είναι άπειρο σύνολο, άρα σίγουρα $U \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Έπεται ότι $x \in \overline{Y \setminus \{x\}}$. Από την άλλη μεριά, αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο $Y \setminus \{x\}$, τότε η ανοιχτή περιοχή $U = Y \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του x δεν περιέχει κανένα x_n, άρα η (x_n) δεν συγκλίνει στο x (γενικότερα στον Y ισχύει ότι οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες είναι οι τελικά σταθερές).

(β) Έστω X ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος. Θα αποδείξουμε ότι:
$x \in \overline{A} \iff$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$.

Η κατεύθυνση ($\Longleftarrow$) ισχύει σε κάθε τοπολογικό χώρο: Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$, τότε κάθε ανοιχτή περιοχή U του x περιέχει όρους της x_n, δηλαδή στοιχεία του A, άρα $x \in \overline{A}$.

Απόδειξη της ($\Longrightarrow$): Έστω $x \in \overline{A}$. Αφού ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος, υπάρχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του σημείου x. Θέτοντας, για κάθε n, $V_n = W_1 \cap \ldots \cap W_n$, περνάμε σε μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ που είναι βάση περιοχών του x. Αφού $x \in \overline{A}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $V_n \cap A \neq \emptyset$ και επιλέγουμε $x_n \in V_n \cap A$. Η ακολουθία (x_n) που κατασκευάζουμε με αυτόν τον τρόπο συγκλίνει στο x: Πράγματι, αν U είναι μια περιοχή του x, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $V_{n_0} \subseteq U$ και, αφού η ακολουθία (V_n) είναι φθίνουσα, παίρνουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$, $x_n \in V_n \subseteq V_{n_0} \subseteq U$. Συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$.

Έπεται ότι, αν ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος, τότε οι συγκλίνουσες ακολουθίες του X προσδιορίζουν τα κλειστά σύνολα άρα και την τοπολογία του.