Τοπολογία
4η Σειρά Ασκήσεων
Διαχωριστικά Αξιώματα - Λήμμα Urysohn
Θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn

29. Έστω X τοπολογικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι κανονικός (T_3), τότε κάθε δύο διαφορετικά σημεία του έχουν περιοχές των οποίων οι κλειστές θήκες είναι ξένες.

(β) Αν ο X είναι φυσιολογικός (T_4), τότε κάθε δύο ξένα κλειστά υποσύνολά του περιέχονται σε ανοιχτά σύνολα των οποίων οι κλειστές θήκες είναι ξένες.

Υπόδειξη: (α) Υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι T_3 και έστω $x \neq y$ δύο σημεία του. Αφού κάθε T_3 χώρος είναι T_2, υπάρχουν U, V ανοιχτά υποσύνολα του X με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Σύμφωνα με γνωστό μας χαρακτηρισμό των T_3 χώρων, υπάρχει W περιοχή του x με $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Όμως $\overline{V} \subseteq X \setminus U$ άρα $\overline{W} \cap \overline{V} = \emptyset$.

(β) Ανάλογα με το (α): Υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι T_4. Αν τα $A, B \subseteq X$ είναι κλειστά και ξένα, τότε υπάρχουν U, V ανοιχτά και ξένα υποσύνολα του X με $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$. Σύμφωνα με γνωστό μας χαρακτηρισμό των T_4 χώρων, υπάρχει $W \subseteq X$ ανοιχτό με $A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Έπεται ότι $\overline{W} \cap \overline{V} = \emptyset$.

30. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν ο Y είναι χώρος Hausdorff (T_2), αποδείξτε ότι το σύνολο $K = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.

Υπόδειξη: Θα δείξουμε ότι το σύνολο $X \setminus K = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ είναι ανοιχτό. Έστω $x \in X \setminus K$. Τότε $f(x) \neq g(x)$ και αφού ο Y είναι T_2 χώρος υπάρχουν U, V ανοιχτά υποσύνολα του Y με $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Τότε το σύνολο $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και αν $z \in W$, τότε $f(z) \neq g(z)$, άρα $W \subseteq X \setminus K$. Συμπεραίνουμε ότι το $X \setminus K$ είναι ανοιχτό.

31. Έστω X 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και S ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολό του. Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων του S που είναι σημεία συσσώρευσης του S είναι υπεραριθμήσιμο. Ειδικότερα, ο X δεν περιέχει κανένα υπεραριθμήσιμο διακριτό υποσύνολο.

Υπόδειξη: Έστω $(B_n)_{n \in \mathbb{N}0}$ μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X. Έστω S ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι το σύνολο $S \cap S'$ των σημείων του S που είναι σημεία συσσώρευσής του είναι το πολύ αριθμήσιμο, οπότε το $S \setminus S'$ είναι υπεραριθμήσιμο και αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Τότε, για κάθε $x \in S \setminus S'$, υπάρχει βασική ανοιχτή περιοχή B_{n_x} με $B_{n_x} \cap S = \{x\}$. Έπεται ότι η απεικόνιση $\phi : S \setminus S' \to \mathbb{N}$ με $\phi(x) = n_x$ είναι $1-1$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το $S \setminus S'$ είναι υπεραριθμήσιμο. Συμπεραίνουμε ότι το $S \setminus S'$, δηλαδή το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του S είναι το πολύ αριθμήσιμο.

32. Αποδείξτε ότι κάθε άπειρος χώρος Hausdorff περιέχει έναν άπειρο υπόχωρο του οποίου η σχετική τοπολογία είναι η διακριτή.

Υπόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανοιχτών μη κενών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$ να είναι άπειρο και $U_{n+1} \subseteq X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$.

Βασικό βήμα : Αποδεικνύουμε ότι για κάθε άπειρο χώρο Hausdorff Y υπάρχει ένα ανοιχτό μη κενό υποσύνολό του U τέτοιο ώστε το $Y \setminus \overline{U}$ να είναι άπειρο: Επιλέγουμε οποιοδήποτε ανοιχτό μη κενό υποσύνολο V του Y με $Y \setminus \overline{V} \neq \emptyset$ – υπάρχει τέτοιο V αφού ο Y είναι Hausdorff. Αν το $Y \setminus \overline{V}$ είναι άπειρο, έχουμε τελειώσει. Αν το $Y \setminus \overline{V}$ είναι πεπερασμένο, τότε είναι κλειστό – αφού ο Y είναι T_1, αλλά είναι και ανοιχτό, οπότε θέτοντας $U = Y \setminus \overline{V}$ έχουμε $Y \setminus \overline{U} = Y \setminus U = \overline{V}$, οπότε το $Y \setminus \overline{U}$ είναι άπειρο.

Επαγωγική επιλογή της ακολουθίας (U_n): Σύμφωνα με το βασικό βήμα, για $n = 1$ μπορούμε να βρούμε ανοιχτό μη κενό U_1 με το $X \setminus \overline{U_1}$ να είναι άπειρο. Αν τα $U_1, \ldots, U_n$ έχουν επιλεγεί ώστε το $Y = x \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$ να είναι άπειρο, θέτουμε $Y = x \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$ και, σύμφωνα με το βασικό βήμα, μπορούμε να βρούμε $U_{n+1} \subseteq Y$, ανοιχτό (στον Y), μη κενό, με το $Y \setminus \mathrm{cl}_Y(U_{n+1})$ να είναι άπειρο. Αφού το Y είναι ανοιχτό στον X, το U_{n+1} είναι ανοιχτό στον X. Επιπλέον, ισχύει $\mathrm{cl}_Y(U_{n+1}) = \overline{U}_{n+1} \cap Y$, οπότε $Y \setminus \mathrm{cl}_Y(U_{n+1}) = Y \setminus \overline{U}_{n+1} = X \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{U}_k$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Τέλος, επιλέγοντας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U_n$, ο υπόχωρος $Z = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του X, έχει τη διακριτή τοπολογία.

33. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός T_4 χώρου είναι T_4.

(β) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι T_4, ο Y είναι T_1 και υπάρχει απεικόνιση $f : X \to Y$ συνεχής, κλειστή και επί του Y, τότε ο Y είναι T_4.

Υπόδειξη: (α) Έστω X T_4 χώρος και Y κλειστός υπόχωρος του X. Έστω $A, B \subseteq Y$ κλειστά στον Y και ξένα. Υπάρχουν τότε F, K κλειστά υποσύνολα του X με $A = Y \cap F$, $B = Y \cap K$. Αφού το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X, τα A, B είναι κλειστά στον X, άρα υπάρχουν U, V ανοικτά στον X και ξένα με $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, οπότε τα $U \cap Y$, $V \cap Y$ είναι ανοικτά στον Y και διαχωρίζουν τα A, B.

(β) Έστω X T_4 χώρος, Y T_1 χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής, κλειστή και επί του Y. Έστω $A, B \subseteq Y$ κλειστά και ξένα. Τότε τα $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ είναι ξένα υποσύνολα του X και κλειστά, αφού η f είναι συνεχής. Αφού ο X είναι T_4 υπάρχουν U, V ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X με $f^{-1}(A) \subseteq U$ και $f^{-1}(B) \subseteq V$. Τότε τα $f(X \setminus U)$ και $f(X \setminus V)$ είναι κλειστά υποσύνολα του Y, αφού η f είναι κλειστή, και θέτοντας $G = Y \setminus f(X \setminus U)$, $W = Y \setminus f(X \setminus V)$ έχουμε ότι $A \subseteq G$, $B \subseteq W$, τα G, W είναι ανοικτά και ξένα (ελέγξτε το). Συμπεραίνουμε ότι ο Y είναι T_4.

34. Όπως ξέρουμε, ένας υπόχωρος ενός T_4 χώρου μπορεί να μην είναι T_4 και το καρτεσιανό γινόμενο T_4 χώρων μπορεί να μην είναι T_4. Από την άλλη μεριά, αποδείξτε ότι ισχύει το εξής: Αν ο χώρος γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι T_4, τότε και κάθε X_i είναι T_4.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι το γινόμενο $\prod\limits_{i\in I} X_i$ είναι χώρος T_4. Έστω $i_0 \in I$. Θα δείξουμε ότι ο X_{i_0} είναι T_4. Κατ' αρχάς, αφού ο $\prod\limits_{i\in I} X_i$ είναι T_1 ισχύει και ότι κάθε χώρος X_i είναι T_1. Σταθεροποιούμε ένα $(y_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} X_i$. Έπεται ότι ο υπόχωρος $Z = X_{i_0} \times \prod\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \{y_i\}$ είναι κλειστός στον $\prod_{i\in I} X_i$ ως γινόμενο κλειστών συνόλων. Επίσης, ο Z είναι ομοιομορφικός με τον X_{i_0}. Επιπλέον, ο Z είναι T_4 ως κλειστός υπόχωρος T_4 χώρου. Συμπεραίνουμε ότι ο X_{i_0} είναι T_4.

35. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $(U_r)_{r\in D}$ που ορίσαμε στην απόδειξη του Λήμματος του Urysohn και την αντίστοιχη συνάρτηση f. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0,1)$, ισχύει:

$$f^{-1}\big(\{x\}\big) = \bigcap_{r\in D,\, r>x} U_r \setminus \bigcup_{s\in D,\, s<x} U_s\,.$$

Υπόδειξη: Από τον ορισμό της f, για κάθε $z \in U_1 = X \setminus B$, είναι $f(z) = \inf\{r \in D : z \in U_r\}$, ενώ $f(z) = 1$, αν $z \in B$. Επιπλέον ισχύει ότι $U_r \subseteq U_s$, για κάθε $0 \le r < s \le 1$.
Θεωρούμε λοιπόν $t \in [0,1)$. Αν $z \in X$ με $f(z) = t$, τότε: $\forall r > t\ z \in U_r$, άρα $z \in \bigcap_{r\in D,\, r>t} U_r$, ενώ $\forall s < t\ z \notin U_s$, άρα $z \notin \bigcup_{s\in D,\, s<t} U_s$. Συμπεραίνουμε ότι $f^{-1}\big(\{t\}\big) \subseteq \bigcap_{r\in D,\, r>t} U_r \setminus \bigcup_{s\in D,\, s<t} U_s$.
Αντίστροφα, έστω $z \in \bigcap_{r\in D,\, r>t} U_r \setminus \bigcup_{s\in D,\, s<t} U_s$. Τότε $z \in \bigcap_{r\in D,\, r>t} U_r$, άρα $\inf\{r \in D : z \in U_r\} \le t$ και $z \notin \bigcup_{s\in D,\, s<t} U_s$, άρα κάθε $s < t$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{r \in D : z \in U_r\}$, επομένως $t \le \inf\{r \in D : z \in U_r\}$ και συμπεραίνουμε ότι $t = \inf\{r \in D : z \in U_r\} = f(z)$, δηλαδή $z \in f^{-1}\big(\{t\}$. Άρα $\bigcap_{r\in D,\, r>t} U_r \setminus \bigcup_{s\in D,\, s<t} U_s \subseteq f^{-1}\big(\{t\}\big)$.

36. Δώστε μια άμεση απόδειξη του Λήμματος του Urysohn για μετρικούς χώρους (X,d), θεωρώντας τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)},$$

όπου $d(x,C) = \inf\{d(x,c) : c \in C\}$, για κάθε $x \in X$ και $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$.
Υπόδειξη: Για κάθε $C \subseteq X$, η συνάρτηση $\phi_C : X \to \mathbb{R}$ με $\phi_C(x) = d(x,C)$ είναι συνεχής και $\phi_C(x) = 0 \iff x \in \overline{C}$. Έπεται ότι, αν τα $A, B \subseteq X$ είναι κλειστά και ξένα, τότε η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Τα υπόλοιπα ελέγχονται άμεσα.

37. Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται σύνολο G_δ αν ισούται με την τομή μιας ακολουθίας ανοιχτών συνόλων, δηλαδή $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, όπου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $G_n \subseteq X$ είναι ανοιχτό. Αποδείξτε τα ακόλουθα:
(α) Αν ο X είναι 1ος αριθμήσιμος και T_1 τοπολογικός χώρος, τότε τα μονοσύνολα του X είναι G_δ σύνολα.
(β) Έστω X T_4 χώρος και A υποσύνολο του X. Το A είναι κλειστό και G_δ αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ τέτοια ώστε $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$.
Υπόδειξη: (α) Έστω X 1ος αριθμήσιμος και T_1 χώρος και έστω $x \in X$. Αν $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του x με U_n ανοικτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{x\}$. Πράγματι, είναι φανερό ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Επιπλέον, αφού ο X είναι T_1, αν $y \neq x$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $y \notin U_{n_0}$, άρα $y \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.
(β) Έστω X T_4 χώρος και $A \subseteq X$. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $f : X \to [0,1]$ συνεχής με $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Τότε, αφού $A = f^{-1}(\{0\})$ και η f είναι συνεχής, το A είναι κλειστό. Επίσης, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left([0, \frac{1}{n})\right)$, άρα το A είναι και G_δ.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό και G_δ, δηλαδή $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ όπου κάθε G_n είναι ανοικτό. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_n = X \setminus G_n$. Τα A και F_n είναι κλειστά σύνολα και ξένα, άρα, σύμφωνα με το Λήμμα του Urysohn, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_n : X \to [0,1]$ με $f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in F_n$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f. Αφού κάθε f_n είναι συνεχής και η σύγκλιση της σειράς είναι ομοίμορφη, έπεται ότι η f είναι συνεχής. Επιπλέον, για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = 0$, ενώ αν $x \notin A$ τότε υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ με $x \notin G_{n_x}$, άρα $x \in F_{n_x}$, οπότε $f(x) \geq \frac{1}{2^{n_x}} f_{n_x}(x) = \frac{1}{2^{n_x}} > 0$. Συμπεραίνουμε ότι $\{x \in X : f(x) = 0\} = A$.

38. Δώστε παράδειγμα ενός 2ου αριθμήσιμου χώρου Hausdorff που δεν είναι μετρικοποιήσιμος.
Υπόδειξη: Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία $\mathscr{T}$ που έχει ως υποβάση την κλάση που αποτελείται από όλα τα ανοιχτά διαστήματα και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

39. Θα δείξουμε ότι το επίπεδο του Sorgenfrey $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ δεν είναι φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος, παρουσιάζοντας δύο κλειστά και ξένα υποσύνολά του, τα οποία δεν διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Έχουμε δει ότι το σύνολο $L = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστό και διακριτό στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε υποσύνολο του L είναι κλειστό στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

(β) Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Q}\} \ \text{ και } \ B = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

τα οποία, σύμφωνα με το (α), είναι κλειστά στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ και ξένα. Έστω V ένα τυχόν ανοικτό συύνολο που περιέχει το B. Θα αποδείξουμε ότι $A \cap \overline{V} \neq \emptyset$, το οποίο συνεπάγεται ότι κάθε ανοικτό U που περιέχει το A, θα τέμνει το V (εξηγήστε την τελευταία συνεπαγωγή). Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left[x, x + \frac{1}{n}\right) \times \left[-x, -x + \frac{1}{n}\right) \subseteq V \right\}.$$

Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Baire για να συμπεράνετε ότι υπάρχει κάποιος $n_0 \in \mathbb{N}$ και κάποιο διάστημα (a, b) ώστε $(a, b) \subseteq \overline{K}_{n_0}$.

(ii) Αποδείξτε ότι το V περιέχει το ανοικτό παραλληλόγραμμο

$$R = \bigcup_{x \in (a,b)} \left[\{x\} \times \left(-x, -x + \frac{1}{n_0} \right) \right].$$

(iii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$, το $(q, -q) \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του V.