Τοπολογία

1η Σειρά Ασκήσεων

Βασικές έννοιες της Τοπολογίας

1. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν d τυχούσα μετρική στο X, τότε $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_d$.
(β) Αν X πεπερασμένο, τότε $\mathscr{T} = \mathcal{P}(X) =$ η διακριτή τοπολογία.
(γ) Αν X άπειρο, τότε ο $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

2. Αποδείξτε ότι καθένα από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι μια τοπολογία στο $\mathbb{N}$.
Το $\mathscr{T}_1$ αποτελείται από τα $\emptyset, \mathbb{N}$ και κάθε αρχικό διάστημα $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 1$ (τοπολογία αρχικών διαστημάτων).
(β) Το $\mathscr{T}_2$ αποτελείται από τα $\emptyset, \mathbb{N}$ και κάθε τελικό διάστημα $J_n = \{n, n+1, \ldots\}$, $n \geq 1$ (τοπολογία τελικών διαστημάτων).

3. Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathscr{T}$ μια τοπολογία στο X ώστε το μόνο άπειρο ανοιχτό υποσύνολο του X είναι ο ίδιος ο X. Είναι τότε η $\mathscr{T}$ η τετριμμένη τοπολογία στο X;

4. Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathscr{T}$ τοπολογία στο X ώστε κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι μέλος της $\mathscr{T}$. Αποδείξτε ότι η $\mathscr{T}$ είναι η διακριτή τοπολογία στο X.

5. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα , $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι:
(α) $\overline{B(x,\varepsilon)} = \widehat{B}(x,\varepsilon)$.
(β) $\mathrm{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right) = B(x,\varepsilon)$.
(γ) $\mathrm{bd}\,(B(x,\varepsilon)) = S(x,\varepsilon)$.

6. Αποδείξτε με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι τα συμπεράσματα της προηγούμενης άσκησης δεν ισχύουν κατ' ανάγκη σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο X.

7. Αποδείξτε ότι, αν ένας τοπολογικός χώρος είναι μετρικοποιήσιμος, τότε υπάρχουν άπειρες διαφορετικές μετρικές που ορίζουν την τοπολογία του.

8. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T})$ λέγεται χώρος T_1 αν, για κάθε $x \neq y \in X$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_x του x με $y \notin U_x$ και υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_y του y με $x \notin U_y$.
(α) Αποδείξτε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι T_1 αν και μόνο αν τα πεπερασμένα υποσύνολα του X είναι κλειστά.
(β) Έστω $(X, \mathscr{T})$ χώρος T_1, $A \subseteq X$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι κάθε ανοιχτή περιοχή U του x_0 περιέχει άπειρα σημεία του A. Ειδικότερα, σε κάθε T_1 χώρο, τα πεπερασμένα σύνολα δεν έχουν σημεία συσσώρευσης.
(γ) Έστω $(X, \mathscr{T})$ χώρος T_1 και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης του A είναι κλειστό.

(δ) Θεωρούμε το σύνολο $X = [-1,1]$ με την τοπολογία $\mathscr{T}$, όπου

$$\mathscr{T} = \Big\{\emptyset, [-1,1]\Big\} \cup \Big\{[-1,b) \;\Big|\; 0 < b \leq 1\Big\} \cup \Big\{(a,1] \;\Big|\; -1 \leq a < 0\Big\} \cup \Big\{(a,b) \;\Big|\; -1 \leq a < 0 < b \leq 1\Big\},$$

η οποία ονομάζεται τοπολογία των επικαλυπτόμενων διαστημάτων στο $[-1,1]$.
(i) Αποδείξτε ότι η κλάση $\mathscr{T}$ είναι πράγματι τοπολογία και ότι ο χώρος $(X,\mathscr{T})$ δεν είναι T_1 χώρος.
(ii) Αν $A = \{0\}$, βρείτε το A' και δείξτε ότι δεν είναι κλειστό.

9. Έστω X ένας 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ μια άλλη βάση για την τοπολογία του X. Αποδείξτε ότι:
(α) Για κάθε ανοιχτό σύνολο G του X υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο M_G του I, ώστε $G = \bigcup_{i\in M_G} U_i$.
(β) Υπάρχει μια αριθμήσιμη υποοικογένεια $(U_i)_{i\in M}$ της $(U_i)_{i\in I}$ που είναι βάση για την τοπολογία του X.

10. (**Ο χώρος του Cantor**) Θεωρούμε το σύνολο $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών με όρους 0 ή 1. Θα ορίσουμε μια τοπολογία στο X, περιγράφοντας μια βάση για αυτή την τοπολογία: Θεωρούμε το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών με όρους 0 ή 1, δηλαδή το $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{0,1\}^n$. Για κάθε $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{0,1\}^n$, συμβολίζουμε με $N_{\mathbf{a}}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών $\mathbf{x} \in X$ που οι n πρώτοι όροι τους συμπίπτουν με αυτούς του $\mathbf{a}$, δηλαδή

$$N_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots) \in X \;:\; x_1 = a_1,\ldots,x_n = a_n\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{B} = \{N_{\mathbf{a}} : a \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{0,1\}^n\}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο X. Συμβολίζουμε αυτή την τοπολογία με $\mathscr{T}_C$ και ο τοπολογικός χώρος $(X,\mathscr{T})$ ονομάζεται χώρος του Cantor. Επομένως, αν $G \subseteq X$, τότε

$$G \in \mathscr{T}_C \iff \text{για κάθε } \mathbf{x} \in G, \text{ υπάρχει } n \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } N_{[\mathbf{x}|n]} \subseteq G,$$

όπου $[\mathbf{x}|n]$ είναι το αρχικό τμήμα μήκους n του $\mathbf{x}$, δηλαδή αν $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots)$, τότε $[\mathbf{x}|n] = (x_1,\ldots,x_n)$.
(β) Αποδείξτε ότι κάθε στοιχείο της βάσης $\mathcal{B}$ είναι clopen. Αποδείξτε ακόμη ότι ο χώρος του Cantor είναι T_2 και 2ος αριθμήσιμος.
(γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, αν $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2^n}$, αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ και n είναι ο μικρότερος φυσικός με $x_n \neq y_n$.
Αποδείξτε ότι η d είναι μετρική στο X και ότι η τοπολογία που επάγεται από την d συμπίπτει με την $\mathscr{T}_C$.

11. (**Η τοπολογία του Fürstenberg**) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων θεωρούμε την τοπολογία $\mathscr{T}$ που έχει ως βάση την κλάση των συνόλων της μορφής

$$N_{a,k} = \{a + nk : n \in \mathbb{Z}\}, \text{ για οποιαδήποτε } a \in \mathbb{Z} \text{ και } k \in \mathbb{N}.$$

(α) Παρατηρήστε ότι για δεδομένα $a \in \mathbb{Z}$ και $k \in \mathbb{N}$, το σύνολο $N_{a,k}$ είναι η κλάση ισοτιμίας του $a \bmod k$, επομένως ισχύουν τα εξής:

$$\text{(i)}\;\; x \in N_{a,k} \Longleftrightarrow k \mid (x-a) \Longleftrightarrow N_{a,k} = N_{x,k}.$$

$$\text{(ii)}\; \mathbb{Z} = \bigcup_{r=0}^{k-1} N_{a+r,k} \text{ και τα σύνολα σε αυτή την ένωση είναι ξένα ανά δύο.}$$

Στη συνέχεια, δείξτε ότι η κλάση $\mathcal{B} = \{N_{a,k} : a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{Z}$, την οποία συμβολίζουμε με $\mathscr{T}$. Επομένως, αν $G \subseteq \mathbb{Z}$, τότε ισχύει:

$$G \in \mathscr{T} \iff \text{ για κάθε } x \in G,\ \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N},\ \text{με } N_{x,k} \subseteq G.$$

(β) Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο είναι άπειρο και ότι κάθε σύνολο της βάσης $\mathcal{B}$ είναι clopen. Αποδείξτε ακόμη ότι ο χώρος $(\mathbb{Z}, \mathscr{T})$ είναι T_2.

(γ) Ο Fürstenberg όρισε αυτή την τοπολογία για να δώσει μια νέα απόδειξη για την απειρία των πρώτων αριθμών. Πράγματι: Αν υποθέσουμε ότι το σύνολο P των πρώτων αριθμών είναι πεπερασμένο, τότε γράφοντας

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in P} N_{0,p},$$

καταλήγουμε σε άτοπο. Εξηγήστε γιατί.

(δ) Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(n!)$ συγκλινει στο 0 με την $\mathscr{T}$.

(ε*) Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $(\mathbb{Z}, \mathscr{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος. Μπορείτε να βρείτε μια μετρική στο $\mathbb{Z}$ που επάγει την τοπολογία $\mathscr{T}$;