

Τοπολογία
2η Σειρά Ασκήσεων

Βασικές έννοιες, ακολουθίες και δίκτυα, συνεχείς συναρτήσεις

12. Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και \mathcal{T} η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X . Αποδείξτε ότι:

- (α) Ο χώρος (X, \mathcal{T}) δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος, κατά συνέπεια ούτε δεύτερος αριθμήσιμος.
- (β) Κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι \mathcal{T} -πυκνό στον X , κατά συνέπεια ο (X, \mathcal{T}) είναι διαχωρίσιμος.

- 13.** (α) Αποδείξτε ότι γενικά σε έναν τοπολογικό χώρο, μια ακολουθία (ή ένα δίκτυο) μπορεί να συγκλίνει σε πολλά διαφορετικά όρια. Μπορείτε να βρείτε ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας στον χώρο \mathbb{N} με τη συμπεπερασμένη τοπολογία;
- (β) Αποδείξτε ότι ο τοπολογικός χώρος (X, \mathcal{T}) είναι T_2 , τότε κάθε συγκλίνον δίκτυο στον X έχει μοναδικό όριο.

14. Στο \mathbb{R} θεωρούμε την κλάση \mathcal{C} των κλειστών διαστημάτων

$$\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Εξετάστε αν η κλάση \mathcal{C} είναι βάση για κάποια τοπολογία στο \mathbb{R} . Θεωρώντας την \mathcal{C} ως υποβάση, ποια είναι η τοπολογία που παράγει;

15. Συμβολίζουμε με \mathbb{R}_S την ευθεία Sorgenfrey, δηλαδή το σύνολο \mathbb{R} με την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση των ημιανοιχτών διαστημάτων της μορφής $[a, b)$, $a < b$.

- (α) Αποδείξτε ότι στον \mathbb{R}_S κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
- (β) Εξετάστε αν η ακολουθία $x_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στον \mathbb{R}_S .
- (γ) Στον χώρο γινόμενο $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. Αποδείξτε ότι $A' = \emptyset$, δηλαδή το A είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι μεμονωμένο σημείο.

16. (α) Αποδείξτε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως συνάρτηση από τον \mathbb{R}_S στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ αν και μόνο αν είναι δεξιά συνεχής ως συνάρτηση από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (δηλαδή: για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $a \leq x < a + \delta$, τότε $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$).

- (β) Αποδείξτε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον \mathbb{R}_S είναι οι σταθερές.
- (γ) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x) = -x$ είναι συνεχής ως συνάρτηση από τον \mathbb{R}_S στον \mathbb{R}_S .

17. Έστω \mathcal{T}_{cf} η συμπεπερασμένη τοπολογία στο \mathbb{R} . Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

18. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ με $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1, επί του S^1 και συνεχής, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

19. Έστω $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ η επεκτατεμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία \mathcal{T}_e που έχει ως υποβάση την κλάση όλων των συνόλων της μορφής $[-\infty, b) = \{-\infty\} \cup (-\infty, b)$ ή $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, αν $x \in \mathbb{R}$, $f(+\infty) = 1$ και $f(-\infty) = -1$, είναι ομοιομορφισμός.

(β) Αποδείξτε ότι ο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι μετριοποιήσιμος και βρείτε μία μετρική που επάγει την τοπολογία του.

20. Έστω $(X_1, \rho_1), \dots, (X_n, \rho_n)$ μετρικοί χώροι. Αποδείξτε (με βάση τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο) ότι η τοπολογία γινόμενο του $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ συμπίπτει με την τοπολογία που επάγεται στο X από τη μετρική d_∞ με $d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \dots, \rho_n(x_n, y_n)\}$.

21. (α) Έστω Y ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{T} = \{U \subseteq Y : Y \setminus U \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}$ η συναριθμήσιμη τοπολογία στο Y . Έστω $x \in Y$. Αποδείξτε ότι $x \in \overline{Y \setminus \{x\}}$, αλλά δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $Y \setminus \{x\}$ με $x_n \rightarrow x$.

(β) Έστω X ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος (δηλαδή κάθε σημείο του X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών). Αποδείξτε ότι, για κάθε $A \subseteq X$, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x \in \overline{A} \iff \text{υπάρχει ακολουθία } (x_n) \text{ στο } A \text{ με } x_n \rightarrow x.$$

Έπεται ότι αν ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος, τότε η τοπολογία του προσδιορίζεται από τις συγκλίνουσες ακολουθίες.