Τοπολογία
5η Σειρά Ασκήσεων
Συμπάγεια και συνεκτικότητα

40. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση για την τοπολογία του. Αποδείξτε ότι: Ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε κάλυμμα του X από μέλη της βάσης $\mathcal{B}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

41. Έστω X σύνολο και $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ δύο διαφορετικές τοπολογίες στο X με την ιδιότητα καθένας από τους τοπολογικούς χώρους $(X, \mathscr{T})$ και $(X, \mathscr{T}')$ να είναι συμπαγής και Hausdorff. Αποδείξτε ότι οι $\mathscr{T}$ και $\mathscr{T}'$ δεν συγκρίνονται, δηλαδή καμία από τις δύο δεν είναι ισχυρότερη της άλλης.

42. Εξετάστε αν το διάστημα $[0, 1]$ είναι συμπαγές ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με καθεμιά από τις ακόλουθες τοπολογίες:

(α) Τη συναριθμήσιμη τοπολογία

$$\mathscr{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} : \text{ το } \mathbb{R} \setminus U \text{ είναι το πολύ αριθμήσιμο } \} \cup \{\emptyset\}.$$

(β) Την τοπολογία Sorgenfrey $\mathscr{T}_S$.

43. (α) Έστω X τοπολογικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X η οποία συγκλίνει σε ένα $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ είναι συμπαγές.

(β) Εξετάστε αν ισχύει συμπέρασμα ανάλογο του (α), αν στη θέση της ακολουθίας έχουμε ένα συγκλίνον δίκτυο.

44. Έστω X, Y χώροι Hausdorff, $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση και F_n, $n \in \mathbb{N}$, φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f\left(F_n\right)$.

45. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι με τον Y συμπαγή και $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι αν το V είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $X \times Y$ με $\{x_0\} \times Y \subseteq V$, τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή W του x_0 στον X τέτοια ώστε $W \times Y \subseteq V$.

46. Θεωρούμε την ευθεία του Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$. Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}_S$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία.

47. Έστω X τοπολογικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X. Ένα $x_0 \in X$ λέγεται *οριακό σημείο* της ακολουθίας (x_n), αν, για κάθε περιοχή U του x_0 και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $m \geq n$ με $x_m \in U$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν ο X είναι 1ος αριθμήσιμος και το $x_0 \in X$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n), τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) που συγκλίνει στο x_0.

(β) Αν ο X είναι συμπαγής, τότε κάθε ακολουθία στον X έχει ένα τουλάχιστον οριακό σημείο.

(γ) Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *ακολουθιακά συμπαγής* αν κάθε ακολουθία στον X έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του X. Έπεται από τα (α) και (β) ότι αν ένας 1ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής, τότε είναι και ακολουθιακά συμπαγής.

(δ) Το αντίστροφο του (γ) δεν ισχύει. Ισχύει όμως το εξής: Αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι ακολουθιακά συμπαγής, τότε είναι *αριθμήσιμα συμπαγής*, δηλαδή κάθε *αριθμήσιμο* ανοιχτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(ε) Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένας *μετρικός χώρος* είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι ακολουθιακά συμπαγής.

48. Δίνουμε ένα παράδειγμα ενός τοπολογικού χώρου που είναι ακολουθιακά συμπαγής, αλλά όχι συμπαγής:
Έστω Γ ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Θεωρούμε τον υπόχωρο S του $[0,1]^\Gamma$ που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : \Gamma \to [0,1]$ που έχουν αριθμήσιμο φορέα (δηλαδή το σύνολο $\mathrm{supp}(f) = \{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο). Αποδείξτε ότι το S είναι ακολουθιακά συμπαγές. Επιπλέον, αποδείξτε ότι το S είναι πυκνό στον $[0,1]^\Gamma$, επομένως δεν είναι κλειστό, άρα ούτε και συμπαγές υποσύνολο του $[0,1]^\Gamma$.

49. (α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι 2ος αριθμήσιμος.

(β) Δώστε παράδειγμα ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου που δεν είναι 2ος αριθμήσιμος.

50. Αποδείξτε ότι ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff με τουλάχιστον δύο σημεία δεν είναι συνεκτικό.

51. Αποδείξτε ότι ο κύκλος $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ δεν είναι ομοιομορφικός με κανένα από τα διαστήματα $[0,1]$, $(0,1)$ ή $[0,1)$.

52. Έστω $f : S^1 \to \mathbb{R}$ συνεχής απεικόνιση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in S^1$ με $f(x) = f(-x)$.

53. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *κατά τόξα συνεκτικός* αν, για κάθε ζευγάρι σημείων $x, y \in X$, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to X$ με $f(0) = x$ και $f(1) = y$ (δηλαδή υπάρχει συνεχής διαδρομή από το x στο y).

(α) Αποδείξτε ότι αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε είναι και συνεκτικός.

(β) Αποδείξτε ότι ένας χώρος μπορεί να είναι συνεκτικός χωρίς να είναι κατά τόξα συνεκτικός, θεωρώντας το παράδειγμα του υποχώρου Y του $\mathbb{R}^2$ με

$$Y = \Big\{ \big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big)\big) :\ 0 < x \leq \frac{1}{\pi} \Big\} \cup \Big\{ (0,y) : -1 \leq y \leq 1 \Big\}.$$

54. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ο χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός.

(β) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ο $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}$.