## Εισαγωγή στην Τοπολογία - Ενδιάμεση Εξέταση (7-12-2024)

**Θέμα 1ο** $(2,2+0,8=3$ μον.)

Έστω $(X,\mathscr{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Εξ ορισμού, η κλειστή θήκη του $A$ είναι το σύνολο

$$\overline{A} = \bigcap\{K \subseteq X : K \text{ κλειστό και } A \subseteq K\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε $x \in X$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) Για κάθε $U$ ανοικτό υποσύνολο του $X$, με $x \in U$, είναι $U \cap A \neq \emptyset$.

(iii) Υπάρχει δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στο $A$, το οποίο συγκλίνει στο $x$.

(β) Έστω $A \subseteq Y \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\mathrm{cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y$, όπου $\mathrm{cl}_Y(A)$ η κλειστή θήκη του $A$ στον υπόχωρο $Y$ με τη σχετική τοπολογία.

**Θέμα 2ο** $(1+1,2+0,8=3$ μον.)

(α) Έστω $X, Y$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής και $1-1$ συνάρτηση. Αν ο $Y$ είναι χώρος Hausdorff ($T_2$), αποδείξτε ότι και ο $X$ είναι χώρος Hausdorff.

(β) Συμβολίζουμε με $\overline{\mathbb{R}}$ την επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών, δηλαδή το σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία $\mathscr{T}$ που έχει ως υποβάση την κλάση

$$\mathcal{C} = \{(\alpha, +\infty] : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Αποδείξτε ότι ο τοπολογικός χώρος $\overline{\mathbb{R}}$ είναι ομοιομορφικός με το κλειστό διάστημα $[-1,1]$.

(ii) Ορίστε μια μετρική στο $\overline{\mathbb{R}}$, η οποία επάγει την τοπολογία $\mathscr{T}$.

**Θέμα 3ο** $(1+1+1=3$ μον.)

Συμβολίζουμε με $\mathscr{T}$ τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$ και με $\mathscr{T}_S$ την τοπολογία του Sorgenfrey στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αυτήν που έχει ως βάση την οικογένεια των δεξιά ημιανοικτών διαστημάτων

$$\mathcal{B} = \big\{[a,b) \ : \ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\big\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι, αν μια ακολουθία $(x_n)$ στο $\mathbb{R}$ συγκλινει σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$ ως προς την $\mathscr{T}_S$, τότε η $(x_n)$ συγκλίνει στο $x$ και ως προς την $\mathscr{T}$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στον $\mathbb{R}_S = (\mathbb{R}, \mathscr{T}_S)$.

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία η οποία συγκλίνει στον $\mathbb{R}_S$.

**Θέμα 4ο** $(0,8+1+1,2=3$ μον.)

(α) Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των πραγματικών ακολουθιών με την τοπολογία γινόμενο. Αν $A = [0,1]^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, βρείτε το $A^\circ$.

(β) Στο σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των πραγματικών ακολουθιών θεωρούμε την box τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$. Έστω $c_0 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ το σύνολο των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0. Αποδείξτε ότι το $c_0$ είναι κλειστό στον χώρο $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{\text{box}})$.

(γ) Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, με την τοπολογία γινόμενο $\mathscr{T}$. Έστω $C(\mathbb{R})$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $C(\mathbb{R})$ είναι πυκνό στον χώρο $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathscr{T})$.

*Καλή Επιτυχία!*