Εισαγωγή στην Τοπολογία

(17-1-2025)

Θέμα 1ο $(0,5+1+1+0,5=3$ μον.$)$

Θεωρούμε την κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

$$\mathscr{T}=\Big\{(a,+\infty)\ :\ a\in\mathbb{R}\Big\}\cup\Big\{\emptyset,\mathbb{R}\Big\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathscr{T}$ είναι τοπολογία στο $\mathbb{R}$.

(β) Αν $A\subseteq\mathbb{R}$, προσδιορίστε την κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A ως προς την τοπολογία $\mathscr{T}$.

(γ) Εξετάστε αν ο χώρος $(\mathbb{R},\mathscr{T})$ είναι (1) Hausdorff, (2) διαχωρίσιμος, (3) συμπαγής, (4) συνεκτικός.

(δ) Αποδείξτε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R},\mathscr{T})$ στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι οι σταθερές.

Θέμα 2ο $(1+0,5+1,5=3$ μον.$)$

(α) Αποδείξτε πλήρως ότι ο χώρος των πραγματικών ακολουθιών $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι 2ος αριθμήσιμος.

(β) Έστω X τοπολογικός χώρος και, για κάθε $x\in X$, $\mathcal{B}_x$ μια βάση περιοχών του x. Αποδείξτε ότι ο χώρος X είναι T_1 αν και μόνο αν, για κάθε $x\in X$, ισχύει $\bigcap\{U:\ U\in\mathcal{B}_x\}=\{x\}$.

(γ) Έστω I υπεραριθμήσιμο σύνολο και $X_i,\ i\in I$, οικογένεια τοπολογικών χώρων με την ιδιότητα, για κάθε $i\in I$, ο X_i είναι T_1 χώρος με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Αποδείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $X=\prod_{i\in I}X_i$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος.

Θέμα 3ο $(1+1,5=2,5$ μον.$)$

Έστω X τοπολογικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σημείο $x_0\in X$ λέγεται οριακό σημείο μιας ακολουθίας (x_n) του X, αν, για κάθε περιοχή U του x_0 και για κάθε $m\in\mathbb{N}$, υπάρχει $n\geq m$ με $x_n\in U$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Έστω ότι ο τοπολογικός χώρος X είναι 1ος αριθμήσιμος. Αν η (x_n) είναι μια ακολουθία στον X και το $x_0\in X$ είναι ένα οριακό σημείο της, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) που συγκλίνει στο x_0.

(β) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι 1ος αριθμήσιμος και συμπαγής, τότε είναι ακολουθιακά συμπαγής, δηλαδή κάθε ακολουθία στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θέμα 4ο $(1+1+1,5=3,5$ μον.$)$

(α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $1-1$ και συνεχής συνάρτηση $f:S^1\to\mathbb{R}$.

(β) Έστω $\{A_i:i\in I\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα: για κάθε $i\neq j$ ισχύει $A_i\cap A_j\neq\emptyset$. Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{i\in I}A_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

(γ) Έστω $(X,\mathscr{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Αποδείξτε ότι αν ο $(X,\mathscr{T})$ είναι φυσιολογικός (T_1 και T_4) και συνεκτικός, τότε το σύνολο X είναι υπεραριθμήσιμο.

Καλή Επιτυχία!